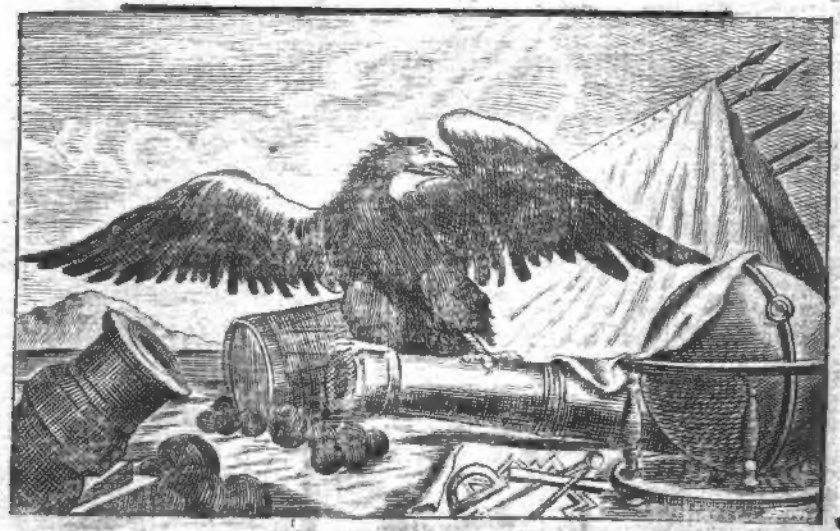
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXII.



A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXIX.

Imprimé

par ordre de l'Académie.

TABLE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

Nouvelles Obſervations, *concernant deux cas particuliers de Grenouilles, qui ont été troublées dans l'état d'engourdiſſement où elles ont coûtume de paſſer l'hyver*, par M. GLEDITSCH. page 3

Expériences *ſur le poids du ſel & la gravité ſpécifique des Saumures faites & analyſées*, par M. LAMBERT. 27

Mémoire *ſur les Priſmes achromatiques*, par M. BÉGUELIN. 66

Conjecture phyſique *ſur quelques changemens arrivés dans la ſurface du Globe terreſtre*, par M. SULZER. 90

Deux Deſcriptions *de cette eſpece d'Hommes qu'on appelle* Negres-Blancs, *communiquées* par M. DE CASTILLON. 99

Mé-

Mémoire *ſur une congélation remarquable*, par M. DE CASTILLON. 106

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

Conſidérations *ſur les difficultés qu'on rencontre dans l'exécution des verres objectifs délivrés de toute confuſion*, par M. L. EULER. 117

Recherches *ſur les Téleſcopes à réflexion & les moyens de les perfectionner*, par M. L. EULER. 143

Recherches *ſur une autre conſtruction des Téleſcopes à réflexion*, par M. L. EULER. 185

Sur *la confuſion que cauſe dans les Inſtrumens dioptriques la diverſe réfrangibilité des rayons*, par M. L. EULER. 195

Conſidérations *ſur les nouvelles Lunettes d'Angleterre de* M. Dollond, *& ſur le principe qui en eſt le fondement*, par M. L. EULER. 226

Sur *les avantages des verres objectifs compoſés de deux verres ſimples*, par M. L. EULER. 249

Remarques *ſur l'effet du frottement dans l'équilibre*, par M. L. EULER. 265

Pre-

Premier Mémoire *ſur la réfraction des fluides*, par M. J. A. EULER. 279

Second Mémoire. *Expériences ſur la quantité de réfraction des fluides*, par M. J. A. EULER. 302

Troiſieme Mémoire *ſur la réfraction des fluides*, par M. J. A. EULER. 311

Quatrieme Mémoire. *Expériences ſur la réfraction de quelques fluides*, par M. J. A. EULER. 318

Cinquieme Mémoire. *De l'influence de la chaleur ſur la réfraction des fluides*, par M. J. A. EULER. 328

Nouvelles Recherches pratiques *ſur les aberrations des rayons réfractés & ſur la perfection des Lunettes.* Premier Mémoire. Par M. BE'GUELIN. 343

CLASSE

DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

Sur *l'éternité du Monde*, par M. BE'GUELIN. 419

Réflexions philoſophiques *ſur les Songes*, par M. DE BEAUSOBRE. Premier Mémoire. 429

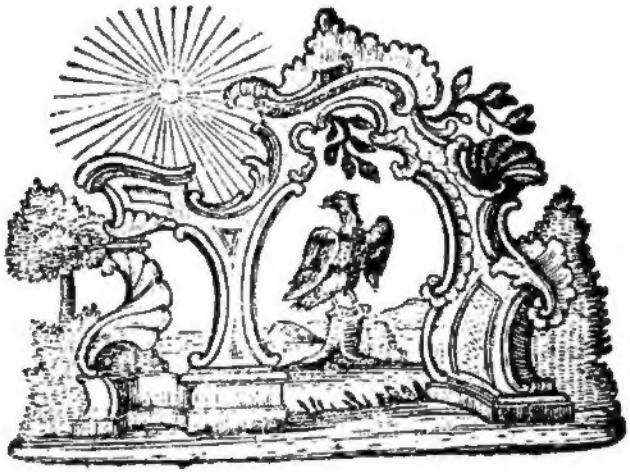
Sur *la méthode du Calcul intégral*, par M. LAMBERT. 441

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

Diſſertation *ſur la naiſſance de CLOVIS I.* par M. DE FRANCHEVILLE. 487

Eloge de M. HUMBERT. 516

Eloge de M. JACOBI. 520.



MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

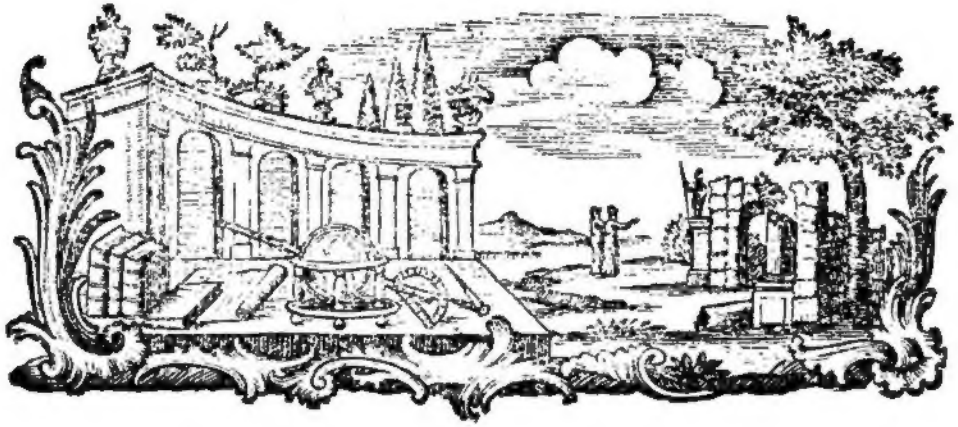
SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



NOUVELLES OBSERVATIONS CONCERNANT DEUX CAS PARTICULIERS DE GRENOUILLES (*a*), QUI ONT ÉTÉ TROUBLÉES DANS L'ÉTAT D'ENGOURDISSEMENT OÙ ELLES ONT COÛTUME DE PASSER L'HYVER. (*)

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

Toutes les eſpeces d'animaux ſauvages qui vivent ſous un Ciel tempéré, depuis les plus grandes juſqu'aux plus petites, & par conſéquent juſqu'aux inſectes que leur petiteſſe dérobe à la ſimple vue, paſſent l'année entiere dans le même climat, ou bien au changement des ſaiſons, vont dans d'autres pour quel-

(*a*) *Rana temporaria*, *Linn. Ed. X.* p. 212. n. 13. *Ed. XII.* p. 357. n. 14.

(*) Lû dans les Aſſemblées du 18 Novembre & du 2 Décembre 1762.

quelques mois. Ce cas qui eſt bien fondé ſur l'ordre de la Nature, a lieu par rapport à toutes les eſpeces d'animaux, tant quadrupedes qu'oiſeaux, poiſſons & autres, & même par rapport aux inſectes. Dans pluſieurs, la choſe ſe paſſe d'une maniere tout à fait manifeſte; dans quelques unes, on peut l'obſerver ſubitement, & tout à la fois; mais l'obſervation eſt plus difficile à faire à l'égard de quantité d'autres qui diſparoiſſent inſenſiblement. Ces dernieres qu'on perd peu à peu de vue, ſe remontrent le plus ſouvent de la même maniere, lorſqu'elles y ſont comme néceſſitées par l'ordre de la Nature, ſoit pour multiplier leurs eſpeces, ſoit pour chercher leur ſubſiſtance. Il n'eſt pas queſtion ici des cas extraordinaires, qui, dans certaines années, nous font trouver dans nos contrées des animaux tout à fait étrangers, qui n'y appartiennent point, & dont à peine un ſeul individu ſe préſente tout les huit, dix, douze ou quinze ans. (*)

Dans tous les animaux ſauvages, qui ſont entierement propres à nos contrées, ſoit qu'ils s'y laiſſent voir pendant tout le cours de l'année, ou qu'ils ſe tiennent cachés pendant un court eſpace de tems, ou auſſi, comme cela arrive à pluſieurs ſortes d'inſectes, qu'ils vivent dans leurs oeufs ou dans des chryſalides, on remarque, ſuivant la température des lieux, certaines différences. En effet, une partie de ces animaux, qui, au cœur de l'hyver, ſans craindre la rigueur de la ſaiſon, eſt accoutumée à chercher ſa nourriture en plein air, demeure obſervable toute l'année, dans les lieux qui lui ſervent de retraite & où elle à établi ſon domicile; avec cette ſeule exception que, tantôt les mâles, tantôt les femelles, quelquefois les uns & les autres enſemble, peut-être à cauſe de leurs alimens, de la ſaiſon, de l'accouplement, de la multiplication, & d'autres ſituations naturelles qui les concernent particulierement, demeurent dans des lieux ſéparés, & par cette raiſon ne ſauroient être apperçus pendant un fort court eſpace de

(*) C'eſt ce qu'on remarque à l'égard des oiſeaux aquatiques d'Ecoſſe & des autres contrées ſeptentrionales: il en vient beaucoup plus rarement des pays chauds dans la Marche.

de tems: ce qui arrive néanmoins, & peut très bien arriver, ſans que ces animaux ayent beſoin de s'éloigner.

Une autre partie des eſpeces ſauvages, qui ſont auſſi indigenes que les précédentes, & qui par conſéquent n'abandonnent jamais nos contrées ſans les cauſes les plus preſſantes, ſe cachent entierement tous les ans pendant quelques mois, de façon qu'il y en a quelques unes dont le ſéjour en hyver n'a encore pu être découvert & déterminé par les Naturaliſtes. Il eſt très connu & décidé à l'égard de pluſieurs que, vers la fin de l'automne, elles entrent dans leurs retraites pour y paſſer l'hyver, & en ſortir au printems ſuivant. Quand la ſaiſon n'eſt pas rude, il y en a qui ſortent de leurs aſyles même pendant l'hyver, pour venir reſpirer l'air; mais elles ne s'en éloignent, ni trop, ni trop longtems. Une circonſtance qui paroit particuliere à ces dernieres, c'eſt qu'elles s'arrangent des lieux de retraite, régulierement & ſûrement conſtruits, où elles ſont à l'abri du froid, & où elles raſſemblent en même tems les proviſions dont elles ont beſoin, ayant eu ſoin de les y porter dès l'automne.

Une partie conſidérable de nos animaux ſauvages indigenes, s'eſt outre cela attiré d'une façon ſinguliere l'attention des Naturaliſtes, par cela même qu'elle ſe trouve dans des circonſtances préciſément contraires à celles que nous venons d'expoſer. Les animaux que j'ai en vue, & dont le nombre va certainement fort loin, puiſqu'il comprend diverſes claſſes du Regne animal, demeurent auſſi conſtamment avec nous, & ſe dérobent entierement à nos regards pendant les mois d'hyver. Voilà ce qu'ils ont de commun avec les précédens; mais ils en different à tout autre égard. Car, dès l'automne, ils commencent à jeûner, ce qui les affoiblit; & enſuite ils s'enferment dans leurs retraites où leur ſituation ne reſſemble en rien à celle des autres.

De ces animaux, les uns ſe logent ſous terre, à diverſes profondeurs, les autres dans des murs, des arbres creux ou des caves, quelquefois ſous des racines ou ſous des rivages élevés; il y en a auſſi dans des cavités, ſous des amas de cailloux, dans des rochers, & ſous

ces pierres qui ſont répandues dans les campagnes. Certaines eſpeces ſe trouvent fort profondément ſous l'eau, ou entierement au fond, ou plus à la ſurface dans la vaſe. C'eſt là que, ſans aucune nourriture & ſans ſe mouvoir, elles attendent le retour du printems. Elles tombent dans une ſorte d'engourdiſſement, ou d'aſſoupiſſement, que quelques Naturaliſtes appellent le ſommeil d'hyver de ces animaux. Dans ce plus haut période d'affoibliſſement on n'y remarque plus qu'un mouvement extérieur très lent & très foible; dans quelques unes même il eſt imperceptible. Alors elles ſont dans un état total, ou de contraction, ou d'extenſion, où elles demeurent, ſans le moindre changement, juſqu'à ce que l'air ait repris le degré de chaleur qui fait germer les jeunes plantes, & éclorre les inſectes. Pour ne pas m'engager dans de trop grandes longueurs, je renvoie ceux qui aiment les détails à l'hiſtoire naturelle de ces animaux, où tout ce dont j'ai fait juſqu'ici une mention ſuccinte, en faveur de l'ordre, ſe trouve rapporté d'une maniere circonſtanciée. Je vais, conformément à mes vues, me borner ici à deux cas tout à fait extraordinaires, qui, par leur rareté, méritent toute l'attention de ceux qui s'attachent à l'étude de la Nature.

Il s'agit de nos Grenouilles communes, dont une partie paſſe l'hyver ſur la terre, mais l'autre fort avant dans l'eau dans les marais, les lacs & les courans: ce qui peut avoir induit le vulgaire à diſtinguer entre grenouilles d'eau & grenouilles de terre. Depuis le printems juſqu'au milieu de l'automne, ces animaux, comme l'on ſait, vivent du frai des poiſſons, & de la rapine qu'ils exercent ſur tous les inſectes & ſur toutes les petites créatures dont leur grandeur & leur force leur permettent de ſe ſaiſir: quelquefois auſſi ils dévorent avec beaucoup d'avidité la feuille tendre de certaines plantes, tant qu'elle conſerve de la douceur. Mais, dès que les nuits commencent à être plus longues & plus froides, leur appétit paſſe; ils ceſſent peu à peu de manger, & perdent la plus grande partie de leur vivacité précédente. Après cela ils ſe diſperſent, vers le milieu d'Octobre: on n'en trouve

plus

plus une ſi grande quantité dans les campagnes, dans les prairies & ſur le bord des eaux: dans les derniers jours chauds de l'arriere-ſaiſon ils ne s'écartent gueres des marêcages, & à la fin ils ne ſe montrent plus qu'aux heures du midi, dans les endroits expoſés au Soleil. Quand leur vivacité eſt tout à fait éteinte, ils diſparoiſſent avec les beaux jours qui terminent l'automne, de maniere qu'en Novembre à peine en rencontre-t-on par-ci par-là qui ſe traînent, toute l'eſpece, conformément à l'ordre de la Nature, ayant déjà pris ſes quartiers d'hyver.

Les Grenouilles communes de terre ſe gliſſent partout où elles peuvent être à l'abri de la rigueur du froid: on en trouve, à diverſes profondeurs, dans la terre, ſous les arbres, dans les murailles, dans les caves, entre l'épaiſſeur des planches, dans les écuries & autres lieux ſemblables. Néanmoins je ne les ai jamais trouvées auſſi enfoncées en terre qu'ont coûtume de ſe placer les crapaux des champs & des jardins: car il arrive quelquefois, au milieu de l'hyver, par quelque accident, qu'on tire ceux-ci de creux très profonds, entre des collines, en nombre conſidérable, avec leurs ennemis jurés, les ſerpens, dont ſans cela & dans les autres ſaiſons de l'année, les crapaux ne ſauroient ſoutenir longtems la compagnie; & cela n'auroit pas même lieu dans leurs nids d'hyver, ſi les uns & les autres n'étoient alors dans un état qui ne leur permet pas de ſe nuire réciproquement.

La retraite des Grenouilles communes d'eau en hyver eſt dans le ſol du fond des courans, des lacs, & des marais, à diverſes profondeurs, mais le plus ſouvent tout ſimplement dans le limon. Elles y tiennent auſſi ferme que des pierres, dans un état d'affoibliſſement, d'immobilité & de contraction. Leurs yeux ſont tout à fait petits & enfoncés dans la tête, & pareillement retirés enſemble. La bouche eſt, comme aux Grenouilles de terre, parfaitement fermée. Dans ce lieu, dans cet état & dans cette poſition, ces deux eſpeces de créatures ſe trouvent dans une ſorte d'engourdiſſement, où elles demeurent au fond

fond de leurs retraites juſqu'au printems. Elles vivent à la vérité réellement, quoiqu'avec le mouvement intérieur le plus foible qu'on puiſſe imaginer, & qu'on pourroit ſuppoſer en être le plus bas degré: & quant aux mouvemens extérieurs, il ne s'en manifeſte que peu ou preſque point. Cet état n'a pas ſeulement lieu pour les grenouilles, les crapaux, les ſerpens, les tortues, les lézards, & autres reptiles ſemblables; il s'étend auſſi à quelques eſpeces d'oiſeaux & de quadrupedes; mais nous ne ſommes inſtruits avec exactitude que du plus petit nombre des circonſtances qui les concernent: & les cas fortuits qui ſe préſentent, ne nous donnent que des notions très imparfaites.

Quand on réfléchit attentivement ſur ce qui vient d'être dit de l'état de ſemblables créatures, on y trouve des articles dont l'importance eſt aſſez grande pour exciter toute l'attention d'un Naturaliſte; comme, par exemple, qu'un tel animal peut demeurer pendant quatre à cinq mois dans cet état ſans prendre de nourriture, les mouvemens naturels de l'œconomie animale étant alors en partie ſuſpendus dans le corps, ou même entierement arrêtés. Les mouvemens mêmes qu'on nomme vitaux ſont conſidérablement altérés, réduits au plus bas degré de foibleſſe, & rendus preſque imperceptibles.

Si nous empruntons enſuite le ſecours de l'expérience, & que nous joignions aux remarques précédentes les obſervations que des hommes célebres ont faites tant en hyver qu'au printems ſur ces animaux, les épreuves auxquelles ils les ont ſoumis, les diſſections qu'ils en ont fait, & toutes les rélations qui en exiſtent; les deux cas, dont il va être queſtion dans la ſuite, nous paroitront néceſſairement tout à fait rares & extraordinaires. Dans ces animaux, le ſang ne ſe meut pas en hyver par les poumons comme au printems; & le mouvement du cœur, le principal & le plus indiſpenſable de la machine, eſt tellement affoibli & comme étouffé, que, ſuivant l'obſervation du célebre Leuwenhœck, en conſidérant au microſcope les arteres des grenouilles & des chauveſouris, le ſang en hyver paroit épaiſſi, figé ou granuleux. Cette circonſtance ſe confirme par l'expérience la plus exacte,

qui

qui montre comment la circulation ſe rallentit d'abord dans les muſcles & dans les membres extérieurs de ces créatures, & commence à s'y affoiblir, tandis qu'elle eſt encore aſſez forte dans les inteſtins; & lors même qu'elle paroit ceſſer tout à fait, elle ſubſiſte pourtant encore dans le cœur & dans les arteres, & y a même pendant longtems encore aſſez de vivacité. Mais, quand le mouvement décroît à la fin, au point d'être tout à fait imperceptible, il ne laiſſe pas de continuer dans le cœur & dans les arteres, quoique parvenu au dernier degré d'affoibliſſement. Il ne reſte quelquefois aucun ſigne de reſpiration & de vie qui ſoit obſervable, aucun indice de ſentiment & de mouvement. Une choſe que le même Obſervateur a encore remarquée, c'eſt que le ſang des animaux réduits à cet état ne ſe laiſſe pourtant pas diſſoudre & délayer, même après l'avoir tenu longtems expoſé au feu. On ne ſauroit parvenir, ajoute-t-il, à rendre la liquidité & le mouvement actuel à ce ſang, avant que le cœur ait commencé à ſe contracter à diverſes repriſes; mais, dès que cela eſt arrivé, le ſang recouvre ſon mouvement précédent, & revient à ſon état de fluidité naturelle.

Tout cela fait ſuffiſamment voir que, dans ces animaux, la force mouvante ou motrice du cœur (*) eſt en partie peu à peu détruite, en partie affoiblie à un tel degré, que ſon mouvement actuel, & en même tems celui de toutes les parties ſolides du corps, eſt fort empêché, arrêté, & preſque entierement ſupprimé. Car c'eſt en cela que conſiſte la grande & principale cauſe, ſans la force & l'efficace de laquelle la circulation du ſang avec la ſécrétion de toutes les autres liqueurs qui ſe trouvent dans le corps humain, ne ſauroit avoir lieu.

Rien n'étant donc plus certain que la dépendance où ſe trouvent la circulation du ſang, auſſi bien que le mouvement & la ſécrétion des autres liquides dans les animaux, de la contraction actuelle (**) & vive en même tems des parties ſolides du corps, il ne paroit pas que l'aſſertion

(*) *Vis contractilis cordis & arteriarum.*
(**) *actualis contractio.*

non ſuivante ait beſoin d'être établie ſur des preuves ultérieures; ſavoir que par le frottement réitéré des liquides contre les ſolides, qui a lieu dans la circulation de tous les ſucs ſuivant l'ordre régulier, il s'excite dans le corps une chaleur, qui ſert enſuite néceſſairement à dilater & à étendre l'air renfermé dans les canaux & mêlé avec les ſucs. Néanmoins il ne faut faire l'application de ces circonſtances aux diverſes eſpeces de ſemblables animaux qu'avec beaucoup de circonſpection, & en y apportant les reſtrictions convenables; ce qui va ſe prouver bientôt de ſoi-même, en conſidérant la ſtructure particuliere du cœur & des autres inteſtins. En attendant, en vertu de ces circonſtances, qui peuvent fort bien entrer en comparaiſon avec les précédentes, l'état des animaux qui ſont le ſujet de ce Mémoire ſe préſente d'une maniere aſſez diſtincte; & par la réunion de toutes les expériences & de toutes les obſervations faites à ce ſujet, on peut dire avec une pleine certitude, que tant que les animaux ſuſdits demeurent dans l'état où ils paſſent l'hyver, les mouvemens naturels & animaux, avec ceux qui ſont requis pour la conſervation de la vie (*), ſe trouvent en partie affoiblis, étouffés, & même détruits. Que cela ait effectivement lieu par rapport aux mouvemens naturels (**), c'eſt ce qui paroit réſulter de l'extreme inſenſibilité & inertie qu'on obſerve dans ces animaux pendant ce tems-là. Mais, que les autres mouvemens animaux (*,*) ſoient en même tems étouffés & détruits, c'eſt ce que témoigne principalement l'entiere imperceptibilité, ou le défaut réel du mouvement (qui eſt pourtant particulierement néceſſaire) de l'eſtomac & des inteſtins, avec le défaut de la liqueur qui doit ſe trouver dans l'eſtomac pour y diſſoudre les alimens, & procurer la digeſtion & la préparation du chyle; (†) auſſi bien que l'état des boyaux entierement vuides & affaiſſés: enfin cet état ſingulier d'un aſſoupiſſement continuel, d'un ſommeil qui dure pluſieurs mois.

Quant

(*) *actiones animales, naturales & vitales.*
(**) *actiones naturales.*
(*,*) *animales.*
(†) *motus peristalticus ventriculi & inteſtinorum, defectus liquoris gaſtrici, concoctionis, chylificationis.*

Quant à ce qui regarde les principaux mouvemens qui appartiennent à la vie (*), on eſt en droit de ſuppoſer que, comme les précédens, ils ceſſent en partie, & en partie ils continuent d'une maniere tout à fait imperceptible, à cauſe de leur extreme degré de foibleſſe. Le défaut de reſpiration peut auſſi ſervir ici de preuve fort évidente, les poûmons ſe trouvant en méme tems tout à fait affaiſſés, parce que le ſang qui a coûtume d'y circuler avec beaucoup de rapidité, n'y paſſe point pendant un eſpace de tems. La circulation du ſang ne laiſſe pas de ſe maintenir dans le corps; & elle s'exécute au moyen d'un mouvement extérieur, imparfait, foible, lent & imperceptible, qui ſubſiſte dans les autres vaiſſeaux auſſi longtems qu'il eſt poſſible, ſans ébranler les poûmons. On conçoit au reſte que la vie peut exiſter & durer ſans la reſpiration, puiſque les embryons des animaux vivent réellement dans les œufs.

Tout ce que je viens d'expoſer au ſujet de l'état des Grenouilles en général, & de quelques autres animaux, eſt deſtiné ſurtout à mettre les Lecteurs mieux en état de juger de ce qu'il y a de rare & d'extraordinaire dans les deux cas que le titre de cette Diſſertation annonce, & qui en ſont le ſujet proprement dit. Les voici.

J'ai obſervé le premier, il y a déjà un tems conſidérable, dans le Jardin Botanique de Trebnitz, & dans la compagnie de ſon illuſtre poſſeſſeur (**), chez qui, au défaut d'un Jardinier, je m'étois chargé avec plaiſir pour un certain tems du ſoin des plantes étrangeres, ſur leſquelles je faiſois toutes ſortes d'expériences. M. de Juſſieu, qui s'eſt acquis tant de réputation par ſon ſavoir, & qui eſt ſi eſtimable par ſon caractere obligeant, me fit parvenir alors une quantité conſidérable de pluſieurs ſemences rares, qu'il avoit reçues nouvellement de l'Amérique méridionale. La plûpart vinrent fort bien. Mais leurs jeunes plantes avoient beaucoup de douceur viſqueuſe, & avec cela une moëlle abondante. En particulier, leur bois & leur écorce ne

(*) *actiones vitales.*

(**) M. *de Zieten.* Voyez *Catal. Hort. Trebnitz. de Anno* 1737.

mûriſſoient pas bien avant l'entrée de l'hyver, à cauſe de quoi, renfermées dans les ſerres, lorſque le tems devenoit d'un froid humide avec des brouillards en Novembre, elles perdoient preſque toutes leurs feuilles, à l'exception de celles qui étoient aux pointes.

Cet accident exigea que ces plantes, qui méritoient bien d'être conſervées, fuſſent tenues juſqu'au printems dans un degré conſidérable d'une chaleur douce continuelle, juſqu'à ce qu'il vînt des jours plus clairs, & que le Soleil eût atteint une plus grande hauteur. On fit donc dans la ſerre chauffée une couche de fumier avec du tan, que l'on avoit ſoin de renouveller comme il étoit convenable. Vers le milieu de Décembre, on mit ſur cette couche une grande quantité de ſemblables plantes avec beaucoup de ſuccès. L'appartement & le ſol de la maiſon, qui ſe trouvoient ſuffiſamment échauffés par là, furent entretenus dans un certain degré de chaleur auſſi exactement qu'il étoit poſſible. Bientôt après on apperçut, particulierement le matin & le ſoir, quelquefois auſſi dans l'obſcurité, une groſſe & vieille grenouille, qui coaſſoit d'un ton aſſez bas, mais dont le coaſſement devint enſuite auſſi haut & auſſi fort qu'il ſe fait entendre au printems en plein air: ſeulement il n'étoit pas auſſi fréquent. Au commencement on ne put pas bien découvrir le gîte de cet animal; il y a apparence qu'il s'étoit gliſſé par la fenêtre d'en bas de la maiſon, qui avoit été quelquefois ouverte en Octobre, & qu'il avoit pris ſa retraite ſous le ſeuil.

Les mêmes circonſtances durerent juſqu'à la fin de Fevrier; l'animal apparemment avoit été ranimé par la douce chaleur que le fumier avoit communiquée à la terre, au point que, dans une ſaiſon où il n'a pas coûtume de paroître, il étoit venu à la fin chercher ſa nourriture & l'avoit trouvée dans l'appartement chauffé par le fourneau, comme je m'en apperçus avec étonnement; mais en même tems j'en reçus du dommage. Car, peu après, il ſe manifeſta, aux tiges tendres des plantes vers les pointes, & aux jeunes feuilles, des points & de petites taches répandues partout, comme ſi on les avoit piquées & déchirées avec des épingles. Ces taches ſe multiplierent & s'aggrandirent

dirent journellement, de façon qu'on s'appercevoit diſtinctement qu'il y avoit dans le lieu même quelque choſe qui endommageoit ces plantes en les frouſſant & les rongeant; auſſi commencerent-elles à ſe flétrir, & quelques unes périrent. Quoique je ne puſſe pas découvrir d'abord le véritable auteur de ce dommage, il me paroiſſoit trop délicat pour que j'euſſe pu l'attribuer à la Grenouille, qui d'ailleurs ne s'étoit pas encore montrée. (*)

En Janvier, de nouvelles circonſtances ſurvinrent, qui dévoilerent bientôt tout le myſtere. Les fenêtres de la ſerre ayant été ouvertes le matin par un beau Soleil, & les plantes devant être un peu arroſées une heure après, on découvrit d'abord la groſſe Grenouille entre les pots, un peu étendue ſur le tan, comme ſi elle eût voulu bien jouir de la chaleur des rayons du Soleil; & les jours ſuivans, on la rencontroit preſque partout dans l'appartement. Dans la même matinée on vit un nombreux eſſain de fort petites ſauterelles, qui paroiſſoient être de l'eſpece des petites ſauterelles vertes des prés, & qui ſortirent du tan entre les pots. (**) Cet eſſain alla ſe porter droit ſur les plantes, de façon que les tiges, les ſommets & les branches de quelques unes en furent preſque tout à fait couverts.

On détruiſit un petit nombre de ces inſectes, mais la plus grande partie échappa entre les pots & rentra dans le tan. En général, on ſe donna pendant quelque tems des peines inutiles pour en débarraſſer les plantes; la grenouille qui prenoit tous les jours plus de vivacité, les chercha ſoigneuſement, & en fit curée en peu de tems, de façon que la maiſon s'en trouva entierement délivrée. Six jours après, contre mon attente, la grenouille ſe perdit, & je n'ai pu en découvrir depuis aucune trace. Il y a toute apparence qu'elle rentra dans ſon gîte qui aura été quelque endroit plus frais de la maiſon, ou, ce qui eſt encore plus vraiſemblable, qu'elle ſera morte; comme cela arrive

(*) M. *de Zieten* conjectura tout d'abord qu'il falloit qu'il y eût des inſectes cachés dans le tan.

(**) Cette circonſtance a eu lieu encore une fois avec du tan qui n'étoit pas net.

aux animaux de ces eſpeces, que quelque accident tire pendant l'hyver de leur aſſoupiſſement, & conduit dans des appartemens chauds.

La douce & continuelle chaleur du fumier avoit ranimé cette grenouille, de façon qu'au milieu de l'hyver elle s'eſt fait voir pendant longtems, & qu'elle a même cherché de la proie pour lui ſervir de nourriture. C'eſt la même chaleur qui a fait éclorre les œufs des ſauterelles, & les a miſes en état de ſe procurer bientôt des alimens.

L'autre cas particulier que mes eſſais m'ont offert, n'eſt pas moins remarquable que le précédent. Par un froid rigoureux & une forte gelée, je fis pêcher, vers la fin de Décembre, une quantité de grenouilles au fond de la Sprée, & j'en choiſis trois des plus conſidérables pour mes expériences. De ces trois il y en avoit une femelle & deux mâles; ces derniers étoient aiſément reconnoiſſables aux caroncules avancées qu'ils ont à chaque pouce des pieds de devant. A en juger par les indices extérieurs, ces animaux étoient dans un parfait engourdiſſement, & dans un état de contraction peut-être plus fort que de coûtume, parce qu'après les avoir tirés de deſſous l'eau de Charlottembourg, on les avoit portés à Berlin expoſés au froid. Je mis chaque grenouille dans un verre à part avec de l'eau de riviere; le verre avoit environ un pied de largeur & deux de hauteur. D'abord ces grenouilles allerent à fond comme des pierres, & conſerverent toute la force de leur contraction. Je les poſai dans ces verres ſur le plancher d'une chambre froide, & les y laiſſai tranquilles pendant huit jours: il ſe fit au deſſus de l'eau une croute de glace, ſans que cela portât aucun préjudice aux grenouilles.

Au bout de ce tems, je les trouvai toujours dans la même poſition où elles s'étoient montrées dès le commencement: je les tirai de l'eau pour les conſidérer plus attentivement; je ſéparai leurs pattes de derriere l'une d'avec l'autre; mais par un effet de l'air chaud, comme je l'expliquerai dans la ſuite, ces pattes ſe replierent peu à peu avec une force extrêmement débile, & reprirent leur précédente ſituation. Néanmoins la bouche demeura fermée, les yeux étant petits, tout retirés

tirés & fort enfoncés dans la tête. Tant que ces animaux demeurerent au froid, ils ne changerent point la ſituation que je leur avois une fois donnée, ou du moins ne le firent que fort lentement, avec une extreme difficulté & d'une maniere preſque imperceptible.

Le 8 Janvier, je mis les verres avec les grenouilles dans une chambre qui étoit à la vérité chaude, mais ſur le plancher, & je fis chauffer avec force la chambre qui étoit au deſſous, ce qui fit que les grenouilles commencerent à s'étendre & à s'allonger un peu dans l'eau: le lendemain ces changemens devinrent encore beaucoup plus ſenſibles. Ayant élevé ces grenouilles à deux pieds de terre, elles ſentirent un peu mieux la chaleur du fourneau, & au bout d'une couple de jours elles s'arrangerent & ſe redreſſerent au fond du vaſe: juſqu'à ce qu'à la fin elles recouvrerent aſſez de force pour débaraſſer leurs pieds les uns d'entre les autres. Mais, afin de pouſſer plus loin cette expérience, je plaçai les verres encore deux pieds plus haut, de ſorte que par la douce chaleur du poële la vivacité des grenouilles alla toujours en augmentant. Elles ſe mirent à nager au milieu du verre, & de tems en tems elles regagnoient le fond. Quelquefois elles montoient juſqu'à la ſurface de l'eau, où elles nageoient aſſez longtems; puis revenant, elles s'y plaçoient toutes droites ſur les quatre pattes étendues.

Dans ces circonſtances, je me propoſai de conſerver un des verres avec ſa grenouille au même degré de chaleur, & au contraire de ramener inſenſiblement les deux autres grenouilles à l'état précédent, où je les avois d'abord trouvées dans une chambre froide. Je m'y pris avec la plus grande circonſpection. Les mouvemens ſusdits diminuerent proportionellement avec la vivacité de ces animaux; & ils retomberent dans leur premier état en ſuivant un ordre contraire à celui qui les en avoit fait ſortir. Ayant fait les mêmes eſſais à diverſes alternatives, je remis les verres à la chaleur précédente, & je les poſai à côté de celui qui étoit demeuré dans le poële, qui étoit alors à quatre pieds d'élévation, & à trois pieds de diſtance de la fenêtre. Là ces animaux reprirent leur premiere vivacité.

Sur

Sur ces entrefaites il arriva de ſoi-même, & ſans que j'y euſſe fait attention, que le verre où étoit la grenouille femelle ſe trouva placé entre les deux autres où étoient les deux mâles: depuis ce tems-là je remarquois journellement que ces trois animaux montroient plus de vivacité & d'inquiétude; ils faiſoient beaucoup plus de mouvemens qu'auparavant en montant & en deſcendant dans l'eau; leurs yeux devenoient ſaillans, gros & brillans; la bouche étoit ouverte, & les grenouilles commencoient même à coaſſer, comme la premiere grenouille dont j'ai parlé dans mon récit précédent. Ce coaſſement devenoit plus fort, quand elles nageoient longtems au deſſus de l'eau, & donnoient plus de jeu à leurs poûmons. Et il paroiſſoit en général que, depuis ce tems-là, ces grenouilles ne pouvoient, ni ne vouloient demeurer, ni tout à fait, ni trop longtems ſous l'eau. Elles eſſayoient au contraire toutes ſortes de ſituations, quand elles étoient laſſes de l'une, tenant au moins la moitié de la tête hors de l'eau pour pomper ſeulement l'air; ce qui n'avoit point eu lieu auparavant. Pour leur procurer plus de facilité à ce dernier égard, je vuidai hors des verres aſſez d'eau pour que les grenouilles puſſent ſe tenir au fond les pieds étendus, comme elles le faiſoient le plus ſouvent, & avancer le nés hors de l'eau.

Tel fut leur état au milieu de Janvier, & encore un peu plus tard; après quoi elles eſſayerent de ſortir tout à fait des verres; ce qui leur réuſſiſſoit ſouvent, de ſorte que j'étois obligé de les reprendre par le poële, & de les remettre dans le verre. Mais, le plus ſouvent, elles alloient ſe loger toutes trois dans le même verre. L'un des mâles mourut alors, ſans que j'euſſe pu en découvrir la véritable cauſe. L'autre au contraire monta ſur la femelle dans le verre, & ils s'accouplerent régulierement le 30 Janvier, de la façon qu'on a coûtume de le ſuppoſer, quand on ne met point de différence entre le ſimple embraſſement des grenouilles, & l'acte de la fécondation réelle. (*)

Le

(*) Feu M. le Profeſſeur *Mentz* a propoſé ſes idées ſur les circonſtances extérieures qu'on obſerve dans le cas en queſtion: & voici ce qu'il dit là-deſſus au §. XXII. d'une

Le huitieme jour depuis que j'avois commencé à obſerver ce cas ſi extraordinaire, je trouvai le matin les deux grenouilles mortes, encore dans leur état d'accouplement; & cela mit fin tout d'un coup à mes expériences, que j'aurois volontiers pouſſées encore plus loin. (*) Quoique je n'oſe rien décider de poſitif ſur la cauſe de cette mort, entre pluſieurs qui peuvent y avoir contribué, le défaut d'une bonne & ſuffiſante nourriture ne me paroit pas avoir été la principale, vu que, dans ces ſortes d'animaux, depuis la fin de l'automne les liqueurs du corps qui s'étoient épaiſſies peu à peu, (entre leſquelles le ſang tient le premier rang, à quoi il faut joindre les mouvemens hors de ſaiſon & véhémens excités dans le corps de ces animaux, & les autres ſituations contraires à l'ordre naturel qu'ils ont éprouvées,) avoient cauſé un extreme affoibliſſement, auquel j'attribuerois plus volontiers qu'à quantité d'autres cauſes la mort qui s'eſt enſuivie. L'expérience vient outre cela nous fournir ſon ſecours, en nous apprenant que les eſpeces d'animaux, ou du moins quelques unes d'entr'elles, qui, comme il a déjà été dit, ſont troublées & tirées par quelque accident, au milieu de l'hyver, de leur état d'engourdiſſement & de foibleſſe, quelque ſoin qu'on prenne de leur procurer une chaleur artificielle, de les nour-

d'une Diſſertation ſoutenue à Leipſig ſous le titre de *Generat. Paradox. in Ran. conſpic.*

E thalamo frigido prorepit coaxans quadrupes, & cæco ardens impetu in amplexus ruit. Signo dato olobygone, obſcuro murmure inſilit a tergo maſculus, arctiſſimoque amplexu involvit famellam, lunatis aliis, pectore armis incumbens, anterioresque pedes inflectens. Sub alis, conſertis digitorum vel unguium intercapedinibus, qui ideo membrana, qua poſteriorum pedum digiti connectuntur, ut natationi uſum præbeant, ſunt liberi. Sed ita conſeruntur in manibus digiti, (quos ita nominare liceat) ut pollex ea parte, qua eſt tuberculum papillare, preſſius applicetur cuti thoracis, eo loco quo fiſtula utero emiſſa inſeritur, ubi eo imprimis tempore, quo genitale virus ſuis paluſtris nympha, cutis rara & tranſparens eſt; & ſic in amplexu hærentem ſuſtulit amata taurum, quem vel in ſtagno natans, ſive in gramine ſoloque duro ſaltans, ſubando circumfert, imo ſublatum geſtat, & ita firmiter incumbit adverſarius, ut nec virga cæſus, nec ferro ſectus amatam dimittat.

(*) Toutes les fois que j'ai répété de ſemblables expériences, elles ont donné les mêmes réſultats, comme je l'expoſerai dans la ſuite avec plus d'étendue.

nourrir & de les conſerver, meurent pour l'ordinaire bientôt après. C'eſt ce que j'ai obſervé diverſes fois dans les alouettes, & une fois dans une hirondelle au mois de Janvier; (*) & d'autres prétendent avoir fait les mêmes obſervations ſur les cigognes & ſur pluſieurs autres animaux. Il y a auſſi certaines années, dans leſquelles l'hyver eſt doux, ou du moins n'a pas le degré accoutumé de rigueur; & alors tant les grenouilles que certaines eſpeces de poiſſons, que la ſaiſon tempérée porte à ſortir plutôt de leurs trous, & à frayer de meilleure heure, ſont enſuite trouvées le plus ſouvent mortes en aſſez grande quantité au printems ſuivant. Si nous devons ajouter foi à nos Annales, il y a eu des années (**) dont la température a été telle que les pêches, & d'autres arbres ou plantes ſauvages, ont commencé à fleurir dès le 6. 8. ou 12 Décembre, & qu'au milieu de Janvier, les enfans ont porté à l'Egliſe des couronnes de fleurs fraîches. (*.*)

Il eſt aiſé de conjecturer dans quel état les animaux auſſi bien que les plantes ſe ſont alors trouvés, & encore plus que tous les autres, ceux qui annuellement ſont aſſujettis aux grands changemens d'état

(*) C'étoit une hirondelle ordinaire de maiſon, dont on ſçait certainement que l'eſpece appartient aux oiſeaux de paſſage, les connoiſſeurs en fait d'Hiſtoire naturelle en ayant vu, dans leur courſes maritimes, tout à fait hors de l'Europe dans la ſaiſon où elles ne manquent jamais de nous quitter. Cét oiſeau que l'on m'avoit envoyé de Thuringe en Janvier 1733, dans un panier, étoit mouillé, gelé, & avoit de la glace à ſes ailes. Je le réchauffai dans mon poële, il reprit vie, commença à voler; mais il étoit fort foible, & mourut encore le même jour. On l'avoit tiré le matin d'un ruiſſeau près d'un moulin hors de l'Unſtrut. J'ai lieu de croire que c'étoit un oiſeau tardif, qui s'étoit niché, & que l'eau en montant avoit entraîné. Dans un autre tems, je trouvai l'oiſeau qu'on nomme en Allemand *Robrd-amſel*, dans un endroit couvert, auprès d'une ſource jailliſſante. Comme la fable qu'on raconte des hirondelles m'eſt connue, j'ai promis en divers endroits, pendant trois ans de ſuite, un ducat pour la premiere hirondelle, & un florin pour la ſeconde, que les pêcheurs tireroient avec leurs filets de deſſous la glace; mais, malgre ces offres, on ne m'en a point apporté.

(**) 1405. 1427. 1428. 1538.

(*.*) Suivant la Chronique de la Marche, les hyvers de 1567 & 1577 ont été de cette température; & il en a été de même de ceux de 1720. 1723. 1746 & 1747 dans la même Marche.

tat connus qu'ils éprouvent pendant l'hyver. Les arbres & les autres plantes du pays, dont l'état en hyver a une conformité aſſez conſidérable avec les circonſtances qui concernent les animaux ſusdits, fleurirent alors quatre ou cinq mois plutôt que de coûtume; & les oiſeaux de paſſage, ou ne s'en ſont point du tout allés, ou ne ſe ſont gueres écartés, de façon qu'au bout de quinze jours ou trois ſemaines on les a vu reparoître. Ainſi, en pareille occurrence, les animaux ſusdits ont quelquefois été cachés à peine ſix ſemaines, au bout desquelles ils ont quitté leurs retraites d'hyver tout à fait de bonne heure, ſavoir en Décembre, ou tout au moins en Janvier.

J'ai fait moi-même des expériences ſur tout cela en certaines années (*), dans Berlin ou aux environs, pendant les mois d'hyver; la premiere fois, le 6 Décembre 1746; la ſeconde fois, le 20 Janvier 1747; & pour la derniere fois, le 6, le 8 & le 12 Fevrier 1756, j'ai déjà trouvé des crapaux & des grenouilles qui nageoient çà & là ſur les eaux, & dont les ovaires étoient auſſi épais & auſſi gonflés qu'ils ont coûtume de l'être dans le tems du frai. Mais auſſi, au bout de huit ou quinze jours, un petit froid étant ſurvenu, j'ai rencontré pluſieurs de ces animaux morts, dont les ovaires étoient fort gâtés, ou même tout pourris. Les Phyſiciens des Etats du Roi remarquerent pour la plûpart, dans cette même année, des circonſtances preſque ſemblables par rapport à pluſieurs eſpeces de poiſſons. (**)

Ici ſe terminent les obſervations que j'avois raſſemblées ſur deux cas particuliers aux grenouilles, qui avoient été troublées dans l'état d'engourdiſſement où elles paſſent l'hyver. Mais, comme je voulois parvenir à quelque choſe de mieux fondé & de plus certain au ſujet de l'accouplement imprévu des grenouilles dans une ſaiſon tout à fait extra-

(*) 1746. 1747. 1750.

(**) J'ai déjà, dans le tems même, fait rapport de ces circonſtances ſingulieres à quelques uns de Meſſieurs les Membres de la Claſſe de Phyſique de notre Académie Royale, qui ont auſſi fait des expériences plus nombreuſes & plus étendues ſur la température chaude qui régna pendant l'hyver de cette année & ſur ſes ſuites.

traordinaire, auſſi bien que de leur mort arrivée pendant cet état, ou du moins peu après, je réitérai encore au bout de quelque tems des expériences dont je vais encore rendre compte.

J'allai en automne (*) avec un de mes diſciples à qui je donnois des inſtructions ſur quelques eſpeces rares & tardives de champignons, au Parc qui touche Berlin. J'eus occaſion d'y remarquer, par un air aſſez froid, que les grenouilles de diverſes eſpeces & de divers âges, dont la plûpart n'étoient plus que diſperſées une à une & tout à fait foibles, ſe hazardoient de paroître vers l'heure de midi en ſortant des terrains bas où elles s'étoient logées, pour venir prendre la chaleur foible mais encore agréable du Soleil, en ſe plaçant ſur des bords expoſés au grand air. (**) Je raſſemblai environ une ſoixantaine de ces grenouilles, & je les mis d'abord dans une chambre dont la chaleur étoit fort tempérée, placées dans de grands verres, avec de l'eau de pompe que je renouvellois tous les trois ou quatre jours. Environ au bout de dix jours (*,*), de cette multitude de grenouilles il y en avoit deux de médiocre grandeur qui s'étoient accouplées de la même maniere que j'ai décrite ci-deſſus, mais le lendemain matin elles étoient déjà ſéparées. Cependant je les ôtai d'avec les autres, parmi leſ-

(*) Le 23 Octobre 1763.

(**) Il y a apparence que les Grenouilles ne ſe cachent pas entierement, tant qu'elles peuvent ſoutenir le froid, & trouver encore quelque nourriture. Auſſi, quand la ſaiſon eſt tempérée, on en trouve par ci par là, vers la fin de Novembre, tant à la ſurface de la terre qu'à celle de l'eau. Quoiqu'elles s'affoibliſſent de plus en plus, elles ne laiſſent pas de ſe tenir dans une ſituation droite, changeant alternativement la contraction de leur goſier, & ayant de grands yeux vifs tout ouverts. Dans les commencemens, elles ne ſe cachent que la nuit, & ſe remontrent toujours aux heures où l'air eſt encore ſuffiſant pour les échauffer. Peut-être n'eſt-ce qu'avec répugnance qu'elles ſe renferment; & quand la nuit où elles le font eſt ſuivie d'un jour de froid conſiderable & de gelée, cela les met hors d'état de pouvoir reſſortir. Mais, ſi dans le milieu même de l'hyver il ſurvient un tems qui puiſſe rendre à leur corps le degre de chaleur néceſſaire pour le ranimer, elles prennent l'envie de ſortir de leur retraite, & payent pour l'ordinaire cette précipitation de leur vie.

(*,*) Le 3 Novembre, où juſtement je voulois les montrer à quelques amateurs ainſi accouplées.

leſquelles elles étoient trop à l'étroit, & je les mis dans une grande taſſe de verre, qui étoit fort baſſe & découverte, avec un peu de ſable net au fond; j'y joignis encore quelques grenouilles toutes jeunes, & je poſai la taſſe en plein air. (**)

Le quatre Novembre, à neuf heures du ſoir, ces grenouilles s'étoient accouplées pour la ſeconde fois; & le lendemain, à dix heures avant midi, elles étoient encore au même état. Je ſubſtituai alors de l'eau nette à celle qui étoit devenue ſale, (ſur quoi je m'étendrai tout à l'heure davantage) & après avoir fait cela le même jour, j'ôtai la taſſe du grand air, pour la porter dans un poële chaud, & je la montrai à quelques amis, en préſence deſquels la grenouille mâle ſe ſépara par un ſaut de la femelle, à laquelle ce mâle s'étoit accouplé pour la ſeconde fois.

La femelle toute affoiblie alla auſſitôt à fond, & ſe mit dans un état de contraction. Je remis la taſſe avec ces grenouilles dehors à l'air froid, & je remarquai dès le même ſoir que le mâle s'étoit accouplé pour la troiſieme fois avec ſa femelle. Ayant rapporté, le 6 Novembre, à dix heures avant midi, le verre où ces animaux étoient, dans le poële chaud, ils étoient déjà ſéparés, juſqu'à deux heures de l'après-midi qu'ils s'accouplerent pour la quatrieme fois, & je les trouvai encore au même état le ſoir à neuf heures.

Je ne ſçai ſi ces accouplemens ſi fréquemment réitérés ont eu quelque autre cauſe que la chaleur du poële qui ne manquoit jamais d'augmenter la vivacité des grenouilles: à quoi il faut ajoûter que les grenouilles accouplées, (dont j'eus à la fois un plus grand nombre) ſe firent entendre alternativement dans mon poële par un coaſſement élevé le 6 & le 7 de Novembre. On pouvoit en approcher de la lumiere, & les obſerver exactement, ſans que cela les dérangeât. Après

(*) Ces grenouilles n'avoient pas été tirées, comme les premieres, de leur engourdiſſement d'hyver, mais le tems où elles ont coûtume d'y entrer, avoit ſeulement été retardé.

le quatrieme accouplement, les grenouilles dont il a été queſtion juſqu'ici, n'y revinrent plus; mais leurs côtés, tant des mâles que des femelles, devinrent plus épais qu'auparavant, la couleur des premiers étant d'un bleu verdâtre, & celle des autres d'un gris-jaune.

J'ai parlé ci-deſſus du ſoin de renouveller l'eau dans laquelle on met les grenouilles; ce qui étoit néceſſaire parce qu'elles la ſaliſſoient toujours de leurs ordures. Je joignis cette circonſtance à celles que j'ai indiquées en parlant de la grenouille qui a été le premier objet de ce Mémoire, & que j'avois trouvée vivant de rapine dans une ſerre: & je pouvois d'ailleurs ſuffiſamment inférer de la vivacité des grenouilles, qu'elles ne pouvoient pas la conſerver longtems ſans nourriture. J'eſſayai donc ſi je pouvois leur en procurer; & le 7 Novembre, je jettai dans la taſſe une douzaine de mouches eſtropiées. A peine la Grenouille mâle qui s'étoit dégagée du quatrieme accouplement, eut-elle remarqué le mouvement des mouches dans l'eau, qu'elle les hapa de la maniere ordinaire à celles de ſon eſpece quand elles ſont dans l'eau, ou ſur un gazon humide. Pour parvenir d'autant mieux à mon but, je couvris le verre où j'avois encore jetté cinq mouches; & dans moins de quelques minutes il ne reſtoit plus que ces cinq dernieres qui étoient allées à fond. (*)

La nuit du 11 au 12 Novembre, le coaſſement alternatif des grenouilles fut plus fort qu'auparavant, & le matin le premier mâle s'étoit accouplé de nouveau pour la cinquieme fois, après un intervalle de quatre jours de repos. Je ſubſtituai de tems en tems de l'eau nette à l'eau ſale, & je ne laiſſois dans la grande taſſe qu'autant d'eau qu'il en falloit pour que les grenouilles puſſent nager à peine droites. Je remarquai que cela leur plaiſoit fort à cauſe de la chaleur du poële; car elles étoient preſque toujours aſſiſes dans une poſture droite, avec la moi-

(*) On ſait que les grenouilles vivent de proie & ſe nourriſſent de pluſieurs inſectes; mais qu'elles puiſſent ſe rendre maîtreſſes des eſcarbots de bois, d'eau & de terre, qui ont de grandes cornes & de fortes écailles, auſſi bien que d'autres Inſectes de cette vigueur, & les avaler, c'eſt ce qu'auront peine à s'imaginer ceux qui ne ſont pas inſtruits à cet égard par l'expérience.

moitié de la tête hors de l'eau. Leur accouplement alternoit fort ſouvent; & du 3 au 21 Novembre, cela monta en tout à douze fois, la femelle devenant pendant ce tems-là toujours plus pâle & s'affoibliſſant entierement, juſqu'à ce qu'enfin elle mourut le matin ſuivant. Ses côtés étoient devenus fort gros & gonflés.

Comme j'avois pris cette fois-là une quantité conſidérable de grenouilles pour les ſoumettre à mes expériences, j'étois en état d'arriver à la conviction en obſervant pluſieurs d'entr'elles à la fois. D'abord je les avois toutes miſes en ſept verres différens, avec de l'eau de pompe, de l'eau de pluie ou de l'eau de riviere, en mettant du ſable au fond, ou ſans y en mettre. Elles étoient de toutes ſortes d'eſpeces & d'âges, telles qu'on les rencontre dans cette ſaiſon de l'année, mêlées les unes parmi les autres dans les lieux marêcageux; mais il n'y eut que celles de médiocre grandeur qui vouluſſent s'accoupler. Dès que je m'en fus apperçu, je les ſéparai d'avec les autres, & je les mis dans des taſſes de verre, où je pouvois faire ſur elles les mêmes obſervations que j'ai rapportées au ſujet de la premiere. Je ne crois pas qu'il ſoit néceſſaire de répéter les circonſtances que j'ai déjà indiquées en parlant de la premiere paire, puiſqu'elles ſont parfaitement les mêmes. Leur accouplement a été communément juſqu'à 8, 10 ou 12 fois; & j'ai remarqué avec cela que cet accouplement a d'abord duré environ 48 heures, enſuite 24, 12, & à la fin 4 ſeulement, ou même une.

Mais je me trouvai obligé de donner de l'eau fraîche à ces grenouilles tous les trois ou quatre jours, pour les mieux obſerver. Car elles ſaliſſoient fort promtement l'eau par leurs excrémens, de ſorte qu'elle devenoit épaiſſe, trouble, viſqueuſe & puante; il ſembloit qu'elles la gâtaſſent exprès le plutôt qu'il leur étoit poſſible, & qu'elles n'aimaſſent pas l'eau claire. Je m'apperçus cependant que l'eau de quelques verres où étoient les groſſes grenouilles, ne ſe troubloit & ne ſe ſaliſſoit pas auſſitôt que celle des autres. Sa clarté duroit aſſez pour que je n'euſſe beſoin de la renouveller que tous les huit jours. Les grenouilles mouroient les unes après les autres; celles qui s'étoient accou-

couplées, les premieres; les autres ſucceſſivement. Cela commença dès le neuvieme jour. Elles ne durerent pas en tout trois mois complets. (*)

Quant à ce qui regarde l'eau, je mis, comme je l'ai déjà dit, dans quelques verres de l'eau de pluie, mais dans les autres de l'eau de pompe fraîche, telle qu'elle ſort de la pompe. Celle-ci paroiſſoit fort ſenſible aux grenouilles, elles s'inquiétoient & eſſayoient de ſauter hors du verre; ce qu'elles ne faiſoient point avec l'eau tempérée de pluie ou de riviere. A la fin elles ſe mettoient dans une forte contraction, & demeuroient au fond dans une eſpece de leger engourdiſſement, juſqu'à ce que l'eau verſée ſur elles eût été tempérée par la chaleur du poële. Alors elles regagnoient le haut pour reſpirer l'air. Quant aux eſpeces de grenouilles qui ont coûtume de vivre dans l'eau, elles ſe tenoient au commencement volontiers fort au fond, ſurtout à la fin de l'arriere-ſaiſon, tandis que les autres alternoient, ou ſe tenoient même à fleur d'eau auſſi longtems qu'il leur étoit poſſible.

Au ſujet de l'accouplement, j'ai obſervé que les femelles s'y affoibliſſoient au point de tomber au fonds de l'eau, mais que le plus ſouvent, au bout de quelques heures, ou même d'une ſeule, elles retournoient à l'accouplement avec les mêmes mâles. J'eſſayai, lorſqu'il arrivoit que deux grenouilles ſe ſéparoient, de mettre le mâle dans un autre verre, à un air frais, & lui ayant donné la femelle d'un autre de même eſpece, il ſe donna toutes les peines imaginables pour en venir à l'accouplement. Tous ſes efforts pendant 26 heures n'ayant eu aucun ſuccès, je le laiſſai dans le verre avec la même femelle, auprès de laquelle il fut dans une inquiétude perpétuelle, mais j'y mis en même tems

(*) Cela venoit de ce qu'elles manquoient de nourriture, & de ce qu'il leur en faut, parce que leurs mouvemens & les liquides de leurs corps étoient animés & entretenus par la chaleur. Il en eſt autrement, lorſqu'on laiſſe de ſemblables animaux dans leur engourdiſſement, comme on le fait avec les tortues, qu'on place dans des caiſſes remplies de terre dans des endroits frais, lorſqu'elles ceſſent de manger, dès le mois de Septembre; & elles n'en ſortent qu'en Mars, ou au commencement d'Avril, pour chercher de la nourriture.

tems le mâle qu'elle avoit eu auparavant. A peine s'écoula-t-il un quart d'heure que l'accouplement eut lieu; mais cette fois-là il dura à peine une heure.

Cette eſpece d'accouplement qu'on voit dans les grenouilles, & qui conſiſte dans l'acte par lequel le mâle embraſſe étroitement la femelle, eſt aſſez connu; & d'ailleurs il a été diſtinctement décrit dans une Remarque précédente. Il faut pourtant ajoûter que le plus ſouvent il réuſſit fort mal, ou même échoue tout à fait, quand le mâle dans ſon ardeur, n'arrange pas la femelle dans la ſituation qui eſt préciſément requiſe. C'eſt ce dont on peut aiſément ſe convaincre en ſuivant le fil des expériences dont j'ai rendu compte ci-deſſus. Car, quand les grenouilles en ſautant viennent à ſe manquer, ce qui a ſurtout lieu quand une femelle eſt pourſuivie par pluſieurs mâles à la fois, il arrive que le mâle qui s'en empare, au lieu de la ſaiſir ſous les bras, s'attache ſeulement au bas ventre, autour des reins, & la tient pendant quelque tems fort étroitement ſerrée avant qu'elle puiſſe ſe dégager.

Il eſt encore poſſible, comme je l'ai remarqué diverſes fois, que le mâle ne ſaiſiſſe qu'un des reins de la femelle, & même à contre-ſens; ou qu'il n'emploie qu'un bras, l'autre étant ſi fortement contracté qu'il ne peut rien embraſſer.

Quand toutes les circonſtances requiſes pour l'accouplement ſe réuniſſent, telles qu'on les connoit, & que je les ai en partie rapportées, j'ai trouvé dans les femelles les côtés fort épais & gonflés, ſans avoir pu remarquer qu'elles ayent frayé. En général elles devenoient fort foibles, & mouroient bientôt après; peut-être parce que les œufs étoient mis dans un mouvement trop fort & prématuré, avant le tems ordinaire où ils peuvent & doivent être parfaitement développés; & c'eſt ce qui cauſe la mort de ces animaux, parce qu'ils ne peuvent pas ſe débarraſſer de leur frai.

En finiſſant, je dois encore avertir qu'il s'étoit formé ſur les verres expoſés en plein air une croûte épaiſſe de glace, ſous laquelle les grenouilles ſe conſerverent ſans aucun dommage. Dans quelques verres où la glace devint plus épaiſſe, les grenouilles mêmes gelerent au point de n'avoir que la tête de libre. Mais, les ayant fait dégeler doucement, elles reprirent leur vivacité précédente.

Voilà juſqu'où j'ai pû pouſſer ces expériences que je crois n'être pas indignes de l'attention des Naturaliſtes, d'autant plus qu'elles mettent dans un nouveau jour les effets du froid ſur l'irritabilité des corps des animaux.

EXPÉRIENCES

SUR

LE POIDS DU SEL ET LA GRAVITÉ SPÉCIFIQUE

DES SAUMURES FAITES ET ANALYSÉES

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Ayant eu dernierement occaſion de comparer enſemble des ſels tirés de différentes ſalines, je crus devoir m'en prévaloir, pour faire là-deſſus pluſieurs expériences, dont je vais rendre compte à l'Académie dans ce Mémoire.

I. COMPARAISON de la meſure & du poids du Sel.

§. 2. On ſait que la gravité ſpécifique du ſel eſt à celle de l'eau pure comme 2148 à 1000. Si donc le ſel n'étoit qu'une ſeule maſſe, on ſeroit toujours aſſuré, qu'en achetant une meſure, par exemple un pied cube de ſel, ce pied cube peſeroit 2,148, ou environ $2\frac{3}{7}$ fois plus qu'un pied cube d'eau pure.

§. 3. Mais le ſel conſiſtant en de petits cryſtaux & floccons, il s'en faut de beaucoup, qu'un pied cube en peſe deux fois plus qu'un pied cube d'eau pure. Ces petits cryſtaux & floccons ſe couchent l'un ſur l'autre, de façon qu'ils laiſſent entr'eux de très grands interſtices vuides, & par là le poids de toute la meſure diminue conſidérablement. Pluſieurs de ces interſtices ne ſe forment que parce que les cryſtaux & les floccons de ſel ont une couche irréguliere, de ſorte que s'appuyant l'un contre l'autre ils s'empêchent de s'ajuſter de

maniere que ſe touchant face à face ces interſtices ſe rempliſſent du moins en grande partie. On ſait qu'on obtient ce but en ſecouant & trémouſſant le vaſe, & on l'obtient davantage en comprimant le ſel avec force. On comprend auſſi ſans peine, que lorſque la meſure eſt fort haute, le ſel qui eſt au fond de la meſure eſt comprimé par le poids de celui qui eſt deſſus, & que par conſéquent la quantité de ſel n'eſt pas exactement proportionelle à la hauteur de la meſure, à moins qu'on ne le comprime dans toutes également.

§. 4. Il y a cependant encore une autre irrégularité, qui dépend de la différente figure du ſel. La figure du ſel commun doit être cubique. Si donc tous les grains étoient des cubes égaux, il eſt clair qu'ils pourroient s'ajuſter enſemble de façon qu'ils rempliſſent tout l'eſpace, ſans laiſſer d'autre vuide que cet enfoncement pyramidal qui ſe trouve dans chaque cube, & qui ne fait que tout au plus la ſixieme partie de ſon volume.

§. 5. Mais la cryſtalliſation du ſel ne procede pas ſi régulierement. Ces différens cubes s'attachent l'un à l'autre partout où ils ſe touchent, & forment par là des grains d'une figure fort irréguliere. Dans les ſalines, où il eſt queſtion de ménager le bois & de faire beaucoup de ſel en peu de tems, on ne laiſſe pas à la ſaumure le tems requis pour une cryſtalliſation réguliere, mais on ſe contente d'accélérer l'évaporation de l'eau, afin d'en tirer enſuite le ſel, quelque figure que ſes parcelles puiſſent avoir. De là il eſt fort ordinaire de voir que le ſel reſſemble plutôt à des floccons irréguliers qu'à des cryſtaux cubiques de plus d'une ligne d'épaiſſeur. J'ai examiné par le microſcope ces floccons de ſel. Ils ne préſentent qu'une eſpece de ramification qui n'offre preſque rien de cubique.

§. 6. Comme toutes ces irrégularités ne peuvent manquer de produire des différences conſidérables, quand il s'agit de comparer la meſure du ſel avec ſon poids, je me propoſai de déterminer ces différences par des expériences; & les ſels que j'avois à examiner m'en offrirent l'opportunité.

§. 7.

§. 7. Comme il eſt indifférent pour mon but, de quelles ſalines ces ſels ayent été tirés, je déſignerai les ſix eſpeces que j'ai eues par les lettres A, B, C, D, E, F, & je remarquerai à l'égard de toutes, que c'étoient des ſels très purs, & qu'ils ne contenoient que tout au plus une centieme, ou deux-centieme partie de matiere terreſtre ou de terre-mere. Les trois ſels A, B, C, étoient de très beaux cryſtaux, & particulierement dans le ſel C il y en avoit de la groſſeur de deux lignes. Les ſels D, E, ne conſiſtoient qu'en floccons, & le ſel F avoit des grains cubiques, mais qu'on ne voyoit être tels que par le microſcope.

§. 8. Je pris donc un petit vaſe cylindrique, dont la hauteur étoit de 22 lignes & le diametre de 16 lignes, meſure de Paris, & l'ayant rempli d'eau de fontaine, je trouvai qu'il contenoit 856 grains, poids de Berlin. Ainſi une maſſe égale de ſel péſeroit 1839 grains.

§. 9. Ce qui étant fait, je remplis ce vaſe de chacun de mes ſels, d'abord ſans les comprimer, enſuite en les comprimant autant qu'il étoit poſſible, & je trouvai le poids du ſel

	non comprimé	comprimé
A	593 gr.	717.
B	601	745.
C	634	783.
D	463	715.
E	470	696.
F	512	850.

§. 10. On voit par là que les ſels comprimés peſoient preſque également, à l'exception du ſel F, qui peſoit beaucoup plus. Je n'en trouve d'autre raiſon, que celle qui dérive de la régularité de ſes grains. Les ſels B, C, approchoient d'avantage du ſel F, parce qu'il y avoit de fort grands cryſtaux. Car un grand cryſtal peut être regardé comme un aſſemblage de petits grains, ſans interſtices vuides.

§. 11. Cela ſe manifeſte encore par le poids des ſels non comprimés. Les deux ſels D, E, qui n'étoient que des floccons, peſoient le moins. Les ſels A, B, C, ayant de grands cryſtaux, peſoient près d'un tiers davantage, & le ſel F tenoit un milieu. Il peſoit plus que les ſels D, E, parce que ſes grains étoient réguliers, mais il peſoit moins que les ſels A, B, C, parce que ſes grains étoient beaucoup plus petits que ceux de A, B, C.

§. 12. Quoique le ſel F comprimé ait eu le plus de poids, cependant ce poids n'excédoit pas celui de l'eau, de ſorte que les interſtices vuides rempliſſoient encore au delà de la moitié de l'eſpace. Car les 850 grains que ce ſel peſoit, occupent un eſpace de 397 grains d'eau pure, mais le vaſe en contenoit 856.

§. 13. Comme donc, ſuivant ces expériences, le poids d'une même meſure de ſel non comprimé varie depuis 463 juſqu'à 634, ou bien depuis 8 à 11, on voit par là, qu'en achetant le ſel par meſure, on peut croire en acheter 11 livres, tandis qu'on n'en achete que 8, & réciproquement on peut croire n'en vendre que 8 livres, tandis qu'on en vend 11.

§. 14. Si par contre on veut avoir égard à ce que le ſel ſoit bien comprimé, ces mêmes expériences nous font voir, que le poids d'une même meſure peut aller depuis 696 juſqu'à 850, ou bien depuis 9 à 11. Cette différence eſt un peu plus petite que celle des ſels non comprimés; cependant elle ne laiſſe pas d'être encore fort conſidérable, & il eſt aiſé de voir que, ſi on achete le ſel au poids, il ne ſera jamais poſſible que les différens degrés d'humidité produiſent une différence ſi grande. Car dans 9 livres de ſel bien ſec il faudroit mettre 2 livres d'eau. Or ces 2 livres d'eau ayant autant de volume que $4\frac{3}{7}$ livres de ſel, on voit bien que ce mêlange feroit une eſpece de pâte, que perſonne n'achéteroit pour du ſel ſec. Mais, comme dans des vaſes qui ont plus de hauteur, le ſel s'y comprime par ſon propre poids, nous voyons par nos expériences que la différence peut aller depuis

463

463 juſqu'à 850, ou depuis 6 à 11, c'eſt à dire preſque du ſimple au double. Ce qui fait voir, qu'en achetant ou en vendant le ſel par meſure, on peut ſe tromper encore beaucoup plus fortement.

II. EXPÉRIENCES
ſur la gravité ſpécifique des Saumures.

§. 15. Comme la gravité ſpécifique de l'eau augmente à meſure qu'il s'y trouve plus de ſel, on ſe ſert de cette circonſtance dans les ſalines pour voir, ſi une Saumure contient aſſez de ſel pour qu'il vaille la peine & les dépenſes néceſſaires pour l'en tirer par la coction. Ici il ſe préſente différentes queſtions à diſcuter par des expériences. D'abord on peut demander, quel eſt le rapport entre la gravité ſpécifique des ſaumures & le ſel qu'elles contiennent? Ce rapport ſuit-il la regle d'Archimede? Eſt-il le même pour des ſaumures de différentes ſalines? Enfin, quelles ſont les variations que peuvent y cauſer les changemens du froid & du chaud? Les différentes eſpeces de ſel dont je me voyois pourvu, me firent naitre l'idée de faire des expériences rélatives à ces queſtions. Je fis les premieres au mois de Juillet 1765, dans une température de 15 degrés du Thermometre de M. de Réaumur, & je commencerai par les expoſer.

§. 16. Il y a différens moyens de s'aſſurer du rapport entre la gravité ſpécifique d'une ſaumure, ou ſolution de ſel, & le ſel qui s'y trouve. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on peut demander, combien dans une livre de ſaumure il y a d'onces de ſel? On peut pareillement demander, combien il y en a dans une pinte, dans un pot, ou dans telle meſure que l'on voudra? Mais, comme il s'agit toujours de commencer par comparer la gravité ſpécifique de la ſaumure à celle de l'eau douce, il s'agira de parler en cette matiere un langage indépendant des meſures & des poids de chaque pays, & qui par là même puiſſe être entendu & appliqué partout, c'eſt à dire qu'il faudra plutôt s'appliquer à déterminer les rapports, que les meſures & les poids abſolus.

§. 17.

§. 17. Je pris donc une petite phiole avec un col fort étroit, & l'ayant remplie d'eau douce, je trouvai que cette eau pesoit 1128,3 grains. Ce volume & ce poids me tiendront lieu du volume & du poids d'une mesure quelconque.

§. 18. Ensuite je pesai 300 grains de chacun de mes sels, & les ayant mis dans la phiole vuide, j'y versai de l'eau douce, jusqu'à ce qu'elle fut remplie. Je tâchois de faire cela aussi vite qu'il m'étoit possible, afin d'avoir la phiole remplie avant que le sel eût pu commencer à se dissoudre. De cette façon l'eau ne rempliſſoit que l'espace que le sel avoit laissé, & il est clair que le poids de toute la masse devoit surpasser le poids d'un volume égal d'eau douce, autant que ces 300 grains de sel surpassent un volume égal d'eau douce. Mais l'effet me fit voir, que je n'avois pu remplir la phiole assez vite, & que n'osant remuer le sel, il y restoit encore des bulles d'air, qui diminuoient le poids de la masse. Car ces 300 grains étant d'un même volume que 140 grains d'eau douce, il est clair que cet excès auroit du être de 160 grains. Or je trouvai le poids de la masse pour les sels

A	=	1286,2	=	1128,3	+	157,9.
B	=	1283,9	=	- - -	+	155,6.
C	=	1283,9	=	- - -	+	155,6.
D	=	1290,1	=	- - -	+	161,8.
E	=	1287,4	=	- - -	+	159,1.
F	=	1281,4	=	- - -	+	152,1.

Ainsi le sel F, qui donne 152,1, differe le plus de 160. Aussi ce sel ayant de très petits grains, avoit par la même raison de très petits interstices, desquels l'eau ne pouvoit si facilement chasser l'air qui s'y trouvoit. Il n'y avoit donc que les sels D, E, où la diminution du poids causée par les bulles d'air fût compensée par l'augmentation causée par la dissolution des floccons.

§. 19. Voyant donc que le résultat de ces expériences, quoique approchant de la vérité, n'étoit pas tel, que je pûsse en conclure

clure avec aſſez de préciſion la gravité ſpécifique du ſel même, je remuai ces maſſes juſqu'à ce que les ſels furent entierement diſſous. Ce qui étant fait, je trouvai que l'eau avoit conſidérablement baiſſé; je remplis donc la phiole en y verſant de l'eau douce & en la remuant de nouveau; & comme cette eau douce, en ſe mêlant avec la ſolution, en diminua encore le volume de quelques gouttes, je les y verſai de nouveau, & je continuai ſur ce pied juſqu'à ce que je viſſe que la ſolution, quoique je la remuaſſe, ne diminuât plus de volume, mais que la phiole en étoit toute pleine.

§. 20. Ce qui étant fait, je trouvai le poids des ſolutions

A = 1317,3	= 1128,3	+ 189,0.
B = 1317,8	= - - -	+ 189,5.
C = 1315,2	= - - -	+ 186,9.
D = 1316,4	= - - -	+ 188,1.
E = 1315,8	= - - -	+ 187,5.
F = 1316,4	= - - -	+ 188,1.

Quoiqu'il y ait dans ces nombres une différence de $2\frac{1}{2}$ grains, je la regarde comme nulle, puiſqu'elle dérive d'une goutte de plus ou de moins, dont la phiole étoit trop ou trop peu remplie. Ainſi je prendrai comme terme moyen 188 grains. Nous aurons donc les nombres 1128,3; 1316,3 & 300, qui nous fourniſſent la regle que ſi, le poids de l'eau douce étant = 1128,3, celui de la ſaumure eſt 1316,3, le poids du ſel dans cette ſaumure ſera = 300.

§. 21. Si donc la regle d'Archimede avoit lieu, c'eſt à dire, ſi le poids du ſel étoit proportionel à l'excès du poids de la ſaumure ſur celui d'un volume égal d'eau douce, ce rapport ſeroit comme 300 à 188. On n'auroit donc qu'à faire cette ſimple analogie: comme 188 à 300, ainſi l'excès du poids de la ſaumure ſur celui d'un volume égal d'eau douce eſt au poids du ſel contenu dans ce volume de ſaumure.

§. 22. Mais, avant que d'examiner cette regle, il convient de faire une remarque ſur le poids de ces ſolutions. Comme dans chacune il ſe trouve 300 grains de ſel, & que le volume de ces 300 grains eſt le même que celui de 140 grains d'eau, il eſt clair qu'en ſuivant la regle d'Archimede en toute rigueur, le poids de ces ſolutions n'auroit du être que 1128,3 + 300 — 140 = 1288,3 grains. Car, à la place de 140 grains d'eau, Archimede ſubſtitue 300 grains de ſel, comme étant d'un même volume. Otant donc 140 de 1128,3, & ajoutant enſuite 300, on a 1288,3, qui ſeroit le poids de la ſolution. Or les expériences nous donnent ce poids = 1316,3 grains. (§. 20.) Il faut donc qu'une bonne partie du ſel ſe ſoit introduite dans les pores ou interſtices de l'eau, de ſorte que, ſans en augmenter le volume, cette partie ait augmenté le poids de la ſolution.

§. 23. Pour trouver cette quantité de ſel, qui s'eſt inſinuée dans les pores de l'eau, conſidérons que dans les 1316,3 grains, que peſoit la ſolution, il y en avoit 300 de ſels, leſquels étant ſouſtraits de 1316,3, il reſte le poids de l'eau douce = 1016,3 grains. Or le volume entier étoit égal à une maſſe d'eau douce de 1128,3 grains. Donc, ſouſtrayant 1016,3 de 1128,3, il reſte 112 grains, dont le volume d'eau douce dans la ſolution étoit moindre que le volume entier de la ſolution. Il s'enſuit qu'en diſſolvant 300 grains de ſel dans 1016,3 grains d'eau douce, ces 300 grains de ſel augmentent le volume de cette eau douce d'une partie égale à 112 grains d'eau douce. Mais les 300 grains de ſel occupent naturellement un volume égal à celui de 140 grains d'eau douce. Donc, comme 140 eſt à 300, ainſi 112 eſt à 240. Par conſéquent, l'augmentation du volume de la ſolution n'eſt due qu'à 240 grains de ſel, qui ne ſe ſont point introduits dans les pores de l'eau. Il reſte donc 60 grains, qui s'y ſont introduits. Donc, en rapprochant ces concluſions, nous pourrons établir que, ſi dans 1016,3 grains d'eau douce on diſſout 300 grains de ſel, il y en aura 60 qui s'inſinueront dans les pores de l'eau, & les autres 240 en augmenteront le volume.

§. 24.

§. 24. Cet énoncé ſe vérifie aiſément. Car les 240 grains de ſel occupent un eſpace égal à 112 grains d'eau douce, leſquels étant ajoutés à 1016,3 donnent 1016,3 + 112 = 1128,3, qui eſt le volume de la phiole, ou celui de la ſolution.

§. 25. Si donc on ne veut avoir égard qu'à l'augmentation du poids & du volume, ces 300 grains de ſel ne pourront être comptés que pour 112 grains d'eau douce; ainſi, en ſuivant la regle d'Archimede, il faut conſidérer le ſel diſſous comme un corps, dont un volume égal à 112 grains d'eau douce peſe 300 grains.

§. 26. Mais la grande queſtion eſt, s'il en ſera de même pour des ſolutions plus ou moins fortes, que celles dont nous avons tiré cette regle. C'eſt de quoi on a d'autant plus lieu de douter qu'on ſait que dans une certaine quantité d'eau douce on ne ſauroit diſſoudre au delà d'une certaine quantité de ſel, & que par conſéquent le ſel qui dans les ſolutions foibles s'inſinue dans les pores ou interſtices de l'eau douce, ne les dilate pas de façon que ces interſtices en puiſſent admettre toujours davantage.

§. 27. Afin donc d'éclaircir tout cela par des expériences, je remuai de nouveau mes ſolutions & j'en verſai la troiſieme partie, de ſorte qu'il m'en reſtoit les deux tiers, dans leſquels par conſéquent il n'y avoit plus que 200 grains de ſel. Je remplis la phiole d'eau douce, que je remuai bien avec la ſolution, afin d'avoir un volume égal d'une ſolution bien mêlée, qui n'eût plus que 200 grains de ſel.

§. 28. Ce qui étant fait, je trouvai le poids de la ſolution

A = 1259,6	=	1128,3	+ 131,3.
B = 1259,5	=	- - -	+ 131,2.
C = 1258,5	=	- - -	+ 130,2.
D = 1259,1	=	- - -	+ 130,8.
E = 1259,7	=	- - -	+ 131,4.
F = 1259,0	=	- - -	+ 130,7.

Nous pourrons donc prendre pour terme moyen 131 grains, dont le poids de ces ſolutions ſurpaſſoit celui d'un volume égal d'eau douce.

§. 29. Ainſi le poids de la ſolution étant = 1128, 3 + 131 = 1259, 3, j'en ſouſtrais le poids du ſel, qui eſt 200, & il reſte 1059, 3 pour le poids de l'eau douce qui ſe trouvoit dans la ſolution. Or, le volume étant = 1128, 3, j'en ôte celui des 1059, 3 grains d'eau douce, & il reſte 69 gr. pour l'augmentation du volume due aux 200 grains de ſel, qui ſe trouvoient dans ces ſolutions. Or, le volume naturel de 200 grains de ſel étant égal à celui de 93⅓ grains d'eau douce, je dis: comme 93⅓ eſt à 200, ou comme 7 eſt à 15, ainſi ces 69 grains ſont à 147⅁, ou (prenant nombre rond) à 148. Donc, en diſſolvant dans 1059, 3 grains d'eau douce, 200 grains de ſel, 148 grains de ce ſel augmenteront le volume, & 52 grains s'inſinueront entierement dans les pores de l'eau douce ſans en augmenter le volume.

§. 30. Pour comparer ce réſultat avec celui que nous avons tiré des ſolutions précédentes, nous n'aurons qu'à augmenter ces nombres 200, 148, 52 de la moitié, & nous aurons 300, 222, 78, de ſorte que dans ce cas de 300 grains de ſel, 78 s'inſinuent dans les pores, & 222 augmentent le volume de l'eau douce, au lieu que dans les premieres ſolutions, de 300 grains il n'y en avoit que 60 qui s'inſinuoient dans les pores, & 240 qui augmentoient le volume de l'eau douce.

§. 31. Cette comparaiſon des deux ſolutions fait voir que la regle d'Archimede n'y eſt point applicable. Afin donc de trouver comment elle doit être changée, je repris ces dernieres ſolutions, & après en avoir verſé la moitié, je remplis la phiole d'eau douce, pour avoir une ſolution qui n'eût plus que 100 grains de ſel. Ce que je fis avec les précautions priſes pour les ſecondes ſolutions.

§. 32. Or le poids de ces ſolutions fut

A = 1195,4 = 1128,3 + 67,1.
B = 1195,3 = - - - + 67,0.
C = 1194,8 = - - - + 66,5.
D = 1195,4 = - - - + 67,1.
E = 1195,4 = - - - + 67,1.
F = 1195,4 = - - - + 67,1.

D'où il ſuit, que le poids de ces ſolutions ne ſurpaſſoit que de 67 grains celui d'un volume égal d'eau douce.

§. 33. Comme donc le poids de la ſolution étoit = 1128,3 + 67 = 1195,3 gr., & celui du ſel = 100 gr., il s'enſuit que le poids de l'eau douce a été = 1095,3 gr., par conſéquent ſon volume de 1128,3 — 1095,3 = 33 gr. moindre que celui de la ſolution. Je dis donc: comme 7 à 15, ainſi 33 eſt à 70$\frac{1}{7}$. Donc, en diſſolvant dans 1095,3 grains d'eau douce 100 grains de ſel, il y aura 70$\frac{1}{7}$ gr. de ce ſel, qui augmenteront le volume de la ſolution, & les autres 29$\frac{3}{7}$ gr. s'inſinueront dans les interſtices de l'eau ſans augmenter le volume.

§. 34. Pour comparer ce réſultat avec ceux des ſolutions précédentes, nous n'aurons qu'à tripler les nombres 100, 70$\frac{1}{7}$, 29$\frac{3}{7}$, & ils ſe changent en 300, 211$\frac{2}{7}$, 88$\frac{2}{7}$, de ſorte que, dans ce cas, de 300 grains de ſel il y en aura 88$\frac{2}{7}$ qui s'inſinueront dans les interſtices de l'eau, au lieu que, dans les ſecondes ſolutions, il n'y en avoit que 78, & dans les premieres 60.

§. 35. Nous voyons de là que la quantité de ſel qui s'inſinue dans les pores de l'eau n'eſt point proportionelle à celle qui ſe trouve dans les ſolutions, mais que cette proportion diminue à meſure que la ſolution eſt plus forte. Comme dans ces comparaiſons nous avons réduit toutes les ſolutions à 300 grains de ſel, il faudra faire la même réduction à l'égard de l'eau douce, en augmentant de la moitié celle des ſecondes ſolutions, & en triplant celle des troiſiemes, ce qui donne la table ſuivante.

Eau douce.	Sel inſinué dans les pores.	Sel non-inſinué dans les pores.	Somme.
1128,3	60	240	300.
1589,0	78	222	300.
3285,9	$88\frac{2}{7}$	$211\frac{5}{7}$	300.

D'où il paroit que, quoiqu'on diſſolve une quantité égale, c'eſt à dire 300 grains de ſel, dans des maſſes de 1128, 1589 & 3286 grains d'eau douce, la quantité du ſel qui s'inſinue dans les pores n'eſt que de 60, 70, $88\frac{2}{7}$ grains, & que par conſéquent cette quantité croît beaucoup plus lentement que celle de l'eau, & partant auſſi plus lentement que celle du nombre des pores dans leſquels le ſel s'inſinue.

§. 36. Mais, afin de voir plus clair en tout cela, je fis une ſolution des plus fortes, & l'ayant fait cuire ſur le feu, juſqu'à ce qu'elle commençât à produire des cryſtaux, je l'expoſai à l'air pour lui laiſſer prendre le degré de la température de l'air; après quoi j'en remplis la phiole, & j'en trouvai le poids de 1359,1 grains, de ſorte qu'il ſurpaſſoit celui d'un volume égal d'eau douce de 1359,1 — 1128,3 = 230,8 grains. Enſuite, j'en tirai le ſel par une coction fort lente, & l'ayant bien ſéché, il ſe trouva être de 379,5 grains.

§. 37. Ayant donc de cette façon une ſolution abſolue, qui contenoit tout le ſel qu'elle pouvoit contenir, je fis là-deſſus le même calcul que j'avois fait ſur les ſolutions précédentes. D'abord, ſoustrayant du poids de la ſolution 1359,1 celui du ſel 379,5, je trouvai celui de l'eau douce = 979,6; d'où je conclus que, ſi dans la température du 15 degré du thermometre de M. de Réaumur on mêle 979,6 grains d'eau douce avec 379,5 gr. de ſel, on obtient une ſolution complette ou ſaturée. Or ces nombres ſont à très peu près comme 80 à 31, ou comme 5 à 2, de ſorte que la plus forte ſolution contiendra 5 grains d'eau douce contre 2 grains de ſel.

§. 38. Mais le volume de l'eau douce 979,6 étant plus petit que celui de la ſolution 1128,3 de la quantité 1128,3 — 979,6 =

148,

148,7; cet eſpace eſt rempli de ſel. Faiſant donc: comme 7 à 15, ainſi 148,7 eſt à $317\frac{3}{7}$, on trouve, que des $379\frac{1}{2}$ gr. de ſel qui ſe trouvent dans 979,6 gr. d'eau douce, il y en a $317\frac{3}{7}$ qui en augmentent le volume, & les autres $62\frac{2}{7}$ gr. s'inſinuent dans les pores ou interſtices de l'eau.

§. 39. Comme cette ſolution eſt complette, il s'enſuit, que l'eau échauffée juſqu'au 15 degré du thermometre de M. de Réaumur, n'en ſauroit contenir d'avantage. J'en infere donc que, dans cette température, $979\frac{1}{2}$ grains d'eau douce peuvent contenir dans les interſtices de cette eau $62\frac{2}{7}$ gr. de ſel, mais que, pour faire qu'elles les contiennent, il y faut joindre encore $317\frac{3}{7}$ autres grains de ſel. Cette derniere reſtriction eſt néceſſaire, parce que ſi on ne vouloit diſſoudre que les $62\frac{2}{7}$ grains de ſel, il n'y en auroit qu'à peine 15 ou 20 grains qui s'inféreroient dans les pores de l'eau. Car les expériences précédentes nous font voir que, quelque foible que ſoit la ſolution, il n'y a jamais que le tiers ou le quart du ſel, qui s'inſinue dans les pores de l'eau.

§. 40. Cette circonſtance fait, qu'on ne peut pas conſidérer le ſel comme diſſoluble à l'infini. Car, ſi on pouvoit admettre cette ſuppoſition, il s'enſuivroit que, dans les ſolutions moins fortes, tout le ſel s'introduiroit dans les interſtices de l'eau; ce dont les expériences précédentes nous montrent tout le contraire, puiſqu'elles nous font voir, que non ſeulement le ſel ne s'y introduit pas entierement, mais auſſi, que la quantité qui s'y introduit, n'eſt proportionelle, ni au nombre des pores ou à la quantité de l'eau douce, ni à la quantité du ſel qui s'y trouve.

§. 41. Si donc dans $979\frac{1}{2}$ grains d'eau douce il faut diſſoudre $379\frac{1}{2}$ grains de ſel, pour que $62\frac{2}{7}$ gr. en rempliſſent les interſtices, il paroit que le ſurplus, qui eſt de $316\frac{3}{7}$ gr., eſt employé pour dilater les interſtices de l'eau, afin qu'ils puiſſent contenir les $62\frac{2}{7}$ gr. de ſel. En effet, ces $316\frac{3}{7}$ grains de ſel ne font qu'augmenter le volume

lume de la ſolution; & comme ils s'y trouvent parſemés & ſoutenus par les forces de la cohéſion de l'eau, il eſt évident qu'ils en ſéparent les particules, & que par là ils dilatent les interſtices de l'eau. Il paroit de là qu'il doit y avoir un certain rapport entre la figure & la groſſeur des parcelles élémentaires du ſel, & la figure & la grandeur des interſtices de l'eau douce. Mais ces expériences n'offrent pas aſſez de données pour déterminer ce rapport, puiſqu'il dépend tout au moins de quatre circonſtances, je veux dire, de la figure & de la grandeur des parcelles ſalines, auſſi bien que de la figure & de la grandeur des interſtices de l'eau douce.

§. 42. Comme chaque ſolution a quelque choſe de particulier, il convient de rechercher, de quelle façon ces différens rapports peuvent être rapprochés & préſentés d'une façon qui les embraſſe généralement. Pour cet effet, nous n'aurons qu'à chercher le rapport entre la quantité de ſel, qui ſe trouve dans les ſolutions & le nombre de grains, dont le poids de la ſolution ſurpaſſe celui d'un même volume d'eau. En conſultant là-deſſus nos expériences, elles nous donnent les réſultats ſuivans.

Poids du ſel		Poids de la ſolution		
0	- - -	1128,3	+	0.
100	- - -	1128,3	+	67.
200	- - -	1128,3	+	131.
300	- - -	1128,3	+	188.
380	- - -	1128,3	+	231.
x	- - -	1128,3	+	y.

Planche I. J'ai repréſenté ces nombres dans la quatrieme figure, où l'on voit, que la courbe qui paſſe par les points des ordonnées eſt fort uniforme, & que ſa courbure n'eſt que de quelques degrés. Comme donc nous avons quatre valeurs de x & de y, nous n'aurions qu'à appliquer à ces nombres les quatre premiers termes d'une ſuite

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$$

afin

afin de déterminer les coëfficiens a, b, c, d. Mais j'ai trouvé qu'on peut très bien ſe contenter des deux premiers termes, en faiſant

$$y = 0{,}6963\ x - \frac{xx}{4198}.$$

Ainſi, par exemple, on trouvera pour

$x = 100$	$y = 67{,}3$
$= 200$	$= 130{,}0$
$= 300$	$= 188{,}0$
$= 380$	$= 231{,}0.$

Et pour $x = 380$, on trouve la poſition de la tangente CT, $dy : dx = 0{,}5195$.

§. 43. Cette tangente ſe trouve encore d'une autre maniere. Comme elle répond au point de la ſolution complette, & que l'équation trouvée la donne moyennant les ſolutions moins fortes, nous pourrons encore la déterminer au moyen des ſolutions qui ſont, pour ainſi dire, plus que complettes, c'eſt à dire, dans leſquelles il y a plus de ſel, que l'eau douce ne peut diſſoudre.

§. 44. Soit donc la quantité entiere de ſel $= a$, la partie diſſoute $= \xi$, il reſtera $a - \xi$ grains, qui n'ayant point été diſſous tombent au fond de la phiole, & ne font qu'augmenter le volume. Or, pour trouver le poids d'une ſolution complette qui contienne ξ grains de ſel, la derniere expérience nous fait voir que pour 380 gr. la ſolution peſe 1359 grains. Donc, pour ξ grains, elle peſera $= \frac{1359}{380}\xi$ grains. Ce poids doit encore être augmenté des $a - \xi$ grains de ſel, qui n'ont point été diſſous; donc tout le poids ſera $= a - \xi + \frac{1359}{380}\xi = z$.

§. 45. Maintenant, pour trouver le volume, nous aurons d'abord $\frac{7}{15}(a - \xi)$ pour celui du ſel non-diſſous; enſuite, la derniere expérience nous fait voir que 380 gr. de ſel demandent un volume de 1128, 3 gr., & partant le volume requis pour ξ grains, ſera

$= \frac{1128,3}{380} \cdot \xi$; donc le volume entier $= \frac{7}{75}(a - \xi) + \frac{1128,3}{380}\xi$, qui doit être égal à celui de la phiole $= 1128,3$. En réſolvant donc cette équation, on trouve

$$\xi = 450,9 - 0,1865\ a.$$

Or, comme a doit être plus grand que 380, puiſque la ſolution eſt plus que complette, en faiſant $a = 380 + b$, on trouve

$$\xi = 380 - 0,1865 \cdot b,$$

& partant le poids entier

$$s = 1359,1 + 0,5195 \cdot b.$$

Or 1359,1 eſt le poids de la ſolution complette; donc la ſolution qui aura b grains de ſel de plus, aura $0,5195 \cdot b$ grains de plus de poids. Donc il ſera $dy : dx = 0,5195$, comme ci-deſſus. (§. 42.)

§. 46. Cette derniere équation nous fait voir que la courbe, dont les abſciſſes ſont x, les ordonnées y, finit là où x eſt $= 380$, & que depuis ce point elle ſuit la direction de ſa tangente, de ſorte que, dès que la ſolution contient plus de ſel qu'elle n'en a pu réſoudre, le ſurplus de ſon poids eſt proportionel au ſurplus du ſel. L'équation trouvée

$$y = 0,6963\ x - \frac{xx}{4298},$$

nous fait voir, qu'il n'en eſt pas de même pour les ſolutions moins fortes. Mais voyons maintenant les différens uſages que nous pourrons faire de cette équation.

§. 47. D'abord, comme cette équation ſe rapporte à une ſolution dont le volume eſt égal à celui de 1128,3 grains d'eau douce, nous la changerons en une autre, qui réponde à une ſolution dont le volume ſoit égal à un volume d'eau douce de 1000 grains; ce qui ſe fera en multipliant le dernier terme $xx : 4298$ par 1,1283. La nouvelle équation ſera donc

$y =$

$$y = 0{,}6963\ x - \frac{xx}{3810}.$$

Et le poids de la ſolution ſera

$$z = 1000 + 0{,}6963\ .\ x - \frac{xx}{3810}.$$

Cette équation nous fournit la table ſuivante.

Poids du ſel x	Poids de la ſolution z	Poids du ſel x	Poids de la ſolution z	Poids du ſel x	Poids de la ſolution z
0	1000	120	1080	240	1152
10	1007	130	1086	250	1158
20	1014	140	1093	260	1163
30	1021	150	1099	270	1169
40	1027	160	1105	280	1175
50	1034	170	1111	290	1180
60	1041	180	1117	300	1185
70	1047	190	1123	310	1191
80	1054	200	1129	320	1196
90	1060	210	1135	330	1201
100	1067	220	1141	336,8	1204,7
110	1073	230	1146	——	——

§. 48. Le premier uſage qu'on pourra faire de cette table, ſera de déterminer, combien il y a de ſel dans une ſaumure propoſée quelconque. On prendra pour cet effet une meſure quelconque, p. ex. une pinte, un pot, un pied cube &c.; on la remplira de la ſaumure & on en trouvera le poids. Enſuite, on remplira la même meſure d'eau douce afin d'en trouver le poids. Ce qui étant fait, tout le calcul qu'il y aura à faire, reviendra à deux regles de trois. On dira d'abord: comme le poids de l'eau douce eſt à celui de la ſaumure, ainſi eſt 1000 à un quatrieme nombre z, que l'on trouvera en achevant cet-

te regle de trois. On cherchera ce nombre dans la ſeconde colonne de la table que nous venons de donner, & on trouvera dans la premiere colonne le nombre correſpondant x, en ſe ſervant en tout cas de la partie proportionelle, lorſque le nombre trouvé z tombe entre deux nombres de la ſeconde colonne de la table. Enſuite on dira: comme le nombre z eſt au nombre x, ainſi eſt le poids donné de la ſaumure au poids du ſel qui s'y trouve.

§. 49. Suppoſons p. ex. qu'un pied cube d'eau douce peſe 63 livres, & que le même pied cube de ſaumure peſe 74 livres. On inférera d'abord: comme 63 eſt à 74, ainſi 1000 eſt à 1175. Cherchant donc ce nombre dans la ſeconde colonne, on trouvera le nombre correſpondant 280. On dira donc: comme 1175 eſt à 74, ou bien, comme 1000 eſt à 63, ainſi 280 eſt à $17\frac{2}{3}$. Donc le pied cube de cette ſaumure contiendra $17\frac{2}{3}$ livres de ſel.

§. 50. Enſuite, nous pourrons nous ſervir de cette Table pour faire une ſolution d'une gravité ſpécifique donnée, à condition cependant qu'elle ſoit plus petite que celle de la ſolution abſolue ou complette. Pour cet effet, on poſera la gravité ſpécifique de l'eau douce $=$ 1000, & on déterminera par ces mêmes unités la gravité ſpécifique de la ſolution. Ce qui étant fait, on cherchera ce nombre dans la colonne z, & on trouvera le nombre correſpondant x dans la colonne x. Or, comme z marque le poids de la ſolution, & x celui du ſel qui s'y trouve, on ſouſtraira le nombre x du nombre z, & le reſte marquera le poids de l'eau douce qui ſe trouve dans la ſolution. Soit p. ex. la gravité ſpécifique de la ſolution propoſée $=$ 1100 $= z$. On trouvera le nombre correſpondant $x = 152$, d'où l'on obtient $z - x = 948$, de ſorte que pour faire cette ſolution il faut mêler 152 grains de ſel avec 948 grains d'eau douce.

§. 51. Quand on a une ſaumure foible, & qu'on veut ſavoir combien il faut en faire évaporer juſqu'à ce qu'elle commence à produire des cryſtaux, on peut également ſe ſervir de cette table. On cher-

cherchera d'abord la gravité ſpécifique de la ſolution, celle de l'eau douce étant poſée = 1000. On cherchera enſuite ce nombre dans la colonne z, & on trouvera dans la colonne x le poids du ſel qui s'y trouve. Or, puiſque la ſolution complette peſant 1204,7 gr. il s'y trouve 336,8 gr. de ſel, on dira: comme 336,8 eſt à 1204,7, ainſi eſt x à $\frac{1204,7}{336,8}x$, qui marque le poids auquel le poids z doit être réduit par l'évaporation; il faudra donc en faire évaporer $z - \frac{1204,7}{336,8}x$ gr.

§. 52. Suppoſons p. ex. la gravité ſpécifique de la ſolution propoſée $z = 1100$; il s'y trouvera donc $x = 152$ gr. de ſel. Donc il ſera

$$\frac{1204,7}{336,8}x = 543.$$

$$z - 543 = 557. \text{ gr.},$$

de ſorte que de 1100 gr. de la ſolution propoſée il faut en faire évaporer 557, ce qui fait environ la moitié.

§. 53. Si par contre on veut déterminer la diminution du volume de la ſolution, on n'aura qu'à remarquer que le volume d'une ſolution complette eſt 1000, lorſqu'il s'y trouve 336, 8 gr. de ſel; car les poids de la colonne z ſont tous réduits à ce volume. On dira donc: comme 336,8 eſt à 1000, ainſi eſt le poids trouvé $x = 152$ à 451. Donc, ſi le volume de la ſolution propoſée eſt compté être = 1000, il doit ſe réduire par l'évaporation à 451, ſi on veut la changer en une ſolution complette. Il faudra donc en faire évaporer $1000 - 451 = 549$ parties. On voit par là, que le volume diminue plus fortement que le poids.

§. 54. Si on achete le ſel au poids, & qu'il ſoit fort humide; trouver combien il y a d'humidité, & combien par conſé-

quent on achete moins de ſel, que s'il étoit bien ſec. Notre table nous fournit encore la ſolution de ce probleme, & même en autant de manieres différentes qu'elle contient de nombres. Nous nous attacherons au cas où 300 grains de ſel ſec donnent une ſolution dont le poids eſt 1185 grains, le volume étant égal à celui de 1000 gr. d'eau douce. Prenez donc 300 grains de votre ſel humide; en y verſant 885 gr. d'eau douce, vous aurez une ſolution dont le poids ſera de 1185 grains, & dont le volume ſeroit égal à celui de 1000 grains d'eau douce, ſi le ſel étoit bien ſec, mais qui ſera plus grand, puiſque l'humidité occupe plus d'eſpace que le ſel. Afin donc de trouver la différence, prenez une petite phiole dont le col ſoit fort étroit, & la rempliſſant également d'abord de l'eau douce, enſuite de votre ſolution bien remuée, vous chercherez le poids de l'une & de l'autre. Vous direz enſuite: comme le poids de l'eau douce eſt à celui de la ſolution, ainſi eſt 1000 à un quatrieme nombre z, lequel étant trouvé, vous verrez de combien il eſt plus petit que 1185, que vous auriez trouvé ſi votre ſel avoit été bien ſec. Suppoſons p. ex. que vous n'ayez trouvé que 1180; cherchant donc ce nombre dans la colonne z, vous trouverez à côté le nombre $x = 290$. Mais, comme votre ſolution en tout peſoit 1185, vous direz: comme 1180 eſt à 1185, ainſi eſt 290 à $291\frac{1}{4}$. Ce qui vous fera voir que, tandis qu'on vous peſe 300 grains de votre ſel humide, il ne s'y trouve réellement que $291\frac{1}{4}$ gr. de ſel, & qu'il y a $8\frac{3}{4}$ gr. d'humidité, qui s'évaporeront dès que vous vous mettrez à ſécher votre ſel. Si donc on vouloit prendre la choſe à toute rigueur, il eſt clair que dans cet exemple il faudroit diminuer le prix du ſel dans le rapport de 300 à $291\frac{1}{4}$, ce qui feroit près de 3 pour cent, ou bien il faudroit donner un ſurplus de poids dans le rapport de $291\frac{1}{4}$ à 300. Il y a des cas où l'humidité eſt encore plus conſidérable.

III. RE-

III. REMARQUES
ſur les différentes manieres d'eſtimer la bonté des ſaumures.

§. 55. Quand on parle de la bonté des ſaumures, le diſcours roule principalement ſur la quantité de ſel qui s'y trouve, & il eſt clair que la différence du langage qu'on peut tenir là-deſſus dépend des différentes manieres d'eſtimer cette quantité du ſel. Il y a des ſalines, où on met pour baſe la ſolution complette. On diviſe le degré abſolu de ſalure en 32 degrés, de ſorte qu'une ſaumure du 16me degré ne contient que la moitié du ſel de la ſaumure complette. Cette façon de déterminer les degrés de ſalure me paroit fort indéciſe, en ce qu'il faut encore déterminer, ſi la ſaumure, le ſel qui s'y trouve, & l'eau douce qu'elle contient, doit être meſurée ou peſée, & laquelle de ces trois quantités y eſt miſe pour baſe. Mais, quoiqu'il y ait moyen de s'entendre là-deſſus, il reſte une autre difficulté, qui ne ſe leve pas ſi facilement, c'eſt que ce qu'on appelle ſaumure complette eſt fort ſujet à variation. On ſait que l'eau qui eſt prête à geler ne diſſout preſque plus de ſel, & que l'eau bouillante en diſſout la plus grande quantité. Une ſaumure qui ſe refroidit, dépoſe une partie de ſon ſel; & cette quantité eſt plus grande que celle de l'eau qui s'évapore par le refroidiſſement. Comme donc par là la ſaumure s'affoiblit, il eſt clair que le degré de ſalure d'une ſolution complette dépend de ſa chaleur, & que par conſéquent on ne ſauroit le fixer à moins qu'on n'établiſſe un certain degré de chaleur, ce qui étant trop incommode, il vaudra mieux abandonner cette façon de déſigner les degrés de ſalure.

§. 56. Quant aux autres manieres dont on ſe ſert, il ſera plus ſûr & plus convenable d'eſtimer le ſel par ſon poids, que de le meſurer, puiſque la meſure du ſel eſt trop variable, & qu'une même meſure en contient plus ou moins, ſuivant que le ſel a des cryſtaux réguliers ou des floccons irréguliers. Par contre le ſel étant bien ſec, un même poids de ſel nous en donne toujours la même quantité, dès qu'il eſt également épuré des matieres terreſtres.

§. 57.

§. 57. La ſaumure peut être peſée ou meſurée indifféremment. Mais, quand on dit qu'une livre d'une ſaumure contient deux fois plus de ſel qu'une livre d'une autre ſaumure, ce langage n'eſt pas le même que quand on dit, qu'une meſure de ſaumure contient deux fois plus de ſel, qu'une même meſure d'une autre ſaumure. La table que nous avons donnée ci-deſſus, ſe rapporte à des volumes égaux à celui de 1000 grains d'eau douce. Prenons en conſéquence deux ſaumures, dont l'une ait 150 gr., l'autre 300 gr. de ſel. La table nous montre que le poids de la premiere ſera 1099, celui de l'autre = 1185. Ainſi, quoique la meſure ſoit la même, les poids different comme 1099 de 1185. Si donc on veut réduire ce dernier poids au premier, il faudra également diminuer les 300 gr. dans le rapport de 1185 à 1099, ce qui ne donneroit que $278\frac{1}{4}$: ainſi la quantité de ſel ne ſeroit plus que comme 150 à $278\frac{1}{4}$.

§. 58. Comme donc ces deux langages different réellement, on ne ſauroit les ſubſtituer l'un à l'autre, ſans faire une réduction ſemblable à celle que je viens de faire; & cette réduction eſt d'autant plus néceſſaire, que dans l'évaporation le volume de la ſaumure diminue plus fortement que ſon poids, & que les fraix & le tems néceſſaires ſe comptent mieux d'après la diminution du volume, que d'après celle du poids.

§. 59. Si donc on eſtime la quantité de ſaumure par la meſure, & celle du ſel par ſon poids, on n'aura qu'à déterminer une fois pour toutes, de quelle meſure & de quel poids on veut faire uſage, & la table donnée ci-deſſus y pourra être accommodée ſans peine. Pour cet effet, on remplira la meſure d'eau douce, & après avoir peſé cette eau, on diviſera ce poids en 1000 parties. Ce qui étant fait, chacune de ces parties vaudra une unité des nombres que la table préſente.

§. 60. Suppoſons p. ex. que la meſure ſoit une pinte, qui puiſſe contenir 30 onces d'eau douce. On dira: comme 1000 eſt à

30,

30, ainſi eſt chaque nombre de la table à un quatrieme nombre, que l'on trouvera, & qui étant ſubſtitué au nombre de la table, transforme cette table en une autre, qui ſera directement applicable à la meſure & au poids dont on ſe ſert. Ainſi p. ex. au lieu de $x = 200$ & $z = 1129$, on trouvera $x = 3$ & $z = 33\frac{87}{100}$; ce qui veut dire, qu'une pinte de ſaumure peſant $33\frac{87}{100}$ onces, il s'y trouve 3 onces de ſel.

§. 61. La maniere de déterminer ou de déſigner la bonté de la ſaumure par le poids du ſel contenu dans un certain poids de ſaumure, par ex. dans une livre, n'eſt pas ſi commode. Car il faut toujours commencer par le volume, afin de trouver combien la gravité ſpécifique de la ſaumure ſurpaſſe celle de l'eau douce, puiſque c'eſt par là qu'on trouve le poids du ſel contenu dans ce volume, & ce n'eſt qu'après avoir fait cela, qu'on peut comparer le poids de la ſaumure avec le poids du ſel qui s'y trouve.

§. 62. Mais, ſi avec tout cela on veut ſe ſervir de la comparaiſon de ces poids, la table que nous avons donnée ci-deſſus, y ſervira pareillement. Car, quoiqu'elle ſe rapporte à un même volume, on pourra toujours faire l'analogie: comme chaque nombre z eſt à ſon nombre correſpondant x, ainſi eſt une livre de ſaumure à un quatrieme nombre qui marquera le poids du ſel contenu dans cette livre de ſaumure.

IV. REMARQUES

ſur les Inſtrumens dont on ſe ſert pour trouver la bonté des Saumures.

§. 63. Après tout ce que je viens de dire, il ne ſera pas difficile de déterminer la diviſion des inſtrumens dont on ſe ſert pour trouver la bonté des ſaumures & de les accommoder à ce but. On ſait que ces inſtrumens ſont les mêmes que ceux qu'on emploie pour déterminer la gravité ſpécifique des matieres liquides. Il ſuffira donc de les conſtruire & de les graduer en ſorte que la gravité de l'eau

douce ſoit comptée = 1000, & qu'on puiſſe encore s'en ſervir pour les ſaumures les plus fortes. Ce qui étant fait, ils indiqueront la gravité des ſaumures en des nombres qui ſeront les mêmes que ceux de la colonne z de notre table; & on trouvera le nombre répondant x, qui marquera le poids du ſel qui ſe trouve dans un volume égal à celui de 1000 grains d'eau douce.

§. 64. Mais, ſi on veut accommoder ces inſtrumens à une certaine meſure, de ſorte qu'ils indiquent immédiatement le poids abſolu du ſel que cette meſure de ſaumure contient, on fera d'abord la réduction de la table que j'ai indiquée ci-deſſus, (§. 59. 60.) & au lieu des nombres z, que l'inſtrument marque dans le cas du §. 63. on mettra le nombre x réduit, & de cette façon l'inſtrument l'indiquera immédiatement.

§. 65. Cependant on ne ſauroit diſconvenir que preſque tous ces inſtrumens n'ayent quelque défaut d'exactitude plus ou moins conſidérable. Mais, dès qu'il ne s'agit que de ſavoir à très peu près combien une ſaumure contient de ſel, on pourra aſſez exactement les accommoder à ce but. Celui qu'on peut ſe procurer le plus aiſément, & qui peut-être eſt auſſi le plus exact, c'eſt une phiole qui ait un col fort étroit. Comme je m'en ſuis ſervi pour les expériences rapportées ci-deſſus, il n'en faudra pas d'avantage pour en connoître l'uſage.

§. 66. Le plus ordinaire de ces inſtrumens, c'eſt un cylindre étroit, qui a, à l'un de ſes bouts, une boule remplie de quelques poids, & qui étant plongé dans la ſaumure, s'y enfonce d'autant moins, que la ſaumure ſera plus peſante ſpécifiquement. Comme la ſaumure la plus ſalée n'eſt à l'eau douce qu'en raiſon de 5 à 6, il s'enſuit que le poids de cet inſtrument étant tant ſoit peu plus grand que celui d'un volume égal d'eau douce, le volume du cylindre doit être un peu plus grand que la cinquieme partie de tout le volume de l'inſtrument, de ſorte qu'en obſervant ces deux conditions, on pourra faire le cylindre de telle longueur que l'on jugera convenable, tant pour la commodité que pour avoir une graduation qui ne ſoit pas trop ſerrée. Mais il ſera

tou-

toujours néceſſaire de faire que le cylindre ſoit aſſez léger pour que le centre de gravité de l'inſtrument ne ſoit jamais au deſſus de la ſurface de la ſaumure, puiſque ſans cela l'inſtrument, au lieu de ſe tenir dans une ſituation verticale, ſe renverſeroit. On obvie à cet inconvénient, ſoit en prolongeant le cylindre, ſoit en joignant à la grande boule une plus petite, qui ſoit remplie des poids dont l'inſtrument doit être chargé pour le mettre en équilibre avec l'eau douce.

§. 67. Comme la plûpart de ces inſtrumens ſont diviſés, ſoit arbitrairement, ſoit en degrés égaux, & que pour les bien graduer il faudroit en meſurer exactement le volume, ce qui n'eſt pas toujours ſi facile à faire, il ne ſera pas hors de propos d'entrer là deſſus en quelque détail. Soit donc cet inſtrument AB, que je ſuppoſe fait conformément aux conditions que je viens de dire. Peſez-le exactement, & notez la ſixieme partie de ſon poids. Ce qui étant fait, plongez-le dans l'eau douce. Soit A le point où il s'enfonce. Suſpendez-le enſuite au baſſin d'une balance, & mettez dans l'autre baſſin cette ſixieme partie du poids que vous avez notée. Plongez-le de cette façon dans la même eau douce, pour trouver juſqu'à quel point il s'enfonce. Soit ce point B. Voici maintenant l'uſage qu'il faudra faire des deux points A, B, que vous avez trouvés. Planche I. Fig. 1.

§. 68. D'abord je remarque, que le volume AB enfoncé librement dans l'eau douce eſt égal à un volume de cette eau, qui eſt du même poids que l'inſtrument. Et de la même maniere, le volume BC eſt égal à celui d'une maſſe d'eau douce qui peſe les $\frac{5}{6}$ du poids de l'inſtrument. Donc le volume de la partie AC du cylindre eſt égal à celui d'une maſſe d'eau douce, qui peſe un $\frac{1}{6}$ du poids de l'inſtrument. Ainſi le volume BA eſt égal à celui de 6 cylindres AC, & partant les volumes AB, CB, ſeront comme 6 à 5. Suppoſons donc qu'il y ait une ſaumure dans laquelle l'inſtrument ne s'enfonce que juſqu'au point B, je dis que la gravité ſpécifique de cette ſaumure ſera à celle de l'eau douce comme 6 à 5, c'eſt à dire en raiſon réciproque des eſpaces. Car la maſſe BC de la ſaumure peſe autant que la maſſe BA

de l'eau douce, puiſque chacune eſt du même poids que l'inſtrument. Si donc en A on marque la gravité ſpécifique de l'eau douce = 1000, on marquera en C le nombre $\frac{6}{5}$. 1000 = 1200, comme déſignant la gravité ſpécifique de la ſaumure.

§. 69. Ces deux points étant donc déſignés, nous trouverons les points répondants à une ſolution ou ſaumure quelconque. Car leurs gravités ſpécifiques étant réciproquement comme les eſpaces, on comptera l'eſpace BC = 5, BA = 6, AC = 1, & on diviſera AC en parties décimales, qui ſe compteront de C vers A. Si donc on veut trouver le point répondant à la ſaumure, dont la gravité ſpécifique eſt = 1100, on dira: comme 1100 eſt à 1200, ainſi eſt 5 à 5,454 . . . Portant donc 0,454 . . . parties de C en M, on trouvera le point M, où l'on écrira 1100, comme étant la gravité ſpécifique de la ſaumure propoſée.

§. 70. En procédant de cette façon, l'inſtrument marquera les nombres z de notre table, & on pourra également y marquer les nombres répondans x, auſſi bien tels qu'ils ſe trouvent dans la table, que lorſqu'on les aura réduits à quelque meſure & poids abſolus en ſuivant les regles des §. 59. 60. Du reſte on ſuppoſe que la partie CA ſoit exactement cylindrique. Car, ſi le diametre n'étoit pas partout le même, il vaudroit mieux déterminer tous les points M méchaniquement; ce qui ſe feroit de la même maniere que nous avons trouvé le point C. Je n'ai pas beſoin d'avertir que la partie CA peut avoir une figure parallélépipede quelconque, parce qu'il ſuffit qu'elle ſoit partout d'une même épaiſſeur.

Fig. 2. §. 71. Dans quelques ſalines on donne à cet inſtrument une figure conique BA, apparemment parce que les ouvriers, qui les font de léton ou de fer blanc, font plus facilement un cone qu'ils ne font un cylindre exact, ou des figures partie cylindriques partie ſphériques. Ces cones ſont ordinairement faits de façon, que dans l'eau douce ils s'enfoncent juſqu'à la pointe A. Mais, ſi la façon en eſt facile, il n'en eſt pas de même de la graduation; à moins qu'on ne veuille la faire mé-

méchaniquement. Voyons cependant de quelle maniere on pourra s'y prendre.

§. 72. D'abord on peſera l'inſtrument, & on notera la ſixieme partie de ſon poids. Enſuite on le plongera dans l'eau douce. Suppoſons qu'il s'y enfonce juſqu'au point C. Suſpendez-le enſuite au baſſin d'une balance, & en mettant dans l'autre baſſin la ſixieme partie de ſon poids que vous avez notée, plongez-le dans la même eau douce, pour trouver juſqu'à quel point il s'y enfoncera. Soit ce point D. Comme ce procédé eſt le même que le précédent, (§. 67.) il eſt clair que le point C répondra à la gravité ſpécifique = 1000, & le point D à celle qui eſt = 1200. Le volume BD étant poſé = 5, le volume BC ſera = 6; donc le volume du cone tronqué CD ſera = 1. Comme les volumes AC, AD, ſont en raiſon des cubes de AC, AD, le volume du cone tronqué ſera en raiſon de la différence des cubes de AD, AC.

§. 73. Soit donc M un point intermédiaire quelconque, le volume du cone tronqué MD ſera pareillement en raiſon de la différence des cubes de AD, AM. Diviſant donc cette différence par la différence des cubes de AD, AC, on trouvera les parties décimales qui répondent au volume du cone tronqué MD, & ajoutant enſuite ces parties décimales au volume BD = 5, on aura le volume BM. Or, les gravités ſpécifiques étant réciproquement comme les volumes, on dira: comme le volume BM eſt au volume BD = 5, ainſi eſt 1200 à la gravité ſpécifique qui répond au point M.

§. 74. Voilà donc la ſolution directe par laquelle on trouve la gravité ſpécifique pour un point M quelconque donné. Mais ſi, la gravité étant donnée, il s'agit de trouver ce point M, on commencera par la derniere analogie, en diſant: comme la gravité ſpécifique propoſée eſt à 1200, ainſi eſt le volume BD = 5 à un quatrieme nombre, qui marquera le volume BM, & dont on ſouſtraira le volume BD = 5, pour avoir celui du cone tronqué DM. Enſuite on dira: comme le volume = 1 du cone tronqué CB eſt au volume du cone

tronqué MD qu'on vient de trouver, ainſi eſt la différence des cubes de AD, AC, à la différence des cubes de AD, AM. Ayant donc trouvé cette différence, on la ſouſtraira du cube de AD, pour avoir le cube de AM. Par là on trouvera AM moyennant l'extraction de la racine cubique.

§. 75. Une formule algébrique préſentera ces deux ſolutions ſous un ſeul coup d'œil. Soit g la gravité ſpécifique qui répond au point M, on aura pour la premiere ſolution

$$g = 6000 : \left(5 + \frac{AD^3 - AM^3}{AD^3 - AC^3}\right),$$

& pour la ſeconde

$$AM^3 = AD^3 - (AD^3 - AC^3) \cdot \left(\frac{6000}{g} - 5\right).$$

§. 76. Ces formules s'abregent pour le cas où le cone, étant plongé dans l'eau douce, s'enfonce juſqu'à la pointe A. Car alors il eſt $CA = 0$, & on aura

$$g = 6000 \cdot AD^3 : (6AD^3 - AM^3)$$

$$AM^3 = AD^3 \left(6 - \frac{6000}{g}\right).$$

Les nombres g, qu'on trouvera de cette façon, ſont ceux de la colonne z de la table. Cette table fournira donc les nombres correſpondans x, qui marquent le poids du ſel contenu dans un volume de ſaumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce.

§. 77. Quelquefois on ſe ſert auſſi d'un globe qui ait plus de gravité ſpécifique que le liquide dont on veut déterminer la gravité ſpécifique. On ſuſpend ce globe à une balance, & en le plongeant dans la ſaumure, on obſerve combien il peſe, & combien par conſéquent il a perdu de ſon poids. La perte qu'il en fait dans l'eau douce étant comptée pour 1000, celle qu'il en fait dans la ſaumure ſera exprimée dans ces mêmes parties; & par là on aura pareillement les nom-

nombres de la colonne z de notre table, & la table fournira les nombres correſpondans x. Dans ce cas, il ſuffira que le poids du globe excede d'une 5e partie celui d'une maſſe égale d'eau douce. Mais comme, en ſe ſervant d'une balance ordinaire, on eſt obligé de calculer la peſanteur ſpécifique, il ſera bon d'imaginer quelqu'autre inſtrument qui tienne lieu de balance, & qui marque immédiatement la gravité ſpécifique de la ſaumure & le poids du ſel qui s'y trouve. Or il y a pluſieurs moyens d'accommoder à ce but les leviers angulaires. Je ne m'arrêterai donc qu'à la deſcription d'un ſeul.

§. 78. Soit AE une poulie, à laquelle ſoit affermi le bras AB, avec le quart de cercle ou l'arc BC, dont le centre ſoit le même que celui de la poulie. L'arc BC doit être fort léger; par contre on fera le bras AB d'autant plus peſant, afin que l'inſtrument étant ſuſpendu librement, la ligne à plomb tirée du centre de la poulie tombe entre D & B très près du bras AB, qui doit ſervir de contrepoids. Attachant donc en A un fil ou un crin AEP, il eſt clair que, ſi à ce crin eſt ſuſpendu un poids P, ce poids élévera le bras AB, & que le crin coupera l'arc en un point F, d'autant plus près de C, que le poids P ſera plus grand. On voit auſſi que ce poids ne ſauroit ſurpaſſer une certaine grandeur, puiſqu'il ne doit pas élever le centre de gravité de l'inſtrument, ou, pour mieux dire, celui de la partie ABC au deſſus du niveau du centre de la poulie. Fig. 3

§. 79. Si donc la gravité du globe qu'on veut employer ſurpaſſe d'une cinquieme partie celle de l'eau douce, on accommodera l'inſtrument de façon, qu'en faiſant le poids P égal à la ſixieme partie de celui du globe, l'arc BF ſoit d'environ 60 ou 70 degrés. Tout cela dépend du diametre de la poulie & du poids qu'on donne au bras AB.

§. 80. Suppoſons donc que l'inſtrument étant ſuſpendu librement & ſans poids, la ligne à plomb ſoit ED, & qu'en attachant en P un poids égal à la ſixieme partie de celui du globe, la ligne à plomb ſoit EF. Ayant tiré le rayon AD, & la perpendiculaire ou la tan-

tangente DGH, abaiſſez du point F la perpendiculaire FG, & la partie DG ſera proportionelle au poids P, ou à la ſixieme partie du poids du globe. Si donc, au lieu du poids P, vous attachez en P le globe, & que vous le plongiez dans l'eau, il eſt clair que le globe n'aura plus que la ſixieme partie de ſon poids, & que par conſéquent la ligne à plomb tombera en EF, c'eſt à dire que le crin EP paſſera par le point F. Si par contre vous plongez le globe dans une ſaumure dont la gravité ſpécifique ſoit à celle de l'eau douce comme 6 à 5, il eſt clair que cette ſaumure portera tout le poids du globe, & que par conſéquent la ligne à plomb ſera ED. Marquant donc 1000 au point F, vous marquerez 1200 au point D.

§. 81. Dans toute autre ſaumure intermédiaire, le globe aura encore quelque partie de ſon poids, & la ligne à plomb tombera entre F & D Pour trouver les points répondans, on regardera le poids du globe comme diviſé en 1200 parties, & on ſoultraira de ces 1200 parties la gravité ſpécifique de la ſaumure; ce qui reſte, c'eſt le poids que le globe conſerve encore dans cette ſaumure. Suppoſons que le globe y étant plongé, la ligne à plomb ſoit EN; abaiſſez du point N la perpendiculaire NM, & la partie DM ſera proportionelle au poids que le globe conſerve encore dans la ſaumure. Ecrivant donc en G 1000, en D 1200, vous diviſerez la ligne GD en 200 parties, & par chacune vous élèverez des perpendiculaires MG, qui marqueront en N les points répondans aux gravités ſpécifiques. Ainſi p. ex. ſi vous avez GM = 150, le point M, & partant auſſi le point N, répondra à la gravité ſpécifique = 1150. De cette façon, les nombres marqués ſur l'arc DF ſeront ceux de la colonne z de notre table; laquelle par conſéquent vous fournira les nombres répondans x, que vous pourrez pareillement écrire ſur l'arc DM, pour trouver enſuite immédiatement les grains de ſel contenus dans un volume de ſaumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce. Ce qui étant fait, la réduction de ces nombres à des meſures uſitées ſe fera de la même façon que nous avons indiquée dans la deſcription des autres inſtrumens.

V. OB.

V. OBSERVATIONS
ſur l'altération du poids des ſaumures cauſée par la variation de la chaleur.

§. 82. Nous avons remarqué ci-deſſus que la chaleur dilatant les corps, il conviendra d'avoir égard aux variations qu'elle peut produire dans le poids & la gravité ſpécifique des ſaumures, & particulierement de celles qu'on peut appeller complettes ou ſaturées. La premiere queſtion qui ſe préſente ici, c'eſt de voir, ſi la dilatation des ſaumures ſe fait d'une maniere proportionelle à celle de l'eau pure, ou ſi chaque ſaumure ſe dilate différemment. Pour cet effet, je pris la même phiole dont je m'étois ſervi pour les expériences précédentes, & l'ayant remplie d'eau bouillante, je trouvai le poids de cette eau de 1089, 3 grains, le barometre étant alors à 28 pouces. Or, dans la température du 15me degré de M. de Réaumur, la même phiole contenoit 1128, 3 grains d'eau douce. Mais, les dilatations étant réciproquement comme les poids d'un même volume, il s'enſuit qu'un volume d'eau douce chaude de 15 degrés étant échauffé juſqu'au 80me degré, ſe dilate depuis 1089, 3 juſqu'à 1128, 3, par conſéquent de 39, 0 parties ſur 1089, 3. Donc, ces 39 parties répondant à 80 — 15 = 65 degrés du thermometre, nous aurons $\frac{19 \cdot 38}{65} = 11\frac{1}{5}$ parties, qui répondent à 15 degrés. Déduiſant donc ces $11\frac{1}{5}$ parties de 1089, 3, il reſte 1077, 2 pour le volume qui répond à l'eau douce prête à ſe congeler. Poſons ce volume = 1000, & le volume de l'eau bouillante ſera = $1000 \cdot \frac{1128,3}{1077,2} = 1047\frac{1}{2}$. Ainſi 1000 parties d'eau douce prête à ſe congeler, ſe dilatent juſqu'à $1047\frac{1}{2}$ quand on les fait bouillir.

§. 83. J'en fis autant avec une ſolution de ſel qui étoit très forte. Dans la température de 15 degrés elle peſoit 1354 grains; mais l'ayant fait bouillir, un même volume n'en peſoit plus que 1256, 8 grains. Pour la faire bouillir, je mis la phiole dans l'eau bouillante,

afin d'être assuré par là du même degré de chaleur. Ainsi donc, la dilatation répondant à 80 — 15 = 65 degrés du thermometre alloit depuis 1296,8 jusqu'à 1354,0, & par conséquent elle étoit de 57,2 parties sur 1296,8. Donc, pour 15 degrés nous aurons 13,2 parties, lesquelles étant soustraites de 1296,8, donnent le volume de cette solution répondant au froid de la glace = 1283,6. Posant donc ce volume égal à 1000, celui de la même solution, qui répond à la chaleur de l'eau bouillante, sera = $1000 \cdot \frac{1354,0}{1283,6} = 1055$. Or nous avons vu que la dilatation de l'eau douce ne s'étendoit que depuis 1000 jusqu'à $1047\frac{1}{2}$.

§. 84. Avant que d'examiner ce que cette différence peut emporter, il convient de remarquer, que ce n'est que par maniere de fiction que j'ai calculé le volume de la solution pour le froid de la glace. Car, outre que l'eau salée se congele plus difficilement, elle dépose la plus grande partie de son sel quand elle se congele. Ainsi ce n'est point dans ce sens qu'il faudra prendre la proportion que je viens d'établir entre la dilatation de l'eau douce & celle de la solution que j'ai employée, & qui differe comme $47\frac{1}{2}$ de 55 sur 1000. Il suffit que cette proportion ait lieu dans tous les cas où cette solution n'est point assez froide pour commencer à déposer une partie du sel qu'elle contient, ce qui ne se fera pas à moins qu'elle n'ait au dessous de 13 degres de chaleur.

§. 85. Pour voir donc de quelle conséquence pourra être cette différente dilatabilité, je vais d'abord examiner la solution telle qu'elle étoit dans la chaleur de 15 degrés; ensuite je l'examinerai dans la chaleur de l'eau bouillante, vu que ce sont les deux cas de mes expériences. Dans la température de 15 degrés, la solution pesoit 1354 grains, un même volume d'eau douce 1128,3, ce qui donne la gravité spécifique de la solution = $\frac{1354,0}{1128,3} = 1200$. Consultant donc la table que nous avons donnée ci-dessus, nous trouverons 330 grains

grains de ſel, qui répondent à cette gravité ſpécifique, de ſorte que dans un volume égal à 1000 grains d'eau douce cette ſolution renferme 330 grains de ſel.

§. 86. Par contre la même phiole remplie d'eau bouillante ne peſoit que 1089, 3, & étant remplie de la ſolution chauffée au même degré elle peſoit 1296, 8 grains. Ce dernier nombre étant diviſé par le premier donne 1; 191 pour le rapport de la gravité ſpécifique, ce qui dans la table n'indiqueroit que 310 grains de ſel, au lieu de 330 que nous fourniſſoit le calcul précédent. Il eſt donc clair que, pour examiner la bonté des ſaumures, il faut avoir égard au degré de chaleur qu'elles ont.

§. 87. Remarquons d'abord, que les variations qui ſe préſentent à ce ſujet dépendent de deux cauſes. La premiere, c'eſt le degré de ſalure. Car il eſt clair que, plus cette ſalure ſera foible, plus auſſi la dilatabilité de la ſaumure approchera de celle de l'eau douce. Enſuite ces variations dépendent du degré de la chaleur. Car plus la la chaleur approchera du 15me degré de M. de Réaumur, plus auſſi les réſultats des épreuves qu'on fera, approcheront de ceux de la table que nous avons donnée ci-deſſus, & qui eſt faite ſur ce 15me degré.

§. 88. Or nous avons vu, que depuis le froid de la glace juſqu'à la chaleur de l'eau bouillante l'eau douce ſe dilate de 47½ parties ſur 1000, & la ſolution que j'ai employée de 55 parties ſur 1000, & par conſéquent de 7½ parties de plus que l'eau douce. Ces 7½ parties doivent être diſtribuées ſur les 330 grains de ſel que la ſaumure contient, & on trouvera 1 partie ſur 44 grains, de ſorte que ſur chaque fois 44 grains de ſel, qu'un volume de ſaumure égal à 1000 gr. d'eau douce & dans la température de 15 degrés contient de plus, il faut ajouter une unité au degré de dilatabilité de la ſaumure. Mais, comme les ſaumures, telles qu'on les tire des ſources ou qu'on les laiſſe expoſées à l'air, ne different jamais beaucoup du degré de l'air, il eſt clair que la différence de cette chaleur & de celle du 15 degré eſt toujours aſſez petite, pour que le réſultat des expériences ne diffe-

re pas notablement de ceux que fournit notre table; & cette différence eſt encore diminuée parce qu'il eſt fort rare de trouver des ſaumures auſſi fortes que celle que j'ai employée.

§. 89. Si cependant on veut avoir égard à cette petite différence, il faudra d'abord réduire les gravités ſpécifiques à la chaleur du 15me degré. Suppoſons p. ex. que la chaleur de la ſaumure ſoit de 10 degrés, & qu'ayant comparé ſa gravité ſpécifique avec celle de l'eau douce du même degré de chaleur, on l'ait trouvée $=$ 1120. On cherchera d'abord ce nombre dans la colonne z de la table, & on y trouvera le nombre répondant $x = 185$, qui marque les grains de ſel que la ſaumure contiendroit, ſi elle avoit la chaleur du 15 degré. Or, quoiqu'en effet ſa chaleur ne ſoit que de 10 degrés, on ne ſervira néanmoins de ce nombre $x = 185$ comme fort approchant du véritable. On dira donc que, puiſque ſur 44 grains il faut augmenter le degré de dilatabilité d'une unité, il s'enſuit que ſur 185 grains il faudra l'augmenter de $5\frac{5}{8}$ d'unités. Ainſi on aura pour l'eau douce $1047\frac{5}{8}$, pour la ſaumure $1047,5 + 5,6 = 1053,1$. Ces degrés ſont pour la chaleur de l'eau bouillante, qui répond à 80 degrés du Thermometre de M. de Réaumur. Pour les réduire aux degrés 15 & 10, on fera les analogies ſuivantes

$$\begin{aligned} 80 : 15 &= 47\tfrac{5}{8} : 8,9 \\ &= 53,1 : 10,0. \\ 80 : 10 &= 47,5 : 5,9 \\ &= 53,1 : 6,6. \end{aligned}$$

Ainſi on aura pour la chaleur de 15 degrés la dilatation de l'eau douce 1008,9, celle de la ſaumure 1010,0. Et pour la chaleur de 10 degrés, ces dilatations ſeront 1005,9 & 1006,6. Ces nombres ſerviront pour réduire au 19me degré de chaleur la gravité ſpécifique 1120, que nous avons pour le 10° degré de chaleur. Car il faudra l'augmenter en raiſon réciproque de 1008,9 à 1005,9, & la diminuer en raiſon de 1010,0 à 1006,6, ce qui donne

1006,

$$\frac{1006,6 \cdot 1008,9 \cdot 1120}{1010,0 \cdot 1005,9} = 1119\tfrac{1}{3},$$

ce qui ne differe que de deux tiers de la gravité ſpécifique de la ſaumure pour le 10° degré de chaleur. Cherchant donc $1119\frac{1}{3}$ dans la colonne z de la table, on trouvera le nombre x répondant $= 184$, lequel marque les grains de ſel qui, dans la température de 15 degrés, ſont contenus dans un volume de la ſaumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce également chaude. Si on veut enſuite trouver les grains de ſel contenus dans un volume égal de la ſaumure chaude au 10 degré, il faudra augmenter ces 184 grains dans le rapport des dilatations 1006,6 : 1010,0, ce qui donnera $184\frac{2}{3}$ grains.

§. 90. Le ſecond point qui me reſtoit à examiner, c'étoit de voir, comment les changemens de la chaleur peuvent faire varier le degré de ſalure des ſolutions ſaturées. Pour cet effet, je fis diſſoudre du ſel dans de l'eau bouillante, juſqu'à ce qu'elle commençât à dépoſer du ſel qu'elle avoit diſſous. Ce qui arrivant, je verſai cette ſolution toute bouillante dans ma phiole & la remplis. J'en trouvai le poids de 1353 grains. L'ayant enſuite laiſſé refroidir juſqu'à la température de la chambre, qui étoit de 14 degrés de M. de Réaumur, elle dépoſa du ſel au fond de la phiole. Je verſai donc la ſolution dans un autre vaſe, afin d'avoir ce ſel ſéparément. Et l'ayant ſéché ſur la braiſe, il peſa 17 grains. Je fis de même évaporer la ſolution, pour en retirer le ſel qui s'y trouvoit, & le poids en fut de 464 grains, de ſorte qu'en tout il y avoit eu $484 + 17 = 481$ gr. de ſel.

§. 91. Ce qui en tout cela me parut remarquable, c'eſt la petite quantité de ſel que la ſolution avoit dépoſée en ſe refroidiſſant depuis le 80° degré du thermometre juſqu'au 14°. Car de 481 grains qu'elle contenoit, il ne s'en précipita que 17. J'en conclus que ſi l'eau, en ſe congélant, dépoſe tout ſon ſel, le moindre degré de liquéfaction ſuffit pour en diſſoudre une bonne quantité.

§. 92. Ayant donc trouvé 481 grains de ſel dans une ſolution bouillante & ſaturée, qui en peſoit 1353 gr., il s'enſuit qu'il y avoit 1353 — 481 = 872 gr. d'eau douce. Ainſi nous pouvons dire que, quand on fait bouillir 872 gr. d'eau douce, on peut y diſſoudre 552 gr. de ſel, ce qui fait au delà de la moitié de ſon poids.

§. 93. Cette ſolution, qui de toutes eſt la plus forte, differe aſſez notablement de celle que nous avons eue ci-deſſus pour le 15° degré de chaleur, & qui dans un volume peſant 1359 grains contenoit 380 gr. de ſel, & par conſéquent 1359 — 380 = 879 gr. d'eau douce, ce qui ſur 1000 grains d'eau douce ne donne que 387 grains de ſel.

§. 94. Enfin, pour m'aſſurer de ce qui arriveroit dans les grands froids, j'attendis l'hyver pour faire l'expérience que je vais encore rapporter. J'expoſai à un air froid de 5 degrés de Réaumur au deſſous du terme de la glace, une ſolution de ſel médiocrement forte, & je plaçai à côté un vaſe rempli d'eau douce. L'eau douce gela en moins d'un quart d'heure; mais la ſolution ne gela que fort lentement. Après qu'elle fut aſſez gelée pour en avoir une portion ſuffiſante de glace, je perçai la glace afin de faire écouler la ſolution qui étoit encore liquide. Je remplis de cette ſolution non gelée, toute froide qu'elle étoit, une petite phiole, & j'en trouvai le poids de 367 grains. Mais, en la portant dans une chambre de la température de 6 degrés au deſſus du point de congélation, afin qu'elle prît cette température, elle ne peſa alors que 366 grains, parce qu'à cauſe de la dilatation il falloit en ôter environ une goutte. Je portai dans la même chambre la portion glacée; elle fondit aſſez facilement. Après lui avoir laiſſé prendre la même température de 6 degrés de chaud, je remplis la même phiole de cette glace liquéfiée, & j'en trouvai le poids de 350 grains. Enfin je remplis encore la même phiole d'eau douce de la même température, & j'en trouvai le poids de 342 grains. Il s'entend que chaque fois la phiole devoit être rincée & bien vuidée. Or il eſt

342 : 350 = 1000 : 1023
342 : 366 = 1000 : 1082,

ce qui ſuivant la table du §. 47. donne 33 & 123 gr. de ſel pour un volume égal à 1000 grains d'eau douce. On voit par la même table, que la partie de la ſolution non gelée auroit pu devenir encore trois fois plus forte. Mais je doute qu'elle le fût devenue, quand même je l'euſſe laiſſée plus longtems expoſée au froid. On voit de plus qu'il y avoit encore un peu de ſel dans la glace. Mais il faut remarquer que la glace, bien loin d'être toute d'une piece comme celle de l'eau douce, étoit toute feuilletée comme de la pâte d'Eſpagne. Les feuilles n'avoient qu'environ $\frac{1}{4}$ de ligne d'épaiſſeur, & elles ſe détacherent ſans peine les unes des autres. Il eſt très croyable que ce qu'il y avoit encore de ſel ne ſe trouvoit pas dans la glace, mais entre ces feuilles. Car on ſait que le ſel en ſe détachant de l'eau monte, & qu'il ne ſe précipite qu'après avoir formé des cryſtaux aſſez grands pour que les forces de cohéſion de l'eau ne puiſſent plus le tenir ſuſpendu à la ſurface. Il eût donc fallu les laver dans de l'eau douce; mais c'eût été un travail ſans fin, les feuilles étant trop fragiles & fondant trop vite dans de l'eau non glacée.

§. 95. Je répétai cette expérience, en diſſolvant une demi-once du ſel C (§. 7.) dans 4 onces d'eau douce de la température de 6 degrés. Et ayant expoſé cette ſolution à un air froid de 8 degrés au deſſous du point de congélation, pendant une nuit de Janvier, je vis le lendemain que cette ſolution étoit glacée juſqu'au delà de la moitié. Car la glace peſa 1101 gr., tandis que la partie non glacée ne peſa que 1059 grains. Je plaçai chaque partie dans une chambre de la température de 6 degrés de chaud, & après les y avoir laiſſés prendre cette température, je remplis la même phiole, & je trouvai le poids de la ſolution qui n'étoit point gelée 377½ grains, de la glace liquéfiée 362½ gr.; ce qui comme auparavant donne

342 : 377½ = 1000 : 1104
342 : 362½ = 1000 : 1060,

ce

ce qui ſuivant la table du §. 47. donne 156 & 90 grains de ſel pour un volume égal à 1000 grains d'eau douce. Cette ſolution ayant été plus forte que la précédente, on voit auſſi que la partie non gelée devoit contenir plus de ſel. La glace par la même raiſon devoit en retenir d'avantage entre ſes feuilles. Du reſte ces expériences font voir, qu'en effet il y auroit moyen de ſe ſervir des grands froids pour condenſer conſidérablement des ſaumures foibles.

VI. OBSERVATIONS FAITES ſur les ſolutions de quelques autres eſpeces de ſel.

§. 96. Ayant pris une phiole qui contenoit 1128 gr. d'eau douce, j'y mis 300 grains de différentes eſpeces de ſel, mais de chaque eſpece ſéparément. J'y verſai enſuite de l'eau douce pour les diſſoudre, & je remplis enfin la phiole d'eau douce en la remuant, en ſorte que par ce moyen j'eus autant de ſolutions que j'avois de ſels, & que chaque ſolution dans un volume égal à 1128 grains d'eau douce renferma 300 grains de ces ſels. Tout cela ſe fit pendant l'été, dans une température de 16 degrés de Réaumur. Ayant peſé chacune de ces ſolutions, je trouvai le poids d'un volume égal

d'eau douce	1128 gr.
de ſel commun (§. 20.)	1316.
de ſel purifié par l'art du Chymiſte	1314.
de ſucre ordinaire	1243.
de ſucre de lait	1230.
de nitre	1305.
de ſel alcali, la baſe du ſel commun	1263.
de ſel de Glauber	1274.
de vitriol	1315.

Quant

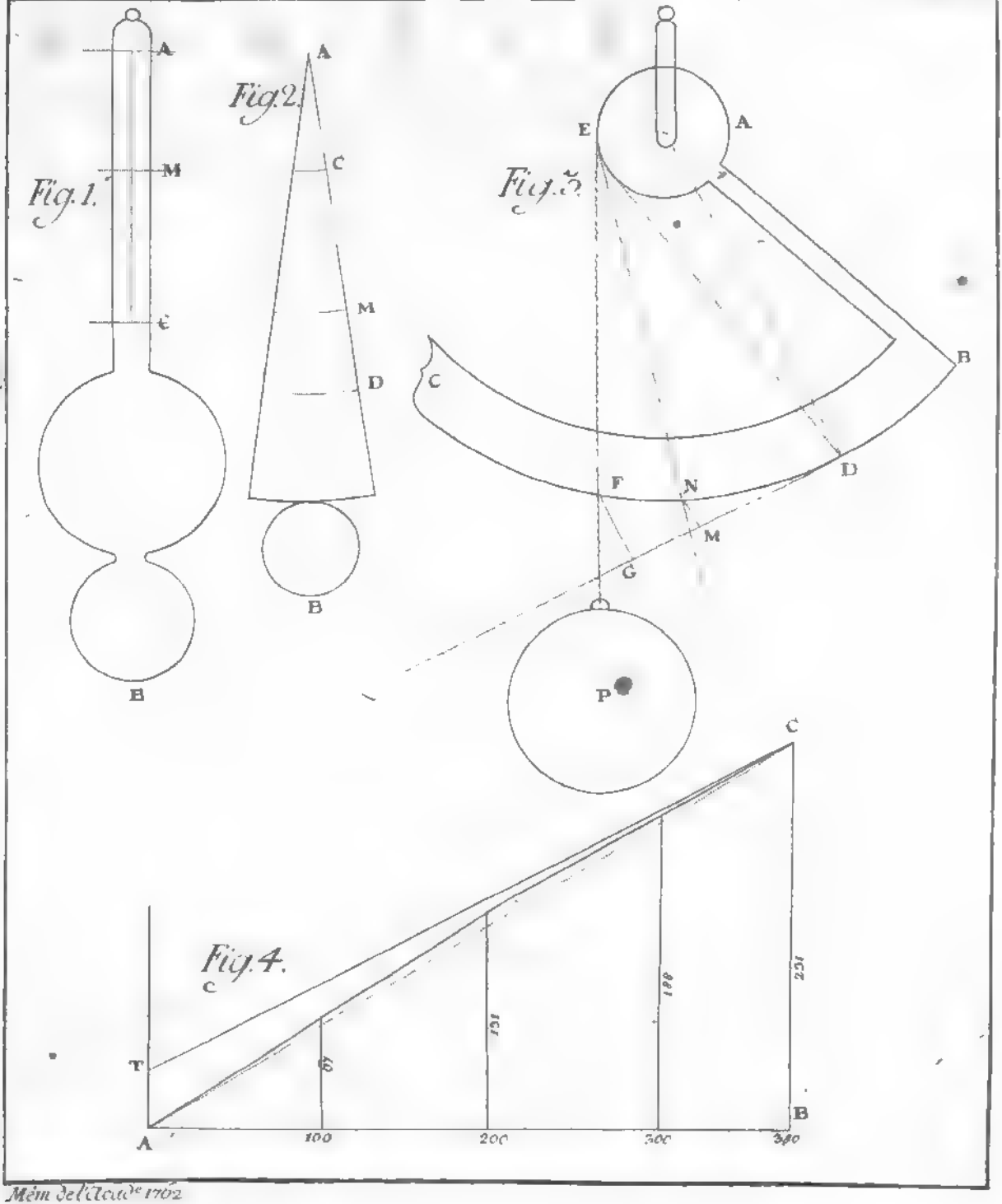


Fig.1.
A
M
C
B
Fig.2.
A
C
M
D
B
Fig.3.
E
A
B
C
F
N
D
M
G
P
Fig.4.
C
T
A
100
200
300
390
231
188
151
61
B

Quant à l'alun, l'eau ne vouloit pas en diſſoudre 300 grains. J'en fis donc la ſolution la plus forte, en diſſolvant dans de l'eau bouillante autant d'alun qu'il étoit poſſible. Cette ſolution en ſe refroidiſſant dépoſa un peu d'alun. J'en remplis la phiole & j'en trouvai le poids de 1220 grains. Et après avoir fait évaporer l'eau, je trouvai 136 grains d'alun. Enfin je fis encore une ſolution de noix de galles la plus forte qu'il étoit poſſible ſans la mettre au feu. Et l'ayant filtrée, j'en trouvai le poids de 1161 grains, & partant elle étoit de 1161 — 1128 = 33 grains plus denſe que l'eau douce. On peut faire ſur ces expériences des remarques ſemblables à celles que j'ai faites ci-deſſus (§. 22. & ſuiv.) ſur les ſolutions du ſel commun. Les différences qu'on y obſervera, feront voir que la quantité de chacun de ces ſels, qui s'inſinue dans les interſtices de l'eau, ne dépend pas uniquement de la grandeur & de la figure de ces interſtices, mais que la grandeur & la figure des particules ſalines y influe pareillement. Du reſte je n'ai point trouvé qu'il y ait en tout cela des données ſuffiſantes, pour déterminer ces grandeurs & ces figures.

MÉMOIRE

SUR

LES PRISMES ACHROMATIQUES. (*)

PAR M. BÉGUELIN.

L'Académie ayant fait venir d'Angleterre une lunette achromatique, avec le priſme compoſé qui a donné à M. Dollond les dimenſions de l'objectif de cette lunette, j'ai eu la curioſité d'examiner plus particulierement ces priſmes, & je crois devoir à l'Académie qui a bien voulu me les confier, le rapport des obſervations que j'ai faites, & les remarques qu'elles m'ont fournies.

1. Ce Priſme Achromatique eſt l'aſſemblage de trois priſmes, dont les deux extérieurs ſont de *crownglaſs*, tournés tous deux d'un même ſens; le troiſieme, placé en ſens contraire entre ces deux, eſt de criſtal d'Angleterre qu'on nomme *flintglaſs*. Les deux priſmes extérieurs étant mobiles à l'aide d'une charniere, peuvent être écartés & rapprochés de celui du milieu, & dans le rapprochement les faces intérieures s'appliquent ſi exactement les unes contre les autres, que le tout enſemble forme un ſeul priſme tronqué, à travers lequel, dans quelque ſens qu'on le tourne, & ſous quelque incidence que les raïons le traverſent, on n'apperçoit abſolument aucune bordure, nulle couleur priſmatique.

2. Après avoir démonté ces trois verres, mon premier ſoin a été de meſurer de plus d'une maniere, & avec toute la préciſion poſſible, leurs angles réfringens. La méthode qui m'a parû la plus ſûre, vû

(*) Lû à l'Académie le 22 d'Octobre 1767.

vû la petiteſſe de ces priſmes, a été de tracer d'avance ſur le papier divers angles d'une grandeur approchante à celle de chaque priſme, & différens entr'eux de 15 en 15 minutes. En appliquant verticalement le priſme ſur chacun de ces angles ſucceſſivement, il eſt aiſé d'appercevoir à très peu près quel eſt l'angle dont les côtés coïncident le plus exactement avec les faces du priſme. J'ai auſſi intercepté ces faces entre deux regles à la maniere de M. *Smith*, pour avoir l'angle que ces regles font entr'elles; j'ai de plus vérifié la dimenſion de chaque angle par l'addition & la ſouſtraction de celui du deuxieme & du troiſieme priſme. Le réſultat de ces opérations m'a donné les déterminations ſuivantes, que j'eſtime être aſſez exactes:

l'angle réfringent du Flintglaſs = 54°.
celui du grand priſme de Crownglaſs = 26°.
celui du petit priſme de Crownglaſs = 14°. 30′. (*)

(*) Depuis la lecture de ce Mémoire j'ai eû occaſion de meſurer de nouveau ces priſmes avec un inſtrument plus exact. J'ai retrouvé les mêmes meſures pour le flintglaſs & le grand crownglaſs; mais l'angle du petit crownglaſs ne s'eſt trouvé que de 14°. 15′., ou tout au plus 14°. 20′. M. le Profeſſeur de Caſtillon a eû la bonté de m'aider à prendre ces meſures, & les a réitérées lui-même. J'ai prié enſuite M. Lambert de les répéter encore; mais il a jugé que pour obtenir une préciſion plus grande, il falloit recourir à l'Optique, vû que la lumiere donne des angles & des lignes droites avec beaucoup plus d'exactitude que la regle & le compas. Voici les principes de la méthode ingénieuſe qu'il a imaginée. Soit (fig. 1.) le priſme ABC; que la lumiere y tombe ſuivant la direction LAM, elle ſera réfléchie d'un côté ſuivant AN, de l'autre côté ſuivant AP. Or on a par les loix de la réflexion NAB = BAM; & PAC = CAM. Donc NAP = 2 BAC; donc la corde de l'arc NAP eſt égale au double ſinus de l'angle du priſme que l'on cherche. M. Lambert aiant donc placé le priſme ſur un papier blanc, & une lampe élevée au deſſus du plan du papier, à la diſtance convenable pour donner ſur le papier les raïons réfléchis AN, PN, d'une longueur ſuffiſante; il y a tracé ces droites prolongées, & décrivant du centre A, avec un raïon de 0,5000 &c. parties d'echelle, l'arc NP, la moitié de la corde, meſurée ſur la même echelle, lui a donné le ſinus de l'angle BAC, qu'il a trouvé Planche II.

pour le flintglaſs = 24°. 14′.
pour le grand crownglaſs = 25°. 56′.
& pour le petit crownglaſs = 14°. 23′.

Ces

3. Il ne reſtoit plus qu'à obſerver la réfraction & la diſperſion des raïons par chacun de ces verres. C'eſt ce que j'ai fait avec le plus grand ſoin par la méthode dont j'ai rendu compte dans mon Mémoire ſur les couleurs priſmatiques. Comme les bordures colorées, auſſi bien que la dépreſſion de l'image, croiſſent en raiſon directe de l'intervalle entre le priſme & l'objet, j'ai meſuré chaque bordure, & chaque abaiſſement de l'image lorſqu'elle étoit ſtationaire, depuis la diſtance d'*un* pied, juſqu'à celle de *dix* & au delà. Les petites diſtances donnent des obſervations plus diſtinctes, parce qu'on peut mieux démêler les limites des bordures; d'un autre côté, à la diſtance de 8 ou 10 pieds, l'erreur ſur la hauteur préciſe des bordures eſt 8 ou 10 fois moins importante qu'une erreur égale à la diſtance d'un pied. Le milieu entre les obſervations les plus ſûres m'a donné les meſures ſuivantes, rapportées à une diſtance de *deux* pieds d'un priſme à l'objet.

	Bordure.	*Dépreſſion.*
Le flintglaſs donne -	$2\frac{1}{2}$ lignes	6 pouces,
le grand crownglaſs -	$1\frac{1}{2}$ - -	6 - -
le petit crownglaſs -	0,75 - -	$3\frac{1}{4}$ - -

4. Aiant ces données, le reſte n'eſt plus que de ſimple calcul. On ſait par la théorie du priſme, que lorſque l'image eſt ſtationaire, l'angle de réfraction à la ſortie du priſme eſt égal à l'angle d'incidence.

Ces deux dernieres déterminations ne different presque pas des miennes. La premiere s'en ecarte de 14′. J'ai répété à mon tour l'expérience ſuivant la méthode de M. Lambert; mais à la lumiere du ſoleil, & en ombrageant le papier des deux côtés du priſme, pour que les traces éclatantes de la lumiere réfléchie s'y peigniſſent avec d'autant plus de netteté; enſuite, pour tenir compte du diametre de l'objet lumineux, qu'il faudroit retrancher de l'arc extérieur, ou ajouter à l'arc interieur, de ces bandes de lumiere, ſi l'on veut avoir avec toute l'exactitude poſſible le double de l'angle du priſme; j'ai pris la moitié de la ſomme des deux arcs, pour le véritable arc NAP. Cette opération répétée plus d'une fois m'a donné l'angle BAC du Flintglaſs = 23°. 58′.
du grand crownglaſs = 25°. 54′.
& du petit crownglaſs = 14°. 17′.
Il eſt aiſé de voir que la petite différence de ces meſures n'altere preſque point les réſultats contenus dans ce Mémoire, & qu'ils n'en ſont que d'autant plus certains.

cidence. On ſait de plus que dans ce cas l'angle de réfraction eſt la moitié de la ſomme de l'angle du priſme, & de l'angle que l'image fait avec l'objet. Enfin j'ai prouvé dans le *Mémoire cité*, que, dans ce cas encore, ce ſont les raïons rouges qui traverſent le priſme iſoſcele parallelement à ſa baſe. Mais il y a encore une attention à faire ſur l'angle de dépreſſion de l'image, parce que cet angle entre pour beaucoup dans la détermination des forces réfractives.

Je me ſuis aſſuré par des obſervations réitérées à diverſes diſtances, que les images ſtationaires, vues par le priſme de flintglaſs, & par le grand priſme de crownglaſs, coïncident toujours exactement, qu'ainſi l'un de ces priſmes abaiſſe ou éleve l'objet préciſément autant que l'autre; & j'ai trouvé partout cet abaiſſement égal au quart de la diſtance de l'objet au priſme. Mais il n'eſt pas exactement vrai, que la moitié de l'angle d'abaiſſement, jointe à celle de l'angle réfringent, donne l'angle de réfraction. Ce n'eſt qu'en négligeant l'épaiſſeur du priſme qu'on peut le ſuppoſer, & ce n'eſt qu'à de grandes diſtances qu'on doit négliger cette épaiſſeur. J'ai donc pris pour cette meſure une diſtance horizontale de 15 pieds 4 pouces, entre le plan vertical de l'objet & celui du priſme; ce priſme, ou plutôt l'œil, étoit de $9\frac{1}{2}$ pouces plus élevé que l'objet; l'image ſtationaire a paru également par l'un & l'autre priſme deſcendre de $3'.\ 11\frac{1}{8}''$, au deſſous de ſon objet. Prenant donc la diſtance horizontale pour le ſinus totus, j'ai trouvé par les tangentes l'angle entre l'image & l'objet $= 14°.\ 9'$, & par conſéquent le demi-abaiſſement $= 7°.\ 4'.\ 30''$.

5. Poſant les dénominations ſuivantes:

l'angle de dépreſſion de l'image	$= a.$
l'angle de la bordure de l'image	$= b.$
l'angle d'incidence ſur le priſme	$= \alpha.$
l'angle de réfraction dans le priſme	$= \beta.$
l'angle d'incidence ſur la face intérieure - - - - -	$= \gamma.$

l'angle de réfraction du raïon rouge
au ſortir du priſme - - $= \varrho$.
ce même angle pour les raïons violets $= \varkappa$.
l'angle réfringent du priſme de flintglaſs $= p$.
- - - - du grand crownglaſs $= \Pi$.
- - - - du petit crownglaſs $= \pi$.

La raiſon de réfraction du flintglaſs

pour les raïons rouges & violets $= \frac{R}{1}; \frac{V}{1}$.

celle du crownglaſs - - - $= \frac{r}{1}; \frac{v}{1}$.

On a pour le priſme de *flintglaſs*

$$a = \varrho = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}a = 19^{\circ}.\ 4'.\ 30'',$$

& ôtant du logarithme du ſinus de cet angle, celui du ſinus de l'angle $\gamma = \frac{1}{2}p$, on trouve log. $R = 0,1964105$ & $R = 1,57184$. Le même procédé donne pour le crownglaſs log. $r = 0,1835223$, & $r = 1,52588$.

6. Ces valeurs de R & r, étant conclues immédiatement de la meſure des angles des deux grands priſmes, & de l'angle de dépreſſion, doivent être exactes à bien peu près. C'eſt à préſent à la hauteur des bordures à déterminer les valeurs des raiſons V & v; & comme il eſt poſſible de ſe tromper de quelques ſecondes dans l'eſtimation de l'angle b, la grandeur connue des angles des priſmes ſervira à rectifier cette erreur.

La bordure que produit le flintglaſs eſt par l'obſervation (art. 3.) de 2,5 lignes ſur une diſtance de deux pieds. Ainſi le ſinus de l'angle b eſt à ſon raïon, comme 5 à 576; ce qui donne $b = 29'.\ 50''$, après une double réfraction; d'où l'on tire pour une incidence dans le verre $= \frac{1}{2}p$, l'angle de réfraction du raïon violet: $\varkappa = \varrho + \frac{1}{2}b$
$=$

$= 19°.19'.25''$, & par conſéquent log. $V = 0,2018222$, & $V = 1,59155$.

Pareillement la bordure du grand priſme de crownglaſs étant $= 1,5'''$, j'ai ici $b = 17'.55''$, donc $\delta = \varphi + \frac{1}{2}b = 20°.13'.17''$; ce qui donne log. $v = 0,1866036$, & $v = 1,53675$.

7. Si les quatre valeurs trouvées V, R, v, r, ſont juſtes, il faut que la formule $\frac{V-R}{v-r}$, donne la raiſon de diſperſion des deux eſpeces de verres, c. a. d. qu'on ait $\frac{V-R}{v-r} = \frac{dn}{1}$. Or, puisque ces trois priſmes combinés détruiſent les couleurs, il faut auſſi par l'équation achromatique qu'on ait,

$$dn = \frac{V-R}{v-r} = \frac{\text{ſin } (\Pi + \pi)}{\text{ſin } p} = \frac{\text{ſin } 40°.30'}{\text{ſin } 24°};$$

ce qui donne: log. $dn = 0,2032311$, & $dn = 1,59672$; au lieu que les valeurs trouvées donnent $\frac{V-R}{v-r} = \frac{1971}{1087} = 1,8132$. Mais il ſuffit de ſuppoſer une erreur d'environ $\frac{1}{5}$ de ligne ſur la hauteur obſervée de chaque bordure, pour concilier exactement ces deux équations; & les nouvelles valeurs de V & v qui en réſultent, different preſque inſenſiblement des précédentes. On aura

log. $V = 0,2015540$; ou $V = 1,5905747$,
& log. $v = 0,1868460$; ou $v = 1,537613$.

8. On peut donc, ſans courir riſque de ſe tromper beaucoup, admettre les rapports ſuivants:

1°. dans le crownglaſs, $v = 1,537613$.
$m = 1,53175$.
$r = 1,52588$.

2°. dans

2°. dans le flintglaſs, $V = 1,590575.$
$M = 1,581207.$
$R = 1,57184.$

Et pour le rapport des diſperſions,

$$\frac{V - R}{v - r} = 1,5967.$$

9. La premiere remarque qu'on peut faire ſur ces déterminations, c'eſt que dans les lunettes ordinaires, dont l'objectif eſt de verre commun, ou de *crownglaſs*, l'aberration de réfrangibilité n'eſt pas à beaucoup près ſi grande que M. *Newton* l'avoit eſtimée. En effet, aiant dans le crownglaſs, pour les petites réfractions moïennes, $m - 1 = 0,531746$, & la différence entre les réfractions extremes, $v - r = 0,011733$; cette différence n'eſt que la $\frac{1}{45\frac{1}{3}}$ partie de la réfraction totale, au lieu que M. *Newton*, par la meſure du ſpectre ſolaire, l'avoit eſtimée être la $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$ partie de cette réfraction; d'où il réſulte que, par rapport aux raïons d'un point très éloigné, cenſés paralleles, le diametre du cercle de confuſion, qu'on a eſtimé juſqu'ici être la $\frac{1}{55}$ partie de l'ouverture de l'objectif, n'en ſeroit qu'environ la $\frac{1}{75}$, ou ſeulement la $\frac{1}{112}$ partie, ſi l'on néglige avec M. *Newton* les raïons les plus foibles & les plus obſcurs.

Ce n'eſt pas que je doute de l'exactitude des obſervations du grand Newton. Elles ont tous les caracteres qui peuvent rendre des obſervations reſpectables. Mais, outre que ſes priſmes pouvoient être d'un verre qui diſperſât plus les raïons que ne fait le *crownglaſs*, j'ai déjà remarqué dans le Mémoire cité, que la diffuſion eſt plus petite étant obſervée immédiatement par l'œil, que lorſqu'on la meſure ſur le mur qui reçoit l'image colorée. Or le but de toutes ces diſcuſſions optiques étant de perfectionner les lunettes, qui tranſmettent les images des ob-

objets immédiatement dans l'œil, il importe de ſavoir à quoi peut dans ce cas-là aller la confuſion que la réfrangibilité produit. On voit par les *Tranſactions philoſophiques N°. 96.* qu'on oppoſa déja aux calculs de M. *Newton*, l'expérience d'une lunette de 22 pieds qui préſentoit une image très diſtincte.

10. Au reſte il ne ſeroit pas difficile de réduire les meſures priſes par les bordures, à celles de l'image reçue ſur le mur d'une chambre obſcure. J'ai évalué, dans mon Mémoire ſur les couleurs priſmatiques, la diminution que l'étendue de la bordure ſouffre par les réfractions dans l'œil, au tiers de ſa hauteur totale; un grand Géometre réduit cette diminution au quart: quelque calcul qu'on adopte ici, il n'en réſulte pas une différence conſidérable dans les meſures que j'ai déterminées. Les valeurs de r & R reſtent les mêmes, quelle que ſoit la hauteur des bordures. Ce ſeroit celles de v & V qui ſeroient altérées, ſi l'on augmente la hauteur des bordures, du tiers, ou de la moitié. Mais, même en ce dernier cas, & ſans ſuppoſer une plus grande erreur dans l'eſtimation des bordures que celle de l'article 7, on ſatisfait à l'équation achromatique, en poſant $V = 1{,}600255$, & $v = 1{,}543676$; ce qui donneroit la réfraction moïenne du flintglaſs: $M = 1{,}586$, & celle du crownglaſs: $m = 1{,}5348$, à très peu près les mêmes que j'ai trouvées (art. 8.). Au reſte, en adoptant ces nouvelles valeurs de V & v, on a $\frac{v - r}{m - 1} = \frac{1}{30}$; ce qui ſe rapproche beaucoup plus du calcul de M. *Newton.*

11. *Seconde remarque.* Comme le pouvoir réfractif du *flintglaſs* eſt plus grand que celui du *crownglaſs*, la diſperſion des raïons dans le *flintglaſs* pourroit ſurpaſſer celle du *crownglaſs*, ſans que pour cela la force de diſperſer du *flintglaſs* ſurpaſſât préciſément d'autant celle du *crownglaſs.* Il faut donc, pour eſtimer au vrai leurs diverſes forces diſperſives, combiner la diſperſion d'un verre avec la réfraction de l'autre; ce qui donne l'analogie:

$$\frac{V - R}{M - 1} : \frac{v - r}{m - 1} = D : d = 1{,}4609 : 1.$$

Or, que des verres d'eſpeces différentes, different auſſi en forces réfringentes; que l'eſpece la plus denſe produiſe la plus forte réfraction; cela eſt dans l'ordre des phénomenes, & n'eſt pas plus ſurprenant que de voir l'air réfracter beaucoup moins que l'eau, & l'eau beaucoup moins que le verre. Mais, que les raïons de diverſes eſpeces ne ſoient pas diſperſés dans la même raiſon que la réfraction ſuit dans les divers milieux, c'eſt ce qu'il y a de difficile à concevoir, & qu'on ne ſauroit accorder à moins d'y être forcé par des expériences qui n'admettent point d'autre explication. Si l'on pouvoit ſuppoſer, comme d'habiles Phyſiciens l'ont fait, que la moindre diffuſion dans certains verres n'eſt qu'apparente, que ce n'eſt que l'effet de l'opacité de ces verres, qui moins tranſparens ne tranſmettent que difficilement & en petite quantité les raïons les plus foibles; on comprendroit clairement pourquoi les bordures produites par de tels verres ont moins de hauteur, quoique le rapport de la diſperſion à la réfraction reſte le même. Il s'agit d'examiner la poſſibilité de cette ſuppoſition.

En remontant à la production des bordures colorées, telle que je l'ai expliquée dans le Mémoire *ſur les couleurs priſmatiques*, il faut, pour que la ſuppoſition que j'examine ici ait lieu, que, tandis que le *flintglaſs* & le *crownglaſs* diſperſent également les raïons par un eſpace = 15 parties, il y ait environ *cinq* de ces parties qui ſoient abſorbées par le crownglaſs; ce qui ne ſauroit arriver que de l'une des quatre manieres ſuivantes. Comme chaque bordure complette eſt repréſentée par un triangle rectangle vertical, il faut que les parties ſupprimées dans la bordure produite par le *crownglaſs* manquent, ou 1°. uniquement vers la pointe du triangle, qui ne contenant que très peu de raïons eſt toujours la partie la plus obſcure de la bordure; ou 2°. uniquement vers la baſe, qui réuniſſant un grand nombre de raïons hétérogenes, approche ſenſiblement du blanc; ou 3°. que la ſuppreſſion des raïons ſe faſſe également à la pointe & à la baſe; ou 4°. enfin

que

que le retranchement tombe ſur la baſe de l'un des triangles, & ſur le ſommet de l'autre.

Or, de ces quatre moïens différens, les deux premiers ſont évidemment contraires aux obſervations. Car, ſi l'on applique contre un fond noir deux quarrés de papier blanc, poſés en échiquier ſur une même ligne horizontale, on verra toujours la partie la plus foncée de la bordure rouge du quarré inferieur être de niveau avec la partie la plus claire de la bordure bleue du quarré ſupérieur. Ces deux bordures ſont collatérales dans toute leur étendue, & elles finiſſent ſur une même ligne horizontale, par le jaune le plus clair d'un côté, & le violet le plus ſombre de l'autre. La différence des verres n'en met aucune dans cette obſervation.

Si l'on nomme les quatre couleurs principales le *rouge*, le *jaune*, l'*azur* & le *violet*, par leurs lettres initiales, ces bordures collatérales ſeront repréſentées par ces deux triangles caractériſtiques:

	Bordure claire.	*Bordure ſombre.*	
Rouge foncé	R - - - - -	V V A I I I R	Azur très clair
	I R - - - - -	V V A I I I	
	I I R - - - -	V V A I I	
	I I I R - - - -	V V A I	
	A I I I R - - - -	V V A	
	V A I I I R - - - -	V V	
Jaune très clair	V V A I I I R - - - -	V.	Violet obſcur.

La ſeule inſpection fait voir que, ſi la ſuppreſſion des raïons extrêmes n'affectoit que la partie la plus obſcure, ou la plus lumineuſe des bordures, elles ne paroitroient plus de niveau ſur une même horizontale.

Les deux autres moïens ne ſont pas expoſés à cette difficulté, & n'ont rien de contraire à l'obſervation; il paroit même aſſez plauſible que la ſuppreſſion des raïons violets vers les baſes y produiſe une couleur ſenſiblement blanche. J'avoue qu'en conſidérant combien le crownglaſs affoiblit la clarté des objets, je ſerois fort tenté d'admettre

une ſuppreſſion des raïons extrêmes, auquel cas la proportion trouvée par M. *Euler*, qui donne:

$$\log. r : \log. R = \log. v : \log. V,$$

pourroit reſter la véritable loi de la nature; quoique l'interception accidentelle des raïons foibles ne permettroit pas d'en faire uſage dans le calcul des objectifs compoſés, & qu'il faudroit toujours chercher par l'expérience les bordures ſenſibles de chaque eſpece de verre, pour trouver la combinaiſon achromatique qui les détruit.

Je ſai qu'on objecte contre cette loi, les verres découverts par M. *Zeiher*. En effet, je ne crois pas que la tranſparence de ces verres ſurpaſſe celle du criſtal d'Angleterre, & cependant leur diſperſion doit être de beaucoup ſupérieure à celle du *flintglaſs*. J'ignore ſur quels principes, & par quelle méthode M. Zeiher a meſuré cette diſperſion. Je n'ai vû aucun priſme de cette eſpece de verre, & je ne ſache pas qu'on ait encore réuſſi à en conſtruire de bonnes lunettes; ce qui doit ſurprendre, vû la perfection qu'on s'en pouvoit promettre. Si ce verre contient beaucoup de veines, comme cela eſt preſque inévitable lorſqu'on ne vitrifie qu'une petite maſſe dans de ſimples creuſets, il ne ſeroit pas étonnant que la diſperſion parût exceſſive.

12. *Troiſieme remarque.* En ſe ſervant des dénominations de l'article 5, on a par la nature de la réfraction, $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{r}$. La nature du priſme donne $\gamma = \pi - \beta$. On a donc $\sin \varrho = r \sin \gamma = r \sin \left(\pi - \text{ang.} \frac{\sin \alpha}{r}\right)$. De là réſultent les formules ſuivantes pour l'angle de derniere réfraction dans les verres combinés; formules qui me paroiſſent les plus commodes pour la facilité, & l'exactitude du calcul.

I. à deux priſmes p & π combinés, dont le flintglaſs eſt tourné vers l'objet.

$$\text{ſin } \varrho = r \text{ ſin } \left(\pi - \frac{R}{r} \text{ ſin } \left(p - \frac{\text{ſin } \alpha}{R}\right)\right),$$

$$\text{ſin } \varsigma = v \text{ ſin } \left(\pi - \frac{V}{v} \text{ ſin } \left(p - \frac{\text{ſin } \alpha}{V}\right)\right).$$

II. à deux priſmes π & p, dont le crownglaſs eſt tourné vers l'objet.

$$\text{ſin } \varrho = R \text{ ſin } \left(p - \frac{r}{R} \text{ ſin } \left(\pi - \frac{\text{ſin } \alpha}{r}\right)\right),$$

$$\text{ſin } \varsigma = V \text{ ſin } \left(p - \frac{v}{V} \text{ ſin } \left(\pi - \frac{\text{ſin } \alpha}{v}\right)\right).$$

III. à trois priſmes, dont celui de flintglaſs p eſt entre deux priſmes de crownglaſs, ſavoir Π vers l'objet, & π vers l'œil.

$$\text{ſin } \varrho = r \text{ ſin } \left(\pi - \frac{R}{r} \text{ ſin } \left(p - \frac{r}{R} \text{ ſin } \left(\Pi - \frac{\text{ſin } \alpha}{r}\right)\right)\right),$$

$$\text{ſin } \varsigma = v \text{ ſin } \left(\pi - \frac{V}{v} \text{ ſin } \left(p - \frac{v}{V} \text{ ſin } \left(\Pi - \frac{\text{ſin } \alpha}{v}\right)\right)\right).$$

Ces formules ſuppoſent que l'on a partout $\gamma = \pi - \beta$; mais cela n'eſt vrai dans le ſens poſitif, que lorſque les angles β & γ, tombent dans le même ſens au deſſous de leurs perpendiculaires par rapport à l'angle réfringent π, qui eſt alors $\pi = \beta + \gamma$. S'il arrive au contraire que β ſoit au deſſus de la perpendiculaire à la premiere face, il devient négatif, & l'on aura $\pi = -\beta + \gamma$; donc $\gamma = \pi + \beta$. Par la même raiſon, ſi c'eſt γ qui tombe au deſſus de la perpendiculaire à la ſeconde face, on aura $\pi = \beta - \gamma$, ou $\gamma = \beta - \pi$. Enfin, ſi l'incidence eſt perpendiculaire à la premiere face, on aura α, & $\beta = o$, & par conſéquent $\gamma = \pi$; ce qu'il eſt toujours aiſé de diſtinguer dans l'application de ces formules. Or cette conſidération montre que, quelques rapports r, v, R, V, qu'il y ait pour les raïons hétérogenes, ſi ces rapports ſont conſtants pour toutes les inciden-

 ces,

ces, il n'eſt pas poſſible que les raïons rouges & violets ſortent toujours paralleles, après avoir traverſé deux, trois, ou pluſieurs priſmes combinés de *flintglaſs* & de *crownglaſs*; qu'au contraire, s'il y a des incidences qui donnent ce paralléliſme exactement, ou très approchant, il y aura néceſſairement d'autres incidences où les raïons colorés s'écarteront à leur ſortie, & auront une diffuſion conſidérable.

En effet les ſinus de la derniere réfraction des raïons rouges & violets ſeront toujours, $\sin \varrho = r \sin \gamma'$; $r \sin \gamma''$; $r \sin \gamma'''$; & $\sin \varsigma = v \sin \gamma'$; $v \sin \gamma''$; $v \sin \gamma'''$ &c., ſelon qu'il y aura deux, trois, ou quatre priſmes combinés. Il faudroit donc, pour qu'il n'y eût plus de diſperſion, qu'on eût toujours $r \sin \gamma'' = v \sin \gamma''$; & comme le rapport de réfraction v eſt toujours plus grand que le rapport de réfraction r, il faudroit que le ſinus γ'' des raïons rouges fût toujours plus grand que le ſinus γ'' des raïons violets, & cela préciſément en raiſon inverſe de v à r. Or il eſt évident que la choſe n'eſt pas poſſible. Elle ne ſauroit l'être à deux priſmes, ſi le crownglaſs eſt tourné vers l'objet, dans les cas où la formule donneroit:

$$\begin{array}{lll} & 1^\circ.\ \gamma = \pi + \beta; & 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'. \\ \text{ou} & 1^\circ.\ \gamma = \pi; & 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'. \\ \text{ou} & 1^\circ.\ \gamma = \pi - \beta; & 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta', \end{array}$$

parce que dans tous ces cas l'angle β' du raïon rouge eſt par la nature des réfrangibilités plus grand que l'angle β' du raïon violet. Par la même raiſon, ſi c'eſt le flintglaſs qui ſoit tourné vers l'objet, les raïons colorés doivent diverger à leur ſortie lorſqu'on aura:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ.\ \gamma = \pi; & 2^\circ.\ \gamma' = \beta' - \pi', \\ \text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi - \beta; & 2^\circ.\ \gamma' = \beta' - \pi'. \end{array}$$

Enfin, s'il y a trois priſmes, dont celui de *flintglaſs* ſoit au milieu, le paralléliſme des raïons colorés ne ſauroit exiſter à leur ſortie, ſi l'on a:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ.\ \gamma = \pi + \beta; & 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'; & 3^\circ.\ \gamma'' = \beta'' - \pi'', \\ \text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi; & 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'; & 3^\circ.\ \gamma'' = \beta'' - \pi'', \end{array}$$

ou

ou 1°. $\gamma = \pi - \beta$; 2°. $\gamma' = \pi' - \beta'$; 3°. $\gamma'' = \beta'' - \pi''$,
ou 1°. $\gamma = \beta - \pi$; 2°. $\gamma' = \pi' + \beta'$; 3°. $\gamma'' = \pi'' - \beta''$.

La plûpart de ces cas ne ſont pas à la vérité applicables à notre priſme, ou, lorſqu'ils le ſont, la diviſion du crownglaſs en deux rend les angles d'émerſion des raïons hétérogenes aſſez petits pour qu'une différence dans leur ſinus, qui produiroit une aberration conſidérable ſi ces angles étoient plus grands, n'en donne qu'une médiocre; d'où l'on voit l'avantage que les objectifs à trois lentilles doivent avoir ſur ceux à deux lentilles, pour rendre l'aberration de réfrangibilité inſenſible; indépendamment de celui que la diminution des courbures leur donne.

Cependant il reſte vrai, qu'en adoptant nos meſures, l'écart des raïons hétérogenes doit aller ſous diverſes incidences juſqu'à quelques minutes; & néanmoins, en quelque ſens qu'on tourne le priſme, & ſous quelque incidence que les raïons le traverſent, on n'apperçoit abſolument aucune bordure, nul veſtige de couleurs priſmatiques. Il y a plus encore; c'eſt qu'on peut écarter les priſmes extérieurs du priſme mitoïen, juſqu'à former entre celui-ci & chacun des deux autres un angle de 30 à 35 degrés, ſans qu'il en réſulte aucune couleur. Il faut donc, ou ſe défier de la regle reçue juſqu'ici en Optique, que la raiſon entre les ſinus d'incidence & de réfraction eſt exactement conſtante pour toutes les incidences; ou, puiſque des quantités variables, telles que ſont les raiſons des ſinus à leurs angles, multipliées & diviſées par des quantités conſtantes, ne ſauroient toujours donner la même équation finale ſin $\varrho = $ ſin ω, il faut convenir que, quelques rapports qu'on adopte, le paralléliſme exact entre les raïons rouges & violets à leur ſortie des priſmes combinés, ne peut pas avoir également lieu pour toutes les incidences: au contraire, ſi l'on veut en faire le calcul, on trouvera que, ſi ce paralléliſme qui rend les priſmes *achromatiques*, a lieu ſous une incidence déterminée, il n'aura pas lieu, ni ſous une incidence un peu plus petite, ni ſous une incidence un peu plus grande; que la diffuſion paſſera ſucceſſivement pluſieurs fois dans un tour du priſme, d'un *maximum* où le raïon rouge fera un écart en haut,

haut, à un autre *maximum* où ce raïon fera l'écart en bas; & que ces plus grands écarts, inégaux entr'eux, feront plus ou moins conſidérables ſelon la grandeur, l'ordre & l'inégalité des angles réfringens. La ſuite de ces variations ſera, $\varrho = \varkappa$; $\varrho > \varkappa$; $\varrho = \varkappa$; $\varrho < \varkappa$; $\varrho = \varkappa$; $\varrho > \varkappa$; $\varrho = \varkappa$ &c.

13. *Quatrieme remarque.* Quelle que ſoit la cauſe qui rend imperceptible la diſperſion des raïons colorés dans notre priſme, je crois qu'il eſt permis d'en conclurre qu'une deſtruction totale de l'aberration de réfrangibilité n'eſt pas néceſſaire pour donner des objectifs achromatiques, & qu'il ſuffiroit peut-être pour cet effet de multiplier les lentilles. Si, en gardant la proportion de ſin $(\Pi + \pi)$ à ſin p, au lieu de combiner trois priſmes, on en combinoit *cinq*, il n'eſt pas douteux que la diffuſion des raïons hétérogenes ſous les diverſes incidences en ſeroit beaucoup moindre. Elle diminueroit encore ſi au lieu de cinq priſmes on en combinoit ſept. D'un autre côté, ſans augmenter le nombre des priſmes, l'aberration de réfrangibilité diminuera auſſi en diminuant les angles réfringens ſous la même proportion; & comme dans les petits angles on peut prendre ſans erreur les arcs eux-mêmes pour leurs ſinus, rien ne ſeroit plus facile que de ſuivre la marche des raïons extrêmes, rouges & violets, à travers autant de priſmes combinés que l'on voudra.

Planche II. Fig. 2. Or les lentilles alternativement convexes & concaves, dont les faces intérieures coïncident, repréſentent exactement une double rangée de priſmes alternativement renverſés; la ſeule différence eſt que dans les lentilles l'angle réfringent n'eſt pas conſtant comme dans les priſmes. Mais, comme la tangente, & par conſéquent auſſi la perpendiculaire à chaque point des arcs de courbure, eſt commune aux deux lentilles dont les ſurfaces coïncident, il arrive qu'autant l'angle réfringent de la lentille de *crownglaſs* augmente lorſque le raïon s'écarte de l'axe, autant auſſi l'angle réfringent du verre concave de *flintglaſs* augmente de ſon côté; en ſorte que les proportions des réfractions en ſens contraires reſtent ſenſiblement les mêmes.

Main-

Maintenant, ſi l'on prend la face du priſme pour la corde de l'arc de la moitié de la lentille, il eſt aiſé de démontrer par la nature du cercle que cet arc eſt égal en degrés à l'angle réfringent du priſme, ſi ce priſme eſt iſoſcele; & que dans tous les cas, il eſt double de l'angle que cette face du priſme fait avec la perpendiculaire tirée du tranchant du priſme ſur ſa baſe. Il eſt également aiſé de montrer qu'un raïon qui tombe ſur la face du priſme parallélement à ſa baſe, ou à l'axe AX, fait un angle d'incidence α, égal à la moitié de l'angle réfringent du priſme iſoſcele; ou égal à l'angle de la face du priſme ſcalene avec la verticale à ſa baſe. Donc, ſi ce même raïon tombe ſur la demi-lentille parallélement à l'axe, il y fera le même angle d'incidence i, dans le point où l'arc & ſa corde ont la même perpendiculaire, c'eſt à dire au milieu de l'arc. De ce milieu de l'arc juſqu'à l'extrémité qui aboutit à l'axe, ou au centre de l'objectif, l'angle d'incidence du raïon parallele eſt plus petit ſur la lentille que ſur le priſme, où il reſte conſtant; & il finit à cette extrémité-là par être nul. Il augmente au contraire ſucceſſivement depuis le milieu de l'arc juſqu'à l'autre extrémité qui aboutit à la circonférence de l'objectif, où il devient préciſément double de l'incidence ſur le priſme.

De là il eſt évident que l'aberration de réfrangibilité ne ſera jamais plus grande dans un objectif compoſé d'un nombre quelconque de lentilles dont les ſurfaces coïncident, que dans le même nombre de priſmes combinés, ſi les arcs de courbure des lentilles ſont la meſure des angles réfringens des priſmes iſoſceles correſpondans, ou s'ils ne contiennent que le double des degrés du demi-priſme ſcalene qui leur correſpond. Si, par exemple, on combine cinq petits priſmes, dont deux ſeroient de *flintglaſs*, & les trois autres de *crownglaſs*, en gardant la proportion de ſin $40\frac{1}{2}'$ à ſin 24°, ou de 16 à 10, qui répond à la diſperſion produite par ces verres; & qu'on prenne l'angle réfringent du *flintglaſs* $=$ 20°, la combinaiſon ſera:

	Crowngl.	*Flintgl.*	*Crowngl.*	*Flintgl.*	*Crowngl.*
Priſmes.	$\pi = 2^\circ 12'$;	$p = 2^\circ$	$\pi' = 2^\circ$	$p' = 2^\circ$	$\pi'' = 2^\circ 12'$,
Les demi-angles.	$1^\circ 12' + 1^\circ$;	$1^\circ + 1^\circ$;	$1^\circ + 1^\circ$	$1^\circ + 1^\circ$	$1^\circ + 1^\circ 12'$,
Arcs des lentilles	$2^\circ 24' + 2^\circ$;	$2^\circ + 2^\circ$,	$2^\circ + 2^\circ$;	$2^\circ + 2^\circ$;	$2^\circ + 2^\circ 24'$.

Non ſeulement l'aberration de réfrangibilité ne ſauroit être plus grande dans un objectif formé de ces cinq lentilles que dans le priſme compoſé de ces cinq priſmes, mais elle y ſera encore beaucoup moindre, par la raiſon que depuis la circonférence de l'objectif juſqu'au centre la grandeur des angles diminue.

Le Lunettier n'aura donc qu'à choiſir les arcs de courbures des lentilles qui lui paroitront les plus commodes; & les combiner de maniere que la ſomme de ceux des verres concaves, ſoit à la ſomme des arcs des verres convexes, comme 5 à 8, ſi ces arcs ſont aſſez petits pour qu'on puiſſe ſubſtituer leurs ſommes à celles de leurs ſinus. La moitié de la ſomme des arcs des deux faces de chaque lentille donnera l'angle du priſme correſpondant à cette lentille; & puiſqu'il eſt très aiſé d'eſtimer, & par conſéquent d'éviter l'aberration de réfrangibilité reſtant dans un aſſemblage quelconque de priſmes pour une incidence donnée, il ſera également aiſé de l'éviter pour l'incidence parallele à l'axe dans l'objectif compoſé d'un pareil nombre quelconque de lentilles. L'ouverture que l'Artiſte prendra convenablement aux courbures, pour éviter l'aberration de ſphéricité, déterminera la longueur des raïons des faces, & ceux-ci la longueur de la lunette. Ou, ſi l'Artiſte commence par choiſir la longueur de la lunette, le nombre des lentilles qu'il voudra emploïer déterminera la longueur des raïons de convexité & de concavité dans la raiſon inverſe; & la plus grande courbure déterminera l'ouverture convenable, & par conſéquent les angles des priſmes correſpondans.

§. 14. En développant les formules de l'article 12, & en partageant l'angle de chaque priſme verticalement en deux angles égaux ou inégaux, ſi l'on nomme le premier de ces angles du côté de l'objet, i, le dernier vers l'œil, d, chacun des demi-angles intermédiaires, b; &

& qu'on ſuppoſe les petits arcs en raiſon des ſinus; l'équation achromatique: $\sin \varrho = \sin \omega$, donne les formules ſuivantes:

I. à deux verres; le flintglaſs vers l'objet,

$$(v - r)(b + d) = (V - R)(i + b).$$

II. à deux verres; le crownglaſs vers l'objet,

$$(v - r)(i + b) = (V - R)(b + d).$$

III. à trois verres; le flintglaſs au milieu,

$$(v - r)(2b + i + \bullet) = (V - R)\ 2b.$$

IV. à cinq verres,

$$(v - r)(4b + i + d) = (V - R)\ 4b.$$

V. à un nombre quelconque n de verres,

$$(v - r)\ ((n-1)b + i + d) = (V - R)\ ((n-1)b).$$

Si l'on ſuppoſe donc toutes les faces d'égale courbure, la formule achromatique devient,

$$(v - r)(n + 1) = (V - R)(n - 1).$$

Or, aiant à très peu près $\frac{v - r}{V - R} = \frac{10.}{16}$, on auroit, $10n + 10 = 16n - 16$, ou $n = 4\frac{1}{3}$. Mais, puiſque la formule ſuppoſe que la premiere & la derniere lentille eſt de *crownglaſs*, n, qui d'ailleurs doit être un nombre entier, ne ſauroit être un nombre pair; on en peut donc conclure qu'en faiſant toutes les faces égales, & les courbures de peu de degrés, les objectifs à *trois* verres, & ceux à *cinq*, auront une aberration de réfrangibilité très peu ſenſible, moindre cependant dans l'objectif à cinq verres que dans celui à trois.

15. Ce ſeroit ſans doute un grand avantage pour l'Artiſte de travailler tous ſes verres ſur un même raïon & dans des baſſins égaux; d'ailleurs l'égalité des faces permet une plus grande ouverture, & pourvû que les raïons ſoient égaux entr'eux, il n'importe gueres que l'ou-

vrier ſe trompe même groſſierement ſur leur meſure préciſe. Mais, outre que l'égalité des faces ne détruit pas entiérement les couleurs, elle ne produiroit pas toujours l'avantage d'accourcir la lunette autant qu'il ſeroit poſſible.

En effet la longueur de la lunette, ou ce qui revient ici au même, la diſtance de foïer f d'un objectif compoſé, eſt déterminée par l'angle ſous lequel le raïon ϱ, ou $\varkappa$, coupe l'axe; angle que je nommerai Φ. Cette diſtance eſt le coſinus de Φ, multipliée par la demi-ouverture x, & diviſée par le ſinus; on a $f = \frac{x \cos \Phi}{\sin \Phi}$.

Or, ſi l'on prend les petits arcs, pour leurs ſinus, la nature des priſmes donne les équations ſuivantes pour les priſmes alternants, en poſant l'angle de premiere incidence $= i$,

Crowngl. *Flintgl.* *Crowngl.* . . . &c.

$$\alpha = i; \beta = \frac{i}{r}; \gamma = \pi - \beta. \quad \beta' = \frac{r}{R}\gamma; \gamma' = p - \beta'. \quad \beta'' = \frac{R}{r}\gamma'; \gamma'' = \pi' - \beta''$$

. . . &c.

& lorſque le dernier verre eſt de crownglaſs, & que le nombre total des priſmes eſt $= n$, on aura $\varrho = r\gamma^n$.

En développant donc la valeur de γ^n on a:

à deux priſmes (le crownglaſs vers l'objet):

$$\varrho = \pm Rp \mp r\pi \pm i;$$

à 3 priſmes:

$$\varrho = r\pi' - Rp + r\pi - i;$$

à 5 priſmes:

$$\varrho = r\pi'' - Rp' + r\pi' - Rp - i;$$

à n priſmes:

$$\varrho = r\pi^{\frac{n-1}{2}} - Rp^{\frac{n-3}{2}} + r\pi^{\frac{n-3}{2}} - Rp^{\frac{n-5}{2}} + \cdots + r\pi - i.$$

Or,

Or, en nommant d l'angle que la perpendiculaire à la derniere face fait avec la parallele à l'axe, on a l'angle $\Phi = \varrho - d$, ſi la derniere lentille eſt convexe; & $\Phi = d \pm \varrho$, lorſqu'elle eſt concave. Donc on aura:

à deux verres:

$$\Phi = r\pi - Rp - i + d;$$

à trois verres:

$$\Phi = r\pi' - Rp + r\pi - i - d;$$

à cinq verres:

$$\Phi = r\pi'' - Rp' + r\pi' - Rp + r\pi - i - d.$$

&c. &c.

Cette formule pour l'angle à l'axe Φ, qui eſt reſtrainte ici au cas des ſurfaces coïncidentes, devient plus ſimple en la généraliſant pour toutes les courbures, dans le cas des raïons paralleles. Car, nommant les arcs des demi-courbures c, c', c'' - -, on aura en ſubſtituant $c + c'$, à π, $c'' + c'''$, à p, &c.

$$\Phi = r(c + c') - R(c'' + c''') + r(c^{IV} + c^{V}) - \&c. - i - d.$$

Or la combinaiſon $c + c'$; $c'' + c'''$; $c^{IV} + c^{V}$ &c. équivaut par rapport à l'angle à l'axe, à celle-ci:

$$i + g; \quad g + f; \quad f + d.$$

J'ai donc $i = c + c' - g$; $g = c'' + c''' - f$; $f = c^{IV} + c^{V} - d$; donc $-i - d = -c - c' + c'' + c''' - c^{IV} - c^{V}$ &c., & par conſéquent

$$\Phi = (r-1)(c + c') - (R-1)(c'' + c''') + (r+1)(c^{IV} + c^{V}) - \&c.$$

Soit maintenant la ſomme des arcs des lentilles convexes, ou de leurs ſinus, $= \Pi$: celle des arcs concaves, ou, ce qui revient au même, des trenchans des priſmes de *flintglaſs* $= P$; on aura donc:

$$\Phi = (r - 1)\ \Pi - (R - 1)\ P.$$

Et en prenant pour ſatisfaire à l'équation achromatique, $P = \frac{5}{8}\Pi$, on aura $\Phi = (0,526 - 0,3575)\ \Pi$; $= 0,1685\ \Pi$, de ſorte que l'angle

gle à l'axe ſera à peu près $\frac{1}{6}$ de la ſomme des arcs convexes de crownglaſs.

Si l'on faiſoit donc toutes les faces des verres d'un objectif égales entr'elles, on auroit à *trois* verres, $P = \frac{1}{2}\Pi$; ce qui donneroit $\Phi = 0,526\,\Pi - 0,572 \times \frac{1}{2}\Pi$, ou $\Phi = 0,24\,\Pi$. Au contraire à *cinq* verres on auroit $P = \frac{2}{5}\Pi$; par conſéquent $\Phi = 0,526\,\Pi - 0,572 \times \frac{2}{5}\Pi$, ou $\Phi = 0,145\,\Pi$. Or, plus l'angle Φ eſt grand, plus la diſtance focale eſt petite; il eſt donc évident que l'égalité de toutes les faces donneroit une lunette plus courte, ſi l'on combine trois lentilles, & plus longue, ſi l'on en combine cinq, que ne ſera la lunette où les arcs des faces auront entr'eux le rapport que la diſperſion des verres preſcrit, ſavoir $P = \frac{3}{8}\Pi$.

16. Comme on ne gagne rien pour le raccourciſſement de la lunette à faire les faces d'une lentille de différentes courbures, & que l'on gagne une plus grande ouverture à faire ces faces égales; il ſera plus avantageux dans la pratique de faire toutes les lentilles de *crownglaſs* d'un même raïon, & toutes celles de *flintglaſs*, auſſi d'un ſeul raïon tel, que ce dernier multiplié par le nombre des faces convexes, ſoit au premier multiplié par le nombre des faces concaves, comme la diſperſion du cryſtal, eſt à celle du verre commun, c'eſt à dire, environ comme 8 à 5. Soit f le raïon commun aux lentilles convexes & leur nombre N; g le raïon commun aux lentilles concaves & leur nombre n; on aura $2gN : 2fn = 8 : 5$, ou $g = \frac{1,6\,fn}{N}$; ce qui donne

à 2 verres: - - - - $g = 1,6f$,
à 3 verres: - - - - $g = 0,8f$,
à 5 verres: - - - - $g = 1,066f$,
à 7 verres: - - - - $g = 1,2f$,
&c. &c.

17. Cette derniere méthode a ſur celle de l'Article 14, les avantages ſuivans. 1°. Elle eſt plus conforme à la théorie, & détruit par

par conſéquent mieux les couleurs. 2°. En emploïant ici *trois* lentilles, on évite l'inconvénient des anneaux colorés qui peuvent réſulter du contact des verres. 3°. Elle donne à *cinq* lentilles les raïons des faces plus grands que ne ſeroit le raïon commun dans l'autre méthode, pour un objectif d'un même foïer; elle permet par conſéquent une plus grande ouverture.

D'un autre côté les avantages de la premiere méthode ſont: 1°. la facilité de l'exécution qui n'exige qu'un ſeul raïon. 2°. que l'erreur de l'ouvrier dans la longueur préciſe du raïon n'influe point ſur la bonté de l'objectif. 3°. qu'à *trois* lentilles on a pour un objectif d'un même foïer un plus long raïon, ce qui permet une plus grande ouverture, & ſeroit avantageux dans les petites lunettes. 4°. qu'à *cinq* lentilles, on aura au contraire un raïon plus court; ce qui facilitera l'exécution des grandes lunettes; les arcs de courbures étant aſſez petits, pour admettre la plus grande ouverture poſſible.

Au reſte, l'une & l'autre méthode ſuppoſe que dans les objectifs combinés de pluſieurs verres l'aberration de ſphéricité ſoit aſſez inſenſible, pour admettre des lentilles iſoſceles; c'eſt ce que je me propoſe de rechercher dans un autre Mémoire; il n'eſt queſtion dans celui-ci que de la réfrangibilité.

18. Enfin, ſi la méthode de ſubſtituer les priſmes aux courbures ſphériques n'eſt pas dans toute la rigueur géométrique, il y a un moïen aiſé de la rendre exacte. Il ne faut pour cela que chercher la valeur des angles π, p, π, &c., pour le priſme que forme le concours des tangentes tirées aux deux points des faces que le raïon de lumiere coupe en traverſant la lentille.

Soient ces points q & Q; les raïons des faces, $pq = f$, PQ $= f'$; le chemin du raïon dans la lentille $qQ = e$. Soit tirée qm, parallele à l'axe. Si l'on nomme z l'angle d'incidence; μ & λ, les angles que le raïon incident, & le réfracté, font avec la parallele à l'axe AX; la demi-ouverture $Om = x$. On a d'abord $\pi = c + c'$. Planche II Fig. 3

Or,

Or, lorſque les ouvertures Om, OQ, ſont égales, on a $e : e' = \frac{1}{f} : \frac{1}{f'}$. Mais ces ouvertures ſont entr'elles comme x à $x - Qm$; & l'on a $Qm = e$ ſin λ. Or $\lambda = i - \frac{i}{r} \mp \mu$; donc, en mettant le petit angle λ, pour ſon ſinus, on aura:

$$\pi = \frac{x}{f} + \frac{x - ei + \frac{ei}{r} \pm e\mu}{f'},$$

$$p = \frac{x}{f''} + \frac{x - e'\gamma + \frac{e'r\gamma}{R} \pm e'\mu'}{f'''},$$

$$\pi' = \frac{x}{f^{IV}} + \frac{x - e''\gamma' + \frac{e''R\gamma'}{r} \pm e''\mu''}{f^{V}},$$

&c. &c.

Ou, en négligeant les petits termes affectés de e, (qui d'ailleurs par le développement des γ, γ', γ'', &c. s'entredétruiſent ſenſiblement à l'exception des $\frac{e\mu}{f}$) on aura pour l'incidence parallele à l'axe, (art. 15.)

$$\frac{\Phi}{x} = (r-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right) - (R-1)\left(\frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''}\right) + (r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}} - \frac{1}{f^{V}}\right) - \&c.$$

pour un nombre quelconque de lentilles combinées. Equation qui donne l'angle Φ en minutes, ſi on diviſe Φ par $\frac{10000}{2,909}$, c'eſt à dire, par 3438.

Et

Et puiſqu'on a la diſtance focale

$$F = \frac{x' \cos \Phi}{\sin \Phi}, = \frac{x\sqrt{(1-\Phi\Phi)}}{\sin \Phi},$$

ſi l'on met l'angle au lieu du ſinus, on a, en négligeant $\Phi\Phi$:

$$F = \frac{1}{(r-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right)-(R-1)\left(\frac{1}{f''}+\frac{1}{f'''}\right)+(r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}}+\frac{1}{f^{V}}\right) - \&c.}$$

ce qui eſt exactement la formule connue de la diſtance focale.

19. Pour conclure ce Mémoire, je mettrai ſous les yeux la diſtribution des arcs de lentilles, pour des objectifs de 2, 3, 5 & 7 verres, d'un même foïer, en ſuppoſant le rapport des diſperſions comme 8 à 5, & les arcs aſſez petits pour repréſenter leurs ſinus. Les nombres ſeront telle quantité ou partie de degrés que l'on voudra.

	Crowngl.	*Flintgl.*	*Crowngl.*	*Flintgl.*	*Crowngl.*	*Flintgl.*	*Crowngl.*
1°. *Lentilles coïncidentes,* Degrés de courbure des faces.	11 + 5 ;	5 + 5;					
	3 + 5 ;	5 + 5;	5 + 3,				
	3 + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ +3;
	3 + $1\frac{3}{5}$;	$1\frac{3}{5}$ + $1\frac{3}{5}$;	$1\frac{3}{5}$ + $1\frac{3}{5}$;	$1\frac{3}{5}$ + $1\frac{3}{5}$,	$1\frac{3}{5}$ +$1\frac{3}{5}$;	$1\frac{3}{5}$ +$1\frac{3}{5}$;	$1\frac{3}{5}$ +3;
			&c.	&c.			
2°. *Lentilles iſoſceles,* pour diminuer les courbures, & l'aberration de ſphéricité.	8 + 8 ;	5 + 5;					
	4 + 4 ;	5 + 5 ;	4 + 4;				
	$2\frac{2}{3}$ + $2\frac{2}{3}$,	$2\frac{1}{3}$ + $2\frac{1}{3}$;	$2\frac{2}{3}$ + $2\frac{2}{3}$;	$2\frac{1}{3}$ + $2\frac{1}{3}$;	$2\frac{2}{3}$ +$2\frac{2}{3}$;		
	2 + 2 ;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	2 + 2 ;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	2+2 ;	$1\frac{2}{3}$+$1\frac{2}{3}$;	2+2,
			&c.	&c.			
3. *Lentilles égales.*	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$;	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$;	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$;				
	2_{12}^{7}+2_{12}^{7},	2_{12}^{7}+2_{12}^{7};	2_{12}^{7}+2_{12}^{7},	2_{12}^{7}+2_{12}^{7},	2_{12}^{7}+;		
	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ +$1\frac{5}{6}$,	$1\frac{5}{6}$+$1\frac{5}{6}$,	$1\frac{5}{6}$+$1\frac{5}{6}$.

CONJECTURE PHYSIQUE

SUR

QUELQUES CHANGEMENS ARRIVÉS DANS LA SURFACE DU GLOBE TERRESTRE.

PAR M. SULZER.

La ſurface du globe terreſtre, telle qu'elle eſt aujourd'hui, montre des traces de pluſieurs révolutions remarquables, auxquelles on doit attribuer ſon état actuel. Toute la Terre, à l'exception d'un petit nombre d'endroits, eſt couverte d'une croute de décombres, dont l'épaiſſeur varie. Dans quelques endroits, cette croute conſiſte dans des couches aſſez régulieres de terre, de ſable, de gravier, de pierres, poſées horizontalement les unes ſur les autres, mais très rarement dans l'ordre des gravités ſpécifiques de ces couches. Dans d'autres endroits, cette croute eſt un amas de matieres hérérogenes que le hazard paroît y avoir jettées. On trouve diverſes eſpeces de terres, de ſables, de cailloux, mêlées enſemble; & au milieu même de cet amas hérérogene on trouve quelquefois des reſtes de matieres végétales & animales. Enfin, des amas immenſes de ſable couvrent dans pluſieurs endroits la ſurface du globe à des profondeurs très conſidérables. L'eſprit le moins philoſophique ſent que cette croute n'eſt pas la matiere primitive dont la terre a été couverte dès ſa premiere formation. Ces ſables qui couvrent des régions entieres, ne ſont que des rochers, des cailloux, & des criſtaux concaſſés; & ces cailloux qui, dans bien des endroits, couvrent les campagnes, ne ſont que des morceaux détachés de quelques rochers, qui forment la ſubſtance des montagnes.

De

De cette conſidération naît la queſtion ſuivante: *Par quelle revolution la terre a-t-elle été couverte de cette croute hétérogene?* On ſait quelles ſont les principales hypotheſes par leſquelles les Phyſiciens ont prétendu réſoudre ce grand problême, & je crois qu'on m'accordera ſans difficulté qu'aucune n'eſt ſuffiſante pour répondre à la queſtion conçue dans cette généralité. Ce problême m'avoit occupé depuis bien des années, lorſque dans un voyage que je fis l'année paſſée aux montagnes de *L'Hercynie*, j'eus occaſion d'examiner de nouveau pluſieurs particularités rélatives à cette matiere. Des obſervations faites au pied des montagnes, me firent naître des conjectures qui m'ont paru très propres à répandre du jour ſur les objets deſquels dépend la ſolution du problême. Je propoſerai ici ces conjectures dans l'ordre qu'elles ſe ſont préſentées à mon eſprit. Pour bien ſaiſir ce que j'ai à dire, il faut avoir devant les yeux la figure ci-jointe, qui repréſente la partie quelconque d'une ſection du globe terreſtre. Planche II. Fig. 4.

AB repréſente un arc d'un grand cercle du globe, qui friſe la ſurface de la mer: le point A eſt pris ſur la côte, & la ligne courbe ACDEF &c. repréſente la maniere dont le terrein s'éleve ſucceſſivement depuis les côtes juſqu'au ſommet le plus élevé d'une chaîne de montagnes. Que l'on s'imagine maintenant que la chaîne des montagnes repréſentées dans la figure, dénote cette portion des montagnes de l'Hercynie qui eſt entre le village d'*Ilſebourg* & le ſommet du *Brocken*, appellé auſſi *Blocksberg*, de ſorte que M ſoit le ſommet de cette montagne, & D l'endroit où l'on ſort de ſes défilés, pour arriver à Ilſebourg; & que la ligne DCA repréſente le terrein depuis ces montagnes juſqu'à la mer.

Dans le voyage dont j'ai fait mention, je deſcendis du ſommet du *Blocksberg* M, par le chemin qui conduit à Ilſebourg, ſitué près du débouché D; c'eſt ce débouché qui m'a frappé & qui m'a fait faire la premiere réflexion lumineuſe ſur la matiere que je traitte ici. Depuis la vallée F juſqu'à l'entrée dans la plaine D, on paſſe par un chemin aſſez uni entre la montage DEF, & une autre preſque égale & ſembla-

ble qui eſt de l'autre côté du chemin, ayant la montagne DEF à gauche, & l'autre à droite. Ces deux montagnes ſont fort proches l'une de l'autre, & forment une eſpece de porte, par laquelle on ſort des défilés de l'Hercynie pour entrer dans la plaine. Un petit ruiſſeau paſſe le long de ce chemin.

La premiere choſe qui me frappa dans cet endroit eſt l'idée, que ſi on fermoit ce paſſage par un mur, la petite riviere qui paſſe par la vallée F, & qui ſort en D, ne trouvant plus d'iſſue, ſe gonfleroit & convertiroit la vallée EFG en un lac fort profond. Que l'on s'imagine maintenant, que les eaux de ce lac trouvent quelque fente dans la baſe de la montagne DEF, par laquelle elles puiſſent ſortir. On conçoit que la grande preſſion que l'eau exerceroit contre le fond d'un lac dont la profondeur eſt de pluſieurs centaines de pieds, la feroit ſortir en D avec une impétuoſité à laquelle rien ne réſiſteroit. Elle ne manqueroit pas d'élargir peu à peu le paſſage; & cela fait, elle emporteroit tout ce qu'elle trouveroit en ſon chemin, charriant & terres, & ſables, & pierres, en ſi grande quantité & avec tant de force, que l'écoulement fini, on trouveroit la campagne entre D & C couverte de ces décombres. L'ouverture en D, au pied de la montagne, ſe ſeroit aggrandie peu à peu par l'impétuoſité des eaux; une partie de la montagne ayant perdu ſa baſe, ſe ſeroit écroulée; & les décombres de cet écroulement ſe ſeroient répandues ſur la plaine.

Ces remarques m'ont d'abord fait comprendre comment une campagne, comme celle qui va depuis D vers C, peut être couverte de décombres tirées de montagnes aſſez éloignées, & comment ces décombres peuvent être amaſſées juſqu'à des hauteurs conſidérables. J'ai compris enſuite qu'il peut y avoir eu des cas, où l'amas de ces décombres aura été ſi grand, qu'il aura comblé le fond de l'Océan près des côtes, & obligé ſes eaux à rétrograder.

Ayant pouſſé enſuite plus loin ces premieres réflexions, il m'a paru qu'il eſt très poſſible de déduire l'état actuel de la ſurface du globe

be d'un grand nombre d'inondations ſemblables, qui ſe ſeront ſuccéde les unes aux autres dans de longs intervalles. Je propoſerai donc la conjecture qui m'a paru ſuffire pour réſoudre notre problême dans toute ſon étendue.

Je ſuppoſe d'abord que, dans la conſtitution primitive de la terre, toute ſa ſurface a été couverte d'eau, à l'exception des endroits où ſont aujourd'hui les grandes chaînes de montagnes, leſquels endroits formoient alors autant d'îles au milieu de l'Océan. Ainſi, dans le cas particulier auquel ſe rapporte notre figure, toute l'étendue de pays de A juſqu'en D a été ſous l'eau. Non pas que les eaux de l'Océan ayent jamais couvert la plaine A C D, telle qu'elle eſt aujourd'hui; mais parce que toute la maſſe des décombres qui ſe trouve entre la ligne A B & la ligne A C D, n'y étoit pas originairement. Cette ſuppoſition ne renferme non ſeulement rien qui ne ſoit probable, mais elle devient preſque une vérité démontrée, quand on conſidere, que dans tous les pays plats, on peut creuſer juſqu'à des profondeurs qui ſont au deſſous du niveau actuel de la mer, ſans qu'on trouve ni terre, ni aucune autre matiere qu'on puiſſe prendre pour originaire. Il eſt de fait que les terres qui ſont aujourd'hui le ſol des pays plats, ſont en grande partie des décombres, qui par conſéquent n'y ont pas toujours été. Cela nous fait voir comment les eaux de l'Océan ont pû ſuffire pour couvrir toute la ſurface de la terre à l'exception des hautes montagnes. Si encore aujourd'hui on pouvoit ôter partout les terres hétérogenes des endroits où elles ſont dépoſées, & les remettre ſur les montagnes; la quantité d'eau répandue ſur ce globe, ſuffiroit pour couvrir toutes les plaines.

Dans cet état primitif, les vallées que forment les montagnes n'étoient pas encore ouvertes. Toutes les montagnes préſentoient dans leurs contours des promontoires inacceſſibles; les vallées intérieures étoient toutes remplies d'eau, & formoient par conſéquent autant de lacs, dont les eaux n'avoient aucun écoulement. La figure repréſente de pareils lacs G H I, & I K L. Il n'y avoit point alors de ri-

vieres ſur la terre, vû que les montagnes n'étoient point ouvertes encore, pour donner paſſage aux eaux des lacs. Les vallées recevoient toutes les eaux des ſources. Je m'imagine que dans pluſieurs endroits ces lacs ont pû former des caſcades le long des promontoires; de ſorte que dans cet état même, quoiqu'il n'y ait pas eu de rivieres, il y a eu une circulation continuelle des eaux à l'Océan, & de l'Océan aux ſources, moyennant ces caſcades & l'évaporation. Remarquons encore que quelques uns de ces lacs ont pû avoir une profondeur de quelques milliers de pieds. Car pluſieurs vallées entre les grandes montagnes ont actuellement cette profondeur. Un lac de cette profondeur doit avoir exercé une preſſion prodigieuſe, tant contre le fond, que contre les côtés proches de ce fond. Circonſtance eſſentielle, à laquelle il faut faire une attention particuliere.

A' ces ſuppoſitions, contre leſquelles les Phyſiciens n'auront pas d'objection importante à faire, il faut joindre une obſervation connue de tous ceux qui ont voyagé dans les grandes montagnes: c'eſt que les rochers, qui ſont proprement la ſubſtance des montagnes, expoſés tantôt aux rayons du ſoleil, tantôt à l'action de l'humidité, ſont ordinairement fendus en tout ſens, & que leur ſurface s'amollit peu à peu par la variation continuelle du chaud & du froid, de la ſéchereſſe & de l'humidité. Ces cauſes produiſent deux faits fort eſſentiels dans la matiere que nous traitons. On comprend par-là qu'au fond des lacs dont nous avons parlé, il ſe forma peu à peu un amas de pierres, grandes & petites, tombées des ſommets des montagnes, & un ſédiment conſidérable de ſables, de terres, & d'argilles produites par la diſſolution des rochers.

Arrêtons-nous un moment ici, & conſidérons maintenant la Terre dans cet état primitif. Nous la voyons couverte d'eau partout. *Omnia pontus erant.* Dans cet Océan on voit peut-être une vingtaine d'Iles très hautes. En Europe les *Pyrénées*, les *Alpes*, les montagnes de *Boheme*, de *l'Hercynie*, de *Thrace*, forment ces iles. L'Océan lavant les pieds de toutes ces montagnes, il n'eſt pas ſurprenant qu'on

qu'on trouve encore aujourd'hui des coquilles & des poiſſons de mer aux endroits où la mer a ſéjourné autrefois. Dans chacune de ces iles, il y avoit alors un grand nombre de lacs d'une profondeur très conſidérable; & les fonds de ces lacs étoient remplis de terres, de ſables & de pierres de toute grandeur. Dans cet état, des cauſes non ſeulement très naturelles, mais encore très ordinaires, peuvent avoir produit des changemens ſucceſſifs, leſquels ont donné à la Terre ſa face actuelle.

Qu'un tremblement de terre, par exemple, ait fendu un promontoire, qui formoit alors le bord extérieur d'un lac: voilà des eaux qui en ſortent avec une impétuoſité prodigieuſe, charriant tout ce qui étoit dépoſé à leur fond, & détachant encore d'autres matieres qui ſe trouvent ſur leur paſſage. Toutes ces matieres ſont portées dans la mer; & dépoſées là, elles forment de nouvelles iles dans l'Océan. Mais ces nouvelles iles ne ſont compoſées que de décombres. A cette premiere ſortie des eaux, d'autres ſuccedent, & à celles-ci encore d'autres, juſqu'à ce que tous les lacs d'une de nos grandes iles ſoyent écoulés; que ces écoulemens ſe faſſent dans des tems plus ou moins éloignés les uns des autres, & on comprendra ſans peine, comment la partie de l'ancien Océan, qui occupoit l'eſpace d'une ile à l'autre, par exemple, celui qui eſt entre-les *Pyrénées* & les *Alpes*, a pû être rempli de décombres au point de combler le fond de l'Océan, & de former des terres habitables.

Voilà en gros ma conjecture ſur l'origine de cette partie de la terre, qui conſiſte viſiblement en décombres. Cette hypotheſe très ſimple, & à ce que je crois, très probable, ſuffit pour expliquer tous les faits particuliers rélatifs à cette matiere. Il me faudroit paſſer de beaucoup les limites d'un Mémoire académique pour prouver cela dans tous les détails dont la matiere eſt ſuſceptible. D'ailleurs, il eſt très facile de faire l'application de cette hypotheſe à des cas particuliers. Je me contenterai donc d'en tirer les conſéquences les plus immédiates & les plus remarquables.

Pre-

Premierement, notre ſyſtême explique un fait qu'on a fort mal compris juſqu'à préſent. Preſque tous les peuples de la terre parlent de déluges, ou grandes inondations arrivées anciennement dans leurs pays. Outre ces déluges fameux *de Noé*, *d'Ogygès*, *de Deucalion*, il y en a eu d'autres dont parlent les peuples de la Chine & ceux de l'Amérique. Ceux qui prétendent que le déluge de Noé a été univerſel, ont crû trouver une confirmation de cette hypotheſe dans ces traditions des autres peuples. Mais, comme l'univerſalité d'un déluge quelconque eſt abſolument inſoutenable, il faut chercher une autre explication à cette multiplicité de déluges. Notre hypotheſe la fournit. Ces déluges n'ont été autre choſe que des éruptions particulieres de quelques grands lacs. Ainſi le déluge de Deucalion a été l'éruption du lac dont le deſſéchement forma les campagnes de la Theſſalie. C'eſt par un pareil événement que le Pont Euxin, qui autrefois étoit un lac enfermé dans des montagnes, s'ouvrit le paſſage dans la Mer *Egée*, & cauſa le déluge dont parle Polybe. Ces éruptions produiſirent une double augmentation de terrein ſec. D'un côté, les fonds des lacs furent deſſéchés, & de l'autre les décombres portées dans les endroits où l'Océan a eu peu de profondeur, y formerent un ſol ſec. C'eſt très probablement de cette derniere façon que fut formé tout le plat pays de l'Egypte.

On conçoit fort bien comment un peuple peu répandu, & occupant le pays ſitué entre la mer & un grand promontoire, a pû croire qu'une pareille inondation ait été générale. Il eſt naturel que Noé & Deucalion ayent crû bonnement, qu'ils étoient les ſeuls hommes de la terre échappés de ces terribles cataſtrophes.

Notre hypotheſe fournit, en ſecond lieu, une explication fort aiſée, non ſeulement des pétrifications dont j'ai déjà parlé, mais encore de tout ce qu'on a obſervé touchant les corps hétérogenes dont les diverſes couches de terres ſont remplies. Dans une diſſertation ſur l'origine des Montagnes, que j'ai publiée il y a près de vingt ans, j'ai allégué quelques faits obſervés dans les Alpes, qui juſqu'à préſent ſe

ſont

ſont refuſés à toutes les hypotheſes connues ſur ces matieres. Je me flatte que quiconque voudra ſe donner la peine de réfléchir ſur ces faits, après avoir lû la conjecture expliquée ici, trouvera leur explication ſans difficulté. Qu'une montagne, par exemple, élevée de trois mille pieds au deſſus du niveau de la mer, ait pû être couverte par une inondation, d'un amas prodigieux de terres & de cailloux mêlés enſemble; c'eſt une choſe facile à concevoir, dès que l'on ſait qu'à une diſtance médiocre de cette montagne il y a des vallées dont le ſol eſt de deux mille pieds plus élevé que la montagne dont on vient de parler. L'éruption de ces vallées a donc fort bien pû produire l'effet dont il s'agit.

Quant aux corps marins que l'on trouve en terre dans les endroits peu élevés, j'ai déja remarqué comment cela a dû arriver dans notre ſyſteme. Pour ceux que l'on trouve à des hauteurs conſidérables, il faut réfléchir ſur l'énorme impétuoſité de l'eau qui ſort par une preſſion de quelques milliers de pieds. Or une telle impétuoſité a dû accumuler à de très grandes hauteurs la maſſe de terre que l'eau rencontroit en ſortant par des ouvertures faites aux pieds des montagnes.

Ne pourroit-on pas, en troiſieme lieu, rendre raiſon par notre hypotheſe de l'exiſtence des grands lacs aux pieds des Alpes? Le Lac *de Geneve*, celui *de Conſtance*, celui *de Zuric*, celui *des quatre villes forêtieres*, celui *de Thun*, le *Lago maggiore*, ſe trouvent viſiblement aux gorges des montagnes: & quiconque a été ſur les lieux, tombera facilement d'accord, qu'il eſt très probable que ces grands lacs ont été creuſés par la force des eaux ſorties des vallées voiſines avec une grande impétuoſité avant que ces vallées ayent été entierement ouvertes.

Je remarque, en quatrieme lieu, que la déclinaiſon de la ligne horizontale qu'on obſerve preſque dans toutes les couches des rochers qui ſe trouvent à la ſurface des montagnes, s'explique très naturellement dans notre ſyſteme. Car les écoulemens des eaux ont dû cauſer

de plus d'une maniere des éboulemens conſidérables dans les montagnes. Les couches formées par les dépôts ou ſédimens de pluſieurs inondations ſucceſſives ont été horizontales dans leur origine; un écroulement ſurvenu a néceſſairement changé cette poſition.

On voit bien que les événemens dont je viens de parler, ont dû ſe ſuccéder dans des intervalles de pluſieurs ſiecles. L'hiſtoire ne nous a conſervé probablement que les dernieres grandes éruptions. Il eſt probable, que longtems avant Noé, il y a eu pluſieurs déluges en Aſie, & pluſieurs autres dans la Grece avant Deucalion. Car il n'y a pas la moindre raiſon de croire que l'état primitif de la Terre, tel que nous l'avons ſuppoſé, n'ait duré que peu de tems; & que les changemens qui ont donné à la Terre ſa forme actuelle, ſe ſoyent ſuccédé dans des eſpaces de tems peu conſidérables. Cela peut & doit avoir occupé bien des ſiecles. Il arrive même encore aujourd'hui, quoique bien en petit, des révolutions ſemblables à celles dont je viens de parler. Dans des pays montagneux, il y a quelquefois des inondations qui ajoutent de nouvelles couches aux campagnes, qu'elles déſolent en couvrant les champs de terre & de cailloux, à la hauteur de pluſieurs pieds.

Je m'arrête ici, parce que je crois qu'il ſeroit ſuperflu d'entrer dans un plus grand détail. Les faits généraux que je viens d'expliquer par mon hypotheſe ſuffiſent pour juger de ſa valeur, & pour en montrer l'application à des faits particuliers.

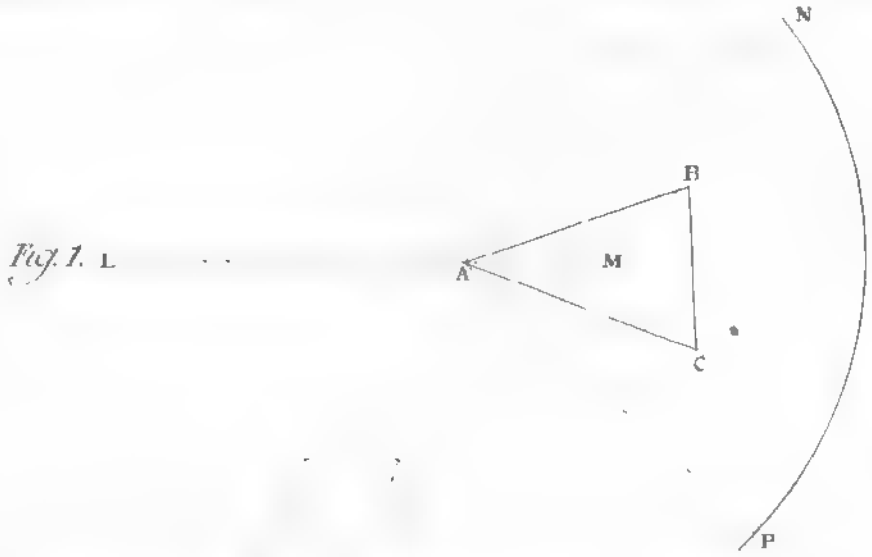


Fig. 1.

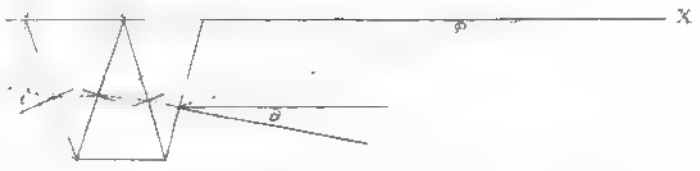


Fig 2.

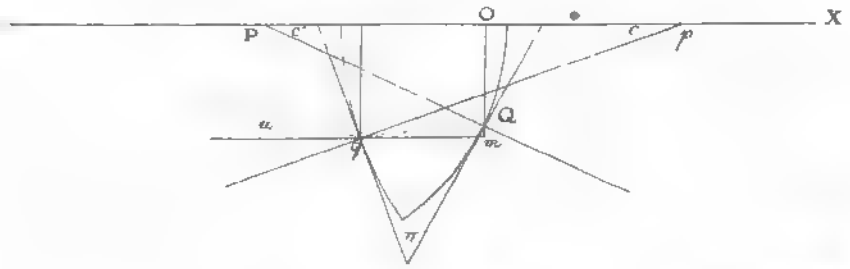


Fig 3.

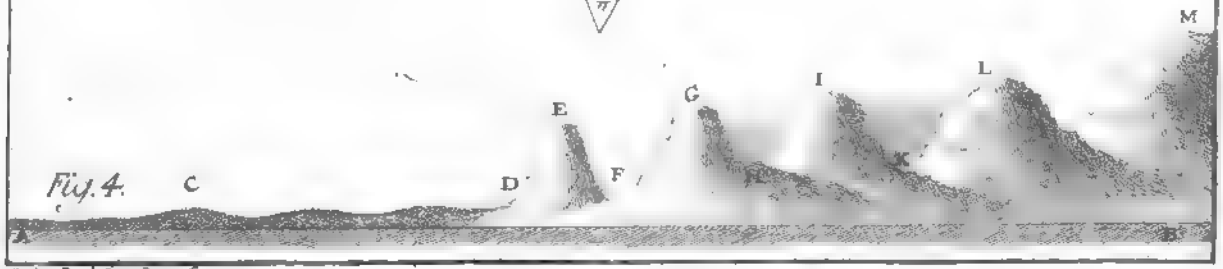


Fig. 4.

DEUX DESCRIPTIONS DE CETTE ESPECE D'HOMMES, QU'ON APPELLE NEGRES-BLANCS,

COMMUNIQUÉES

PAR M. DE CASTILLON. (*)

Je crois devoir communiquer à l'*Académie* deux deſcriptions que j'ai reçues de *Surinam*. Elles regardent cette eſpece d'hommes qu'on appelle *Negres-Blancs*. Une de ces deſcriptions eſt de M. *Erneſt* CASTEL, homme de Lettres établi à *Paramaribo*: l'autre eſt de M. *Philippe* FERMIN, Docteur en Médecine à *Maſtricht*. Cet Obſervateur, bien connu dans la République des Lettres, a paſſé, comme on ſait, pluſieurs années à *Surinam*. L'un & l'autre eſt témoin oculaire de ce qu'il rapporte.

Le Negre-blanc vû par M. CASTEL, eſt fils d'un Negre & d'une Négreſſe de plus noirs. Il a la peau *blanche comme la cire*, la laine & tous les poils *blancs*, les yeux rouges & chaſſieux. Il voit beaucoup mieux à la clarté de la lune qu'à la lumiere du ſoleil. M. CASTEL juge que ce Negre-blanc étoit l'an paſſé (1763) agé d'environ trente ans. (**)

M. FERMIN a conſidéré avec ſon attention ordinaire un Negre-blanc appellé *Jean* WITT, demeurant au Plantage nommé *Voſ-*

(*) Lû en 1764.

(**) Quelques affaires particulieres contenues dans la Lettre de M. CASTEL, qui renferme cette rélation, m'ont empêché de la dépoſer aux Archives de l'Académie. J'y ai dépoſé celle de M. FERMIN.

ſembourg. Le pere & la mere de *Jean* WITT ſont créoles & très noirs. Sa mere a mis au monde huit enfans; le premier & le quatrieme, mulâtres; le ſecond, le ſixieme, le ſeptieme & le huitieme, noirs; le troiſieme étoit cette Négreſſe blanche, dont il eſt parlé dans l'*Hiſtoire* de l'ACADÉMIE *des Sciences de Paris* pour l'an 1734 (*); le cinquieme eſt celui dont il s'agit à préſent.

Il naquit le 12 Mars 1738, avec tous les traits qui diſtinguent les Negres-blancs. Il a le *nez extrêmement gros, plat, & large; les levres fort groſſes;* & les deux premieres dents de la machoire ſupérieure beaucoup plus longues & plus larges, que les autres. Cette ſingularité ſemble appartenir à l'individu; mais celle qu'on remarque dans les yeux, paroit tenir à l'eſpece, ſi les Negres-blancs conſtituent une eſpece.

Les yeux de *Jean* WITT ont la tunique extérieure, celle que les Anatomiſtes nomment *conjonctive* ou *albuginee*, parſemée de filamens rougeâtres; l'iris percée d'un trou au milieu, & *marbrée de gris & de blanc;* & la *prunelle couleur de feu*, & d'un éclat pareil à celui du plus beau brillant: elle répand dans l'obſcurité une lumiere très vive, qui diſparoit au grand jour. Cet homme apperçoit les objets en tout tems, mais confuſément de jour, & diſtinctement dans les ténebres. Quand il veut fixer ſa vue pour marcher ou pour conſidérer quelque choſe, il tourne l'iris de côté, *comme les crabes.* Sa tête & toutes les parties où les hommes ont ordinairement du poil, en ſont bien fournies; & ce poil, même celui de la tête, eſt *blanc* & plus ſemblable au poil de chevre qu'à la laine.

Jean WITT a cinq pieds & quatre pouces; il eſt très bien fait, & ſa peau eſt *blanche comme la cire.*

Je connois encore trois deſcriptions de ces hommes ſinguliers: elles ſont courtes; & l'on ſera, je penſe, bien aiſe de les trouver ici, pour

(*) Voyez plus bas.

pour voir d'un coup d'œil les différences & les conformités; j'ai diſtingué les principales par le caractere italique.

La premiere rélation eſt de M. *de* TREYTORENS, Médecin à *Surinam*, témoin oculaire (*):

„Il y avoit, dit l'Hiſtorien, au tems que la rélation a été écri„te, 9 ou 10 mois qu'une Négreſſe eſclave, grande & bien faite, & „qui avoit déjà eu quelques enfans, en accoucha d'un qui parut fort „ſingulier.“ (Cet Enfant eſt la ſœur de *Jean* WITT, décrit par M. FERMIN.) „Il étoit grand, bien formé, très-blanc, couleur qui „lui a toujours duré. Toute ſa phiſionomie, tous les traits de ſon „viſage étoient d'un Negre, *les levres groſſes & relevées, le nés écraſé & „camus.* De plus il avoit comme les autres Negres de la laine à la tê„te, mais une laine auſſi *blanche* que de la neige - - - „Le blanc de „ſes yeux étoit fort clair, ce qui n'eſt pas rare, mais ſon Iris étoit d'un „rouge fort vif, & couleur de feu, *marbrée ſeulement de quelques „traits blancs tirants ſur le bleu; la prunelle* que nous ne connoiſſons „que noire, & qui doit l'être puiſque c'eſt un vuide, *étoit auſſi très „rouge.* Cet enfant ne vouloit pas ouvrir les yeux quand il faiſoit un „Soleil vif & violent; hors de-là il les ouvroit, & voyoit dans un „lieu peu éclairé. Lorſqu'il vouloit fixer la vue ſur quelque objet, „ſon Iris & ſa prunelle prenoient un mouvement extrêmement rapi„de, comme d'un tournoyement autour de leur centre; & il ſembloit „que l'Enfant ſe fût mis tout d'un coup à chercher quelque choſe des „yeux avec beaucoup d'inquiétude.“

M. *de* VOLTAIRE a inſéré la ſeconde rélation dans ſes *Mélanges d'Hiſtoire, de Litterature, & de Philoſophie* (**); la voici.

„J'ai vû il n'y a pas longtems“ (en 1744) „à Paris un petit „animal blanc comme du lait, avec un mouſle taillé comme celui des

(*) Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'an 1734, pag. 15 & 16, de l'édition in 4to.

(**) Collection complette de ſes Oeuvres, premiere édition, 1756, pag. 326 - - - 336.

„Lapons, ayant comme les Negres de la laine friſée ſur la tête, mais „une laine beaucoup plus fine, & qui eſt de la blancheur la plus éclatante. „Ses cils & ſes ſourcils ſont de cette même laine, mais non friſée; ſes „paupieres d'une longueur qui ne leur permet pas, en s'élevant, de „découvrir tout l'orbite de l'œil, lequel eſt d'un rond parfait. Les „yeux de cet animal ſont ce qu'il y a de plus ſingulier: l'iris eſt d'un „rouge tirant ſur la couleur de roſe: la prunelle, qui eſt noire chez „nous, & chez tout le reſte du monde, eſt chez eux d'une couleur „aurore très-brillante. Ainſi, au lieu d'un trou percé dans l'iris, à la „façon des Blancs & des Negres, ils ont une membrane jaune trans„parente, à travers laquelle ils reçoivent la lumiere - - - Ils regar„dent, *ainſi que marchent les crabes*, toujours de côté - - - Mais „ils ne peuvent ſoutenir la lumiere du Soleil: ils ne voyent bien que „dans le crépuſcule - - - Cette eſpece eſt mépriſée des Negres, plus „que les Negres ne le ſont de nous - - - On avoit tranſporté en „Amérique un de ces petits Maures blancs. On trouve dans les Mé„moires de l'Académie des Sciences, qu'on en avoit donné avis à M. „HELVETIUS. (*)"

La troiſieme deſcription ſe trouve dans la *Vénus phyſique* de M. *de* MAUPERTUIS, (**) qui ne dit pas s'il a vû ou non le petit monſtre dont il parle, & qui fut apporté à Paris en 1744.

„C'eſt (dit cet Auteur) un enfant de 4 ou 5 ans qui a tous les „traits des Negres, & dont une peau très-blanche & blafarde ne fait „qu'augmenter la laideur. Sa tête eſt couverte d'une laine blanche „tirant ſur le roux: ſes yeux d'un bleu clair paroiſſent bleſſés de l'éclat „du jour: ſes mains groſſes & malfaites reſſemblent plutôt aux pattes „d'un animal qu'aux mains d'un homme. Il eſt né, à ce qu'on aſſu„re, de pere & de mere afriquains & très-noirs. - - - „Quoique, (le

(*) C'eſt celui que M. *de* TREYTORENS a décrit; il étoit *né* en Amérique. Voyez ci-deſſus.

(**) Vénus phyſique, ſeconde partie, chap. 4. pag. 115. 116. 117 &c. édition de Lion, 1756.

(le Negre de cette eſpece) „qui eſt actuellement en Eſpagne, & que „Milord MARÉCHAL m'a dit avoir vû, ſoit bien plus agé que celui „qui eſt à Paris, on lui voit le même teint, les mêmes yeux, la mê„me phiſionomie."

Qu'il me ſoit permis d'ajouter quelques réflexions à ces deſcriptions.

1°. Mrs. FERMIN & CASTEL ont-ils vû le même homme, ou deux hommes différents? (*) Le *petit monſtre* de M. *de* MAUPERTUIS eſt-il le même que le *Maure blanc* de M. *de* VOLTAIRE? On croiroit que c'eſt le même, puiſque l'un & l'autre ont paru à Paris la même année, & qu'on ne dit point qu'il en parut deux. Cependant l'un avoit les yeux *d'un bleu clair*, & l'autre l'iris *rouge* & la prunelle *aurore:* l'un avoit la tête couverte d'une laine *blanche tirant ſur le roux*, & l'autre d'une laine *de la blancheur la plus éclatante;* & je n'oſe croire ni que M. *de* VOLTAIRE a mal vû, ni que M. *de* MAUPERTUIS a été mal informé.

2°. On peut conclure des rélations que nous avons juſqu'à préſent, que les traits de Negre, la blancheur de la peau & du poil, la foibleſſe de la vue, & la couleur extraordinaire de l'iris & de la prunelle, appartiennent à la race des Negres-blancs.

3°. Il n'eſt pas fort rare de voir naître des Negres-blancs dans les familles noires. Une ſeule femme en a mis deux au monde à *Surinam* dans l'eſpace de ſix ou huit ans. La même choſe arrive en *Afrique* „dans des endroits où il ne va jamais des Blancs." C'eſt ce qu'on a aſſuré à M. de TREYTORENS (**), à M. *de* MAUPERTUIS (*.*), à M.

(*) J'avois prié M. Caſtel d'éclaircir ce doute, puiſque M. Fermin, étant retourné en Europe, ne le pouvoit pas. Ma Lettre trouva M. Caſtel attaqué d'une cruelle maladie, qui ne lui a pas juſqu'à préſent permis de faire les recherches néceſſaires. *Note ajoutée en 1768.*

(**) *Hiſtoire de l'Académie des Sciences de Paris, loco citato.*

(*.*) *Vénus phyſique, loco citato.*

à M. Castel. On ajoute qu'il y a une race entiere de ces hommes, une eſpece abſolument différente des autres; que cette race habite le milieu de l'*Afrique;* & que ſa principale habitation eſt près du Royaume de *Lovango.* Le fait eſt-il certain? Juſqu'à ce que j'en aie des preuves ſuffiſantes, j'imiterai la retenue de l'Académie des Sciences de *Paris* (*), qui, ſur la foi „de quelques relations d'*Afrique*" parle „de „certains peuples blancs, ou du moins - - de *certains hommes blancs*, „qui habitent dans le païs des Noirs." Cette eſpece eſt mépriſée des Negres, qui „ne les traitent pas d'hommes, & les chaſſent comme „des bêtes."(**) J'en trouve la raiſon dans une obſervation que M. Castel me communique ſur le rapport des Negres tranſportés en Amérique. Les Negres de Guinée regardent la naiſſance d'un Negre-blanc, comme le préſage d'un grand malheur qui menace la famille où il nait; & pour détourner ce malheur, les parens ont grand ſoin de faire périr les monſtres de cette eſpece. Cette ſuperſtition s'eſt apparemment étendue, comme c'eſt l'ordinaire, & a fait croire aux Negres que la rencontre des Negres-blancs étoit de mauvais augure, & que par conſéquent il falloit les détruire.

Il ſe peut ſans doute qu'on trouve au *Sénégal* des familles entieres de cette eſpece, & qu'on ait vû parmi les Noirs, des Blancs dont la blancheur ſe tranſmettoit de pere en fils. (*.*) Mais il n'en réſulte point une eſpece différente; ce n'eſt qu'une variété accidentelle, comme celle des gouteux de pere en fils; celle des hommes à ſix doigts; ou celle de ces Negres, qui, ſelon M. Castel, n'ont que quatre doigts à chaque main, & deux à chaque pied. On en a d'abord fait une nation entiere, & pour obſerver la ſymmétrie, on a retranché deux doigts à chaque main. On s'eſt bien gardé d'en ajouter deux à chaque pied; deux doigts s'écartent plus du nombre ordinaire que quatre. Qu'y a-t-il de vrai en cela? Le voici. Les Negres ainſi conformés ſortent d'un endroit plus prochain des colonies Eſpagnoles, que des colonies Hollandoiſes; ils mêlent des termes Eſpagnols à leur lan-

(*) *Hiſtoire de l'Acad. des Sciences de Paris, loco citato.*
(**) Maupertuis, *Vénus phyſique, loco citato.*
(*.*) *Vénus phyſique, loco citato.*

langage; les Eſpagnols ont coutume de punir leurs eſclaves en leur coupant un doigt à chaque faute: la conſéquence eſt facile à tirer; le merveilleux diſparoit, & la nation ſe réduit à quelques individus mutilés & à leurs deſcendans tout au plus.

Je ſouhaiterois donc d'être convaincu par de bonnes preuves que l'*eſpece* des Negres-blancs exiſte. Il ſeroit ſingulier que cette eſpece eût le privilege d'exiſter par elle-même, & d'être augmentée par les enfants que les Negres produiſent quelquefois. Il y a des races blanches; elles n'ont jamais donné naiſſance à des Negres, que je ſache. Il y a des races Negres; il n'en eſt jamais ſorti un vrai blanc, ſi ce n'eſt celui dont je vai dire un mot, d'après M. Fermin. Le fait eſt remarquable par plus d'une raiſon.

Une Négreſſe appartenant au plantage nommé la *Perſévérance*, agée d'environ 28 ans, accoucha le 13 Juin 1760, à terme, de deux jumeaux, également grands, très-bien formés, & d'une beauté accomplie. La premiere étoit une fille, noire comme la mere. Un quart d'heure après, vint au monde un garçon blanc comme un Européen. Il n'avoit pas un ſeul trait de Negre; & la fille les avoit tous. Chaque enfant avoit ſon arriere-faix.

M. Fermin trouve qu'après un cas de cette nature on ne peut plus révoquer en doute la ſuperfétation. Il eſt perſuadé que le pere de la fille étoit un Negre, & le pere du garçon un Blanc. C'eſt le premier exemple qu'on peut oppoſer aux expériences, qui toutes ont concouru juſqu'à préſent à montrer que les Blancs avec des Négreſſes, ou les Negres avec des Blanches, produiſent des Mulâtres, comme les Negres avec des Indiennes produiſent des *Kabougles*, & comme les Kabougles avec les Blancs produiſent des Mulâtres, dont les fils ſont preſque Blancs, & les petits-fils Blancs entierement.

MÉMOIRE
SUR
UNE CONGÉLATION REMARQUABLE.
PAR M. DE CASTILLON. (*)

1.

Le froid ſurvenu à la fin de Décembre 1767, ſurprit pendant la nuit deux bouteilles d'eau, que j'avois laiſſées dans un petit laboratoire, où je faiſois quelques expériences. Une de ces bouteilles contenoit de l'eau commune, & l'autre de l'eau diſtillée, que j'avois reçue l'été paſſé du célebre M. *Margraff*. La congélation de l'eau commune n'avoit rien de particulier; mais la congélation de l'eau diſtillée me frappa.

2. On voyoit au milieu de la glace un noyau ſolide & uni. Il étoit d'un diametre aſſez conſidérable vers la ſurface de la glace; & il alloit en diminuant vers le fond de la bouteille. Il avoit la figure d'une maſſue. De ce noyau partoient des filets d'air par étages, qui s'étendoient de tous côtés, & qui étoient réguliérement inclinés, & ſuivoient aſſez exactement la convexité intérieure du fond de la bouteille, qui, à l'ordinaire, étoit enfoncée en dedans. Ils étoient entremêlés de petits globules d'air. On auroit dit que cette bouteille renfermoit un de ces goupillons dont on ſe ſert pour nettoyer les pots, qui portoit de petites perles entre les crins qui le forment.

Planche III. Fig. 1.

3. Cette différence dans la glace indique manifeſtement que la diſtillation produit un changement conſidérable dans la contexture des

(*) Compoſé à la fin de Janvier 1768.

des particules qui conſtituent l'eau, ou du moins dans l'entrelaſſement des particules de l'eau, & de celles de l'air contenu dans l'eau.

4. Il y avoit dans ce laboratoire des vaſes de verre ouverts, qui contenoient les uns de l'eau forte, & les autres différentes ſolutions. L'odeur que ces ſolutions répandoient, étoit une preuve inconteſtable de leur évaporation. Je penſai que, peut-être, la figure particuliere de cette congélation provenoit des particules qui s'étoient exhalées de ces fluides. Il falloit d'abord s'aſſurer de la juſteſſe de cette conjecture, & examiner enſuite pourquoi les mêmes exhalaiſons produiſoient des effets différens dans les deux ſortes d'eau.

5. Les particules exhalées de mes fluides pouvoient, à mon avis, avoir cauſé ce phénomene, ou parce qu'elles ſe mêloient avec l'eau diſtillée pendant que la glace ſe formoit; ou parce qu'elles s'y étoient mêlées auparavant.

6. Pour décider cette alternative, je tranſportai les deux bouteilles dans une chambre échauffée & à l'abri de toute exhalaiſon: je les y laiſſai juſqu'à ce que toute la glace fût fondue, & pluſieurs heures après. Enſuite je les expoſai au froid dans un endroit fort éloigné de mes ſolutions. Il en réſulta le même effet. La glace ordinaire ſe montra dans la bouteille pleine d'eau commune; & le goupillon parut dans la bouteille pleine d'eau diſtillée. Cette différence de figure n'eſt donc pas l'effet des exhalaiſons qui ſe mêlent avec l'eau pendant que la glace ſe forme.

7. Eſt-elle produite, cette différence de figure, par un mélange antérieur? ou par la nature même de l'eau diſtillée? Cette queſtion ne pouvoit trouver ſa réponſe que dans une nouvelle expérience. Je l'ai faite.

J'ai mis de l'eau commune dans un alambic de verre bien propre, que j'ai placé dans un bain de ſable. Une chaleur très douce a fait lentement paſſer dans mon récipient moins que le tiers de l'eau

contenue dans l'alambic. Cette eau fraîchement diſtillée, & ſûrement exemte de tout mêlange d'exhalaiſons étrangeres, a donné une congélation aſſez ſemblable à la premiere, & telle qu'on la voit dans la Planche IV. Figure 2.

8. Cependant trois différences ſenſibles diſtinguoient la congélation de l'eau fraîchement diſtillée, de la congélation de l'eau diſtillée depuis quelque tems.

1°. Les filets & les globules étoient plus conſidérables dans la premiere que dans la ſeconde.

2°. Ces filets ſembloient partir dans la ſeconde d'un centre, & non d'un axe, comme dans la premiere.

3°. Le noyau étoit très petit dans la premiere, & conſidérable dans la ſeconde.

9. Pour voir la différence que la figure du vaſe mettoit dans celle des filets, j'ai pris un globe de verre, & je l'ai à moitié rempli Planche V. de l'eau que j'avois diſtillée. On le voit repréſenté dans la Fig. 3. La partie ſupérieure du globe, qui étoit reſtée vuide, étoit de place en place tapiſſée intérieurement de gouttes d'eau, qui ſe ſont gelées ſans filets ni globules. On les voit dans la figure.

10. L'eau a commencé à geler par le milieu. D'abord la glace étoit unie; on n'y voyoit ni filets ni globules: ils commencerent à paroître à meſure que la glace s'étendit. Au commencement les filets étoient fort minces, & les globules fort petits. Plus la glace devenoit forte, plus le volume des filets & des globules devenoit conſidérable.

11. La ſurface ſupérieure de la glace étoit aſſez inégale, & reſſembloit à la ſurface d'un bois vermoulu. C'eſt ce que j'ai vu bien diſtinctement dans la ſurface de la glace contenue dans la bouteille de la Fig. 2, qui s'eſt caſſée.

12. L'eau

12. L'eau renfermée dans le globe s'eſt gelée plus difficilement & plus tard que celle qui étoit dans les bouteilles; & la ſurface de la glace étoit plus inégale.

13. L'eau a commencé à dégeler par la ſurface extérieure, attenante aux parois des vaſes. A meſure que l'eau dégeloit, on voyoit l'air ſortir des globules & des filets, & monter à la ſurface. Quand l'eau a été preſque entiérement dégelée, le peu de glace qui reſtoit, n'avoit plus qu'un petit nombre de filets, minces & courts, qui ſuivoient exactement les contours de l'élévation inférieure du fond de la bouteille.

14. Il eſt donc certain que la différence intrinſeque de l'eau non diſtillée & de l'eau diſtillée, cauſe la différence qu'on obſerve dans leurs congélations. Mais eſt-il néceſſaire que, pour produire cette différence intrinſeque, le feu ait réduit l'eau en vapeurs? Ne ſuffit-il pas qu'il ait agi fortement ſur elle? Non. J'ai fait bouillir, à gros bouillons, & pendant longtems, de l'eau commune; je l'ai laiſſée refroidir, & dès que je lui ai trouvé la température de l'air de la chambre, je l'ai expoſée au froid; elle n'a donné qu'une congélation ordinaire.

15. Je me ſuis ſervi pour meſurer d'un pied de Rhin, qui contient exactement $\frac{8}{9}$ du pied de Roi; & pour peſer, du marc de Berlin, qui peſe 4408 grains de Paris, comme l'a déterminé M. *Tillet* de l'Académie des Sciences de Paris, & comme je l'ai vérifié.

16. J'ai donc trouvé que (*)

1. L'eau bouillie eſt un peu plus peſante que l'eau commune (*a*).

2. Le volume de l'eau bouillie réduite à une température moyenne, eſt au volume de la même eau gelée, comme 9 à 10 (*b*).

 3. La

(*) Voyez à la fin du Mémoire.

3. La gravité ſpécifique de l'eau bouillie, eſt à la gravité ſpécifique de la glace qui en provient, comme 1 à 0,9 (*c*).

4. La gravité ſpécifique de l'eau bouillie eſt à la gravité ſpécifique de l'eau diſtillée depuis quelque tems, comme 1 à 1,00256 (*d*).

5. L'eau fraîchement diſtillée eſt un peu plus peſante que l'eau diſtillée depuis quelque tems (*e*).

6. La gravité ſpécifique de l'eau diſtillée depuis quelque tems, eſt à la gravité ſpécifique de la glace qui en provient, comme 1 à 0,929 (*f*).

7. L'eau diſtillée depuis quelque tems, en gelant, occupe l'eſpace qu'elle occupoit auparavant, & de plus la treizieme partie de cet eſpace (*g*). Ainſi l'eau diſtillée ſe dilate moins que l'eau bouillie.

8. La gravité ſpécifique de la glace provenue de l'eau bouillie, eſt à la gravité ſpécifique de la glace provenue de l'eau diſtillée depuis quelque tems, comme 1 à 1,0341 (*h*).

Je n'ai pas pû déterminer la gravité ſpécifique de la glace que m'a donnée l'eau fraîchement diſtillée, parce que la bouteille s'eſt caſſée, & l'augmentation du volume a été inſenſible dans le globe. L'eau en occupoit la moitié aſſez exactement; l'augmentation d'un treizieme, environ, de ſon volume, répandue dans une zone circulaire fort large, avoit ſi peu de hauteur, que je n'ai pas pû l'apprécier.

Le tout a été meſuré & peſé avec toute l'exactitude dont je ſuis capable.

17. Les faits que je viens de rapporter, ſuggerent à mon avis, les conſéquences ſuivantes.

1. L'eau diſtillée eſt plus peſante que l'eau bouillie; donc la ſeconde contient ou plus d'air, ou moins de parties terreſtres, que la premiere.

2. Mais

2. Mais l'eau bouillie, en gelant, ſe raréfie plus que l'eau diſtillée; donc l'eau bouillie contient plus d'air que l'eau diſtillée. On ſait d'ailleurs que l'eau diſtillée contient moins de parties terreſtres que l'eau bouillie; ainſi l'eau diſtillée eſt plus peſante par la ſeule raiſon que, ſous le même volume, elle contient plus de particules d'eau.

3. L'eau diſtillée fraîchement eſt un peu plus peſante que l'eau diſtillée depuis quelque tems; donc un peu d'air ſe mêle à la longue avec l'eau diſtillée.

4. Mais les filets & les globules ſont plus conſidérables dans la glace de l'eau fraîchement diſtillée que dans celle de l'eau diſtillée depuis quelque tems; donc l'air eſt plus intimément mêlé avec la ſeconde qu'avec la premiere.

5. Une eau quelconque a été pluſieurs fois réduite en vapeurs, &, pour ainſi dire, diſtillée par l'action de l'air & du Soleil.

Cependant la combinaiſon des particules d'eau & des particules d'air n'eſt pas la même dans l'eau commune & dans l'eau diſtillée. Cette différence ne peut venir que de la différence des circonſtances; c'eſt à dire de la préſence ou de l'abſence de la chaleur. N'en peut-on pas déduire que l'action du Soleil eſt différente de l'action de l'air; que l'eau eſt *décompoſée* par le Soleil; & qu'elle eſt *diſſoute* par l'action de l'air, comme *Locke* l'a conjecturé, & comme M. *le Roi* l'a montré par des expériences fort ingénieuſes? Ou, ce qui revient au même, que l'action de la chaleur ſépare les particules d'eau, des ſels & autres corps hétérogenes; & l'action de l'air ne les ſépare point. Auſſi l'eau de pluye, qui eſt un mêlange d'eau diſſoute par l'air, & d'eau décompoſée par le Soleil, eſt moins pure que l'eau diſtillée, & plus pure que l'eau commune, qui s'eſt de nouveau imprégnée de parties hétérogenes.

Les

Les filets & les globules, qu'on remarque dans la congélation de l'eau diſtillée, s'augmentent à meſure que la glace devient plus forte: quelles ſont les limites de cette augmentation?

En quoi differe la congélation de l'eau diſtillée une ſeule fois, de la congélation de l'eau diſtillée pluſieurs fois?

Le froid artificiel donne-t-il la même congélation que le froid naturel?

Ce ſont des queſtions auxquelles je ne ſaurois actuellement répondre. Une maladie qui m'eſt ſurvenue, a interrompu le cours de mes expériences. Je les reprendrai avec plaiſir, ſi l'Académie le trouve à propos.

CALCULS,

ſur leſquels ſont fondées les aſſertions du §. 16.

J'ai marqué exactement la hauteur de la glace dans la bouteille. J'ai peſé la glace avec la bouteille, enſuite l'eau dégelée avec la même bouteille; & j'ai trouvé le même poids. J'ai meſuré le ſolide d'eau dans le priſme décrit dans mon Mémoire (*) ſur la diſſolution du ſel marin dans l'eau. J'ai rempli la bouteille de la même ſorte d'eau juſqu'à la hauteur de la glace. Je l'ai peſée, & meſurée dans le même priſme. Voici le réſultat de mes opérations.

(*a*) L'eau bouillie que j'ai fait geler, peſoit,

avec

(*) Ce Mémoire appartient de droit au recueil de l'année courante 1768. On l'a inféré dans celui-ci par des raiſons particulieres, qui ont retardé l'impreſſion du Mémoire ſur la diſſolution du ſel marin. Le priſme dont il eſt parlé, eſt un priſme creux d'une capacité connue.

avec la bouteille, - - loths 77,875.
La bouteille vuide peſoit, loths 47,375.
Donc l'eau peſoit, loths 30,5.

Cette eau occupoit 24,8 pouces cubiques; donc un pied cubique de cette eau, ou 1728 pouces cubiques, peſent loths 2125, 161, & un peu plus; qui font un peu moins que livres 66,4113.

En prenant un milieu entre pluſieurs expériences que j'ai faites, & neuf eſtimes de neuf Auteurs dignes de foi, je trouve qu'un pied cubique d'eau commune peſe livres 66,055: donc la gravité ſpécifique de l'eau bouillie eſt à la gravité ſpécifique de l'eau commune comme 1 à 0,995, un peu moins.

Je remarque en paſſant que M. *Ludolff* a fixé le poids d'un pied cubique d'eau à livres 64, onces 7, dragmes 2, (Mém. de l'Acad. 1749. pag. 35.); & que par conſéquent ſon pied étoit plus petit que le mien.

(*b*) L'eau bouillie qui rempliſſoit l'eſpace que la glace avoit occupé, peſoit net loths 33,875; donc elle occupoit pouces cubiques 27, 544, & un peu plus; & la meſure actuelle de cette eau s'eſt trouvée telle que le calcul la donne. Car la baſe du priſme a 4 pouces quarrés, & la hauteur de l'eau étoit de $6\frac{9}{10}$ pouces, & un peu moins. Mais 27,544 — 24,8 = 2,744; & 2,744 à 24,8 :: 1 à 9,4; & 24,8 à 27,544 :: 1 à 1,11.

(*c*) Puiſque 27,544 pouces cubiques de glace d'eau bouillie peſent 30,5 loths; un pied cubique de la même glace péſe loths 1913,448, & un peu moins; & 2125,161 à 1913,448 comme 1 à 0,9.

(*d*) L'eau diſtillée, que j'ai fait geler, peſoit
avec la bouteille loths 77,25.
La bouteille vuide peſoit 41 loths.
Reſte poids de l'eau, loths 36,25.

Cette eau occupoit 29,4 pouces cubiques; donc un pied cubique de cette eau peſoit loths 2130,612; &

2125,161 à 2130,612 comme 1 à 1,00256.

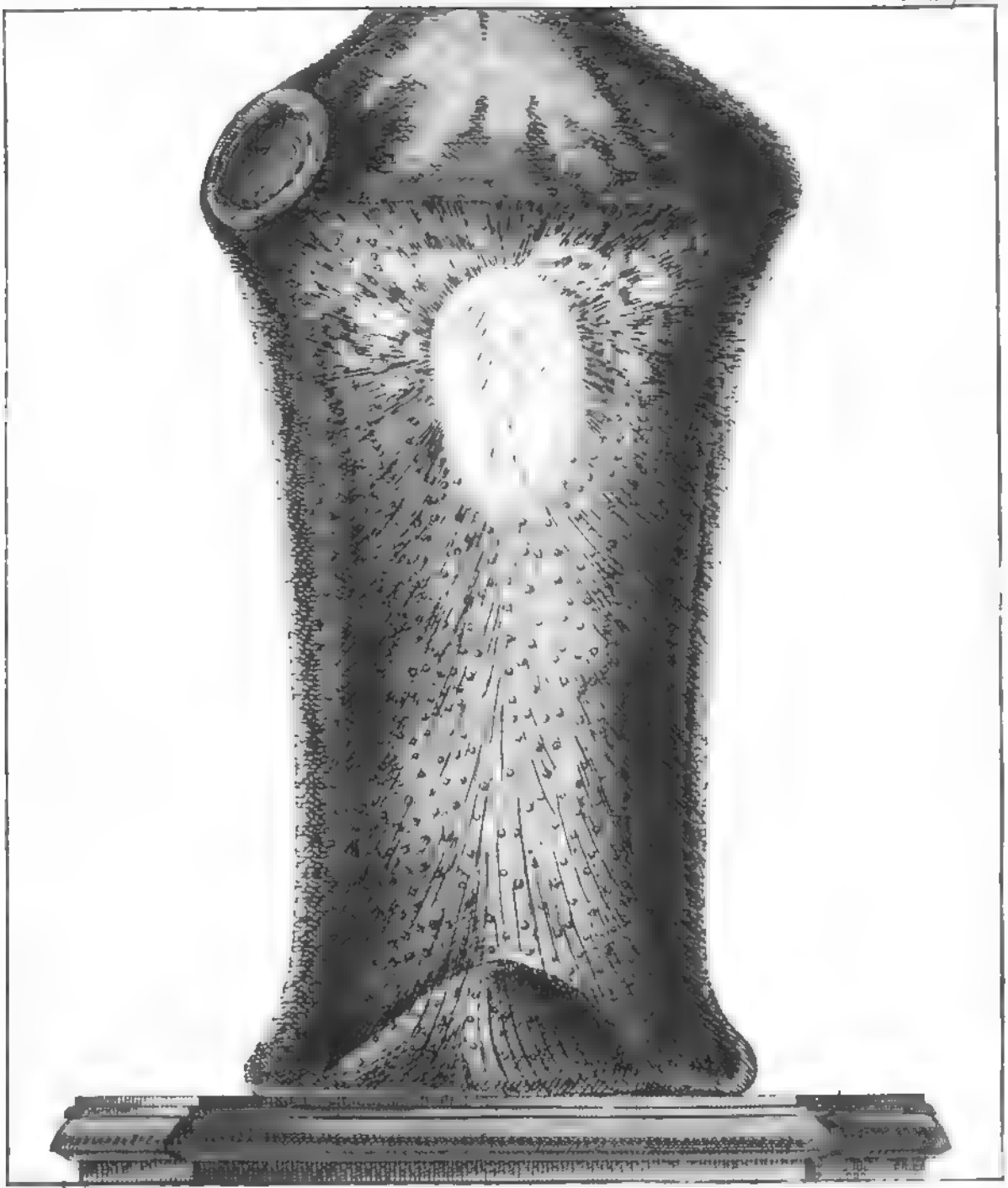
(*e*) L'eau fraichement diſtillée, que j'ai miſe dans le globe, peſoit avec le globe, loths 64,65. Le globe vuide peſoit loths 11,65; donc cette quantité d'eau fraichement diſtillée peſoit loths 53. Elle occupoit 42,4 pouces cubiques; donc un pied cubique d'eau fraichement diſtillée peſoit loths 2160; & l'eau diſtillée depuis quelque tems peſoit loths 2130,612.

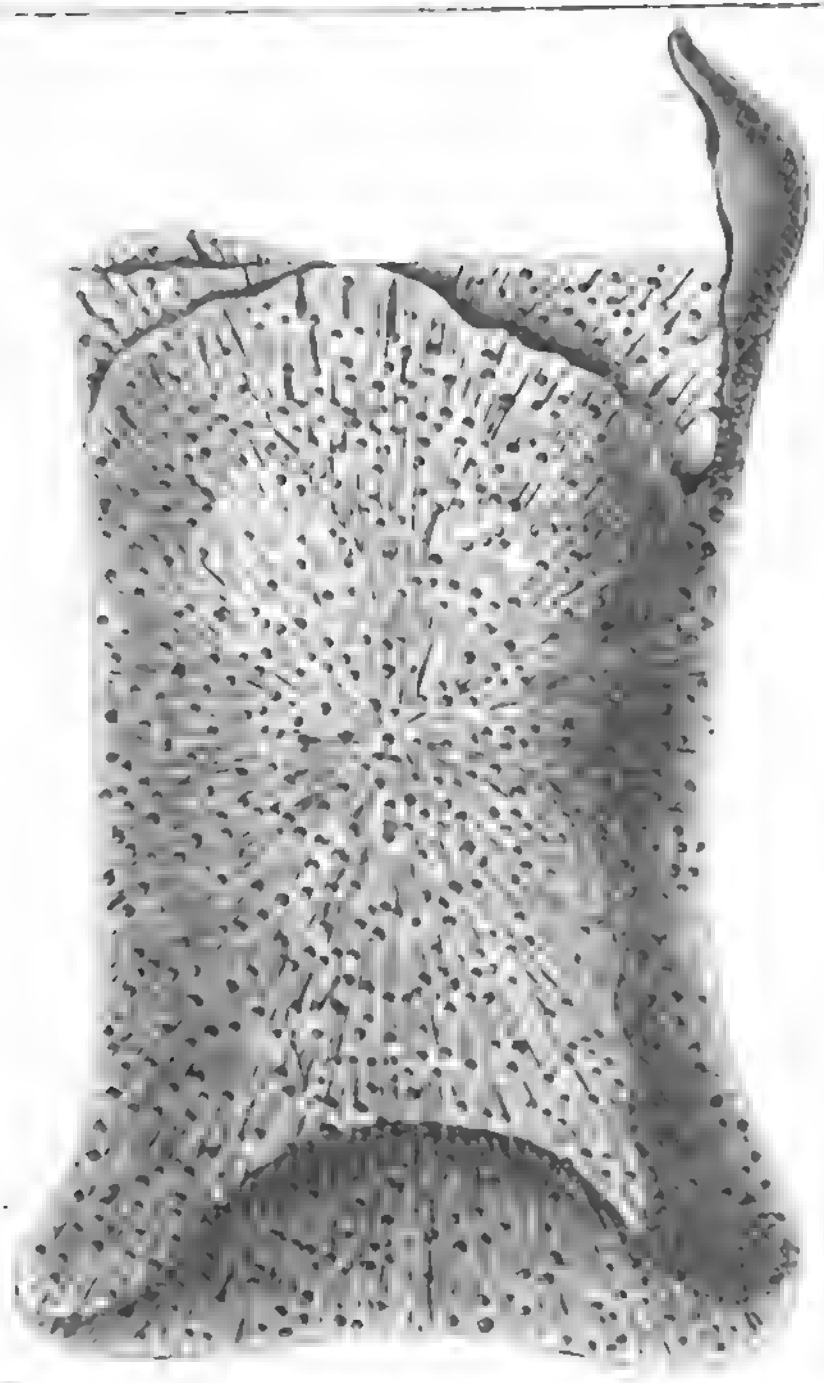
(*f*) L'eau diſtillée depuis quelque tems, qui rempliſſoit l'eſpace occupé par la glace, peſoit net 39 loths; donc cette glace occupoit 31,63 pouces cubiques; car 36,25 loths à 39 loths, comme 29,4 pouces cubiques à 31,63 pouces cubiques; ce qui eſt très conforme à la meſure priſe avec le priſme, dans lequel l'eau montoit à $7\frac{1}{8}$ pouces.

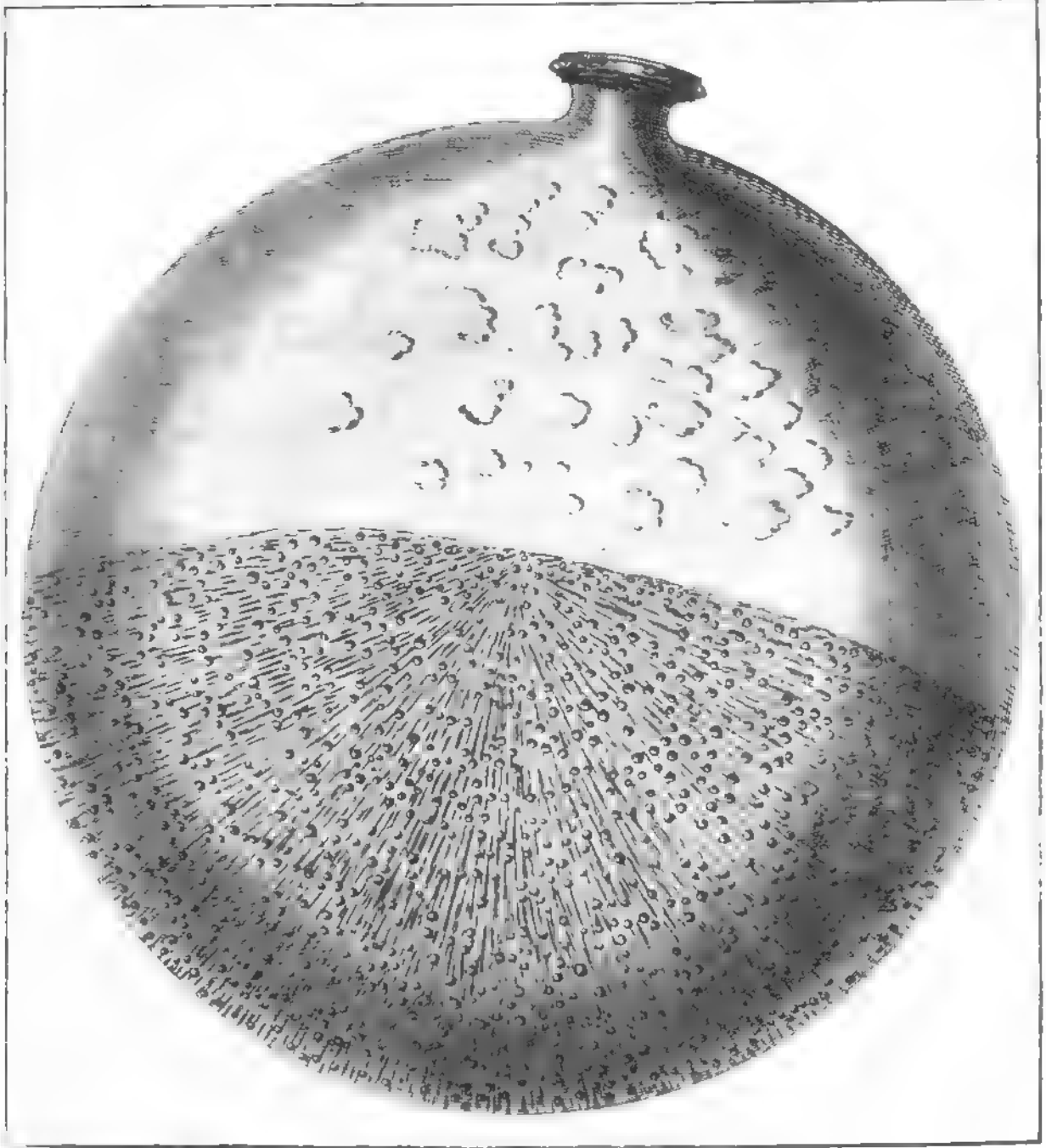
Puiſque 31,63 pouces cubiques de cette glace peſent 36,25 loths, un pied cubique de la même glace peſe 1980,398 loths. Et 2130,612 à 1980,398 comme 1 à 0,929; plus exactement, comme 1 à 0,928571428571428571 &c.

(*g*) L'eau diſtillée depuis quelque tems, dégelée, occupoit 29,4 pouces cubiques; la même quantité d'eau gelée occupoit 31,63 pouces cubiques; & 31,63 — 29,4 = 2,23; & 2,23 à 29,4 comme 1 à 13,18,

(*h*) Un pied cube de glace d'eau bouillie, peſe loths 1913,448. Un pied cube de glace d'eau diſtillée depuis quelque tems, peſe loths 1980,398; & 1913,448 à 1980,398 comme 1 à 1,0349.







MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LES DIFFICULTÉS QU'ON RENCONTRE DANS L'EXÉCUTION DES VERRES OBJECTIFS DÉLIVRÉS DE TOUTE CONFUSION. (*)

PAR M. L. EULER.

1.

Après avoir propoſé pluſieurs moyens de délivrer les verres objectifs des Lunettes de la confuſion cauſée par leur ouverture, je ne ſaurois nier que pluſieurs eſſais que j'ai faits pour exécuter de tels verres, n'ont eu aucun ſuccès; & quelques ſoins que l'Artiſte ait apporté à conſtruire des verres ſur les meſures que je lui avois préſentées, je n'ai jamais pu remarquer, que leur combinaiſon produiſît une moindre confuſion, qu'un verre objectif ſimple. Ces efforts inutiles m'auroient preſque déterminé à renoncer entiérement à la Théorie qui m'y avoit conduit, ſi le témoignage du célebre M. Short ſur les Objectifs compoſés de M. Dollond ne m'avoit raſſuré, celui-ci aiant heureuſement réuſſi à compoſer un objectif d'un verre convexe & concave, dont la confuſion étoit tout à fait inſenſible.

(*) Lu le 15 Octobre 1761.

2. Convaincu donc de la poſſibilité de tels objectifs, je redoublai mes efforts pour approfondir toutes les difficultés qui peuvent s'oppoſer à l'exécution de mon deſſein, & que notre Artiſte n'a pu encore trouver moyen de ſurmonter. D'abord je voyois bien qu'une petite différence dans la nature du verre, dont la réfraction ſeroit un peu différente de celle que j'avois ſuppoſée dans le calcul, n'y pouvoit être d'aucune conſéquence; & quoique M. Dollond lui-même ait employé deux différentes eſpeces de verres, j'ai déjà ſuffiſamment prouvé, que cette petite différence n'y contribue abſolument rien, & qu'il ne s'agit plus ici de remédier à la diverſe réfrangibilité des rayons, mais uniquement à la confuſion qui réſulte de la figure & ouverture des verres.

3. Entant que les faces des verres ont une figure ſphérique, il eſt certain que les rayons qui paſſent par le milieu du verre, forment un autre foyer, que ceux qui ſont tranſmis par les bords du verre: & à meſure que les rayons s'éloignent du milieu du verre, leurs foyers changent ſuivant une certaine loi, fondée ſur la ſphéricité de chacune de ſes faces. Or, lorſqu'on a bien établi cette loi, il eſt toujours poſſible de conſtruire un autre verre concave en ſuppoſant ſes faces auſſi ſphériques, où le changement des foyers ſuive une loi directement contraire, de ſorte qu'en combinant deux tels verres enſemble, les foyers de tous les rayons ſoient réduits au même point. C'eſt auſſi de ce principe que j'ai tiré les déterminations pour la conſtruction de tels objectifs compoſés, dont l'exécution a pourtant ſi peu répondu à mon attente. Il eſt donc bien important de découvrir la véritable cauſe de ce manque de ſuccès.

4. Le premier ſoupçon tombera ſans doute ſur la figure des faces des verres, qui n'auroit pas été ſi parfaitement ſphérique que je l'ai ſuppoſé dans le calcul: & en effet, quoique les baſſins ſur leſquels on travaille les verres, ſoient parfaitement ſphériques, il y a bien des raiſons de douter, que les verres en reçoivent préciſément la même figure. L'inégalité dans le frottement pourroit bien être aſſez grande

grande pour imprimer au verre une autre courbure vers les bords qu'au milieu. De là il arriveroit que la courbure vers les bords ſeroit ou plus petite ou plus grande que celle du milieu; & dans l'un & l'autre cas, la variation dans le foyer ſuivroit une autre loi que celle que j'avois ſuppoſée dans le calcul. Par conſéquent on ne devroit pas être ſurpris que l'exécution eût ſi mal réuſſi.

5. Mais, quelque fondé que paroiſſe ce ſoupçon, je ne crois pas qu'il renferme la véritable raiſon. Si la courbure des faces étoit moindre vers les bords qu'au milieu, ce ſeroit un défaut bien heureux, & le verre approcheroit d'une de ces figures parfaites, que Deſcartes a déjà découvertes, pour délivrer les verres de toute confuſion; & il ne ſeroit plus queſtion de remédier à ce défaut par l'addition d'un autre verre. Or il s'en faut bien que les verres de notre Artiſte ayent ce défaut; on y remarque plutôt une confuſion très ſenſible, qui n'a que trop beſoin d'être diminuée. Ce n'eſt donc pas aſſurément de ce côté qu'il faut chercher la cauſe du peu de ſuccès des ſoins de notre Artiſte.

6. Mais s'il s'étoit trompé en ſens contraire, & que la variation dans les foyers qui répondent aux bords du verre & à ſon milieu, fût plus grande que je ne l'ai ſuppoſée dans le calcul; il eſt bien vrai, que le verre concave que je propoſe ne ſeroit plus capable de détruire cette confuſion: mais il en devroit toujours détruire une partie, & un autre verre plus concave y remédieroit entierement. Cependant, quelque verre concave que j'aye joint au convexe, je n'ai jamais pu appercevoir la moindre diminution dans la confuſion: il m'a paru plutôt que la confuſion devenoit même plus grande: d'où je tire la facheuſe concluſion, que le défaut dans l'exécution eſt d'une tout autre nature, qu'il n'eſt pas même poſſible d'y remédier par l'addition de quelqu'autre verre que ce ſoit.

7. Pour m'aſſurer mieux des défauts auxquels ces verres pourroient être aſſujettis, j'ai examiné à part le verre convexe, & en y cou-

couvrant tantôt le milieu tantôt les bords, j'ai meſuré exactement dans un lieu obſcur les foyers formés par les rayons qui paſſent tant par le milieu que par les bords du verre, & j'y ai trouvé à peu près la même différence que montre le calcul fondé ſur la ſphéricité des faces. Enſuite j'ai combiné ce verre convexe avec le concave que l'Artiſte avoit fait ſur les meſures preſcrites par la Théorie, & après en avoir couvert tantôt les bords tantôt le milieu, j'ai effectivement remarqué que ces deux foyers ſe réuniſſoient au même point, tout comme j'avois lieu de m'y attendre. Cependant, nonobſtant cette belle réunion des foyers, cet objectif compoſé n'a pas laiſſé de produire une confuſion tout à fait inſupportable, ayant repréſenté tous les objets comme enfoncés dans un brouillard fort épais.

8. Ce brouillard ne ſauroit être attribué qu'à une réfraction irréguliere des rayons, tout à fait différente de celle qu'une petite aberration de la figure ſphérique pourroit cauſer. Car, pourvu que la ſurface des verres ſoit bien unie, quand même elle ne ſeroit point ſphérique, on comprend aiſément qu'un tel brouillard n'en ſauroit être l'effet. Je crois donc pouvoir ſoutenir, que la ſurface des verres que j'ai employés dans ces expériences, n'étoit pas unie, mais plutôt remplie d'une infinité de petites éminences & cavités, quoiqu'en gros la figure en ait peut-être été aſſez parfaitement ſphérique. Auſſi un bon microſcope ne manque pas de nous découvrir une telle inégalité dans la ſurface des verres les mieux polis. Cela poſé, ce n'eſt qu'aux éminences que le baſſin communique ſa figure, & les rayons qui tombent dans les cavités, y ſouffrent une réfraction très irréguliere, & étant diſperſés en tout ſens cauſent viſiblement ce brouillard qui empêche que nos objectifs n'ayent le ſuccès eſpéré.

9. Comme cette inégalité dans la ſurface du verre eſt ſans doute fondée dans ſa nature, il eſt impoſſible d'y remédier; & quand même ce défaut ſe trouveroit moins dans une eſpece de verre que dans les autres, on ne ſauroit jamais eſpérer d'en être délivré tout à fait. Mais, pourvu que ces cavités ne fuſſent pas polies, cet effet funeſte dont

dont je viens de parler, n'en ſeroit pas à craindre. Voilà donc le ſeul moyen capable de remédier à cet inconvénient; c'eſt d'empêcher que les petites cavités dont la ſurface du verre eſt remplie, ne reçoivent la politure. C'eſt très mal à propos que la plûpart des Artiſtes pouſſent la politure du verre trop loin, s'imaginant que c'eſt en cela principalement que leur adreſſe doit paroître. Il n'y a aucun doute, que les éminences ne doivent être parfaitement bien polies; mais l'Artiſte doit apporter autant de ſoins que les cavités demeurent non polies, ce qui dépend principalement de la matiere dont il ſe ſert pour la politure; outre que le mouvement du verre doit être fort léger, ſans qu'il ſoit preſſé contre le baſſin.

10. Cette précaution, quelque néceſſaire qu'elle ſoit, n'eſt pas du goût de la plûpart de nos Artiſtes, parce qu'elle exige un tems beaucoup plus long pour polir les verres. La machine dont ils ſe ſervent ordinairement en faiſant tourner le baſſin avec la plus grande rapidité, eſt abſolument contraire à ce deſſein, en ce qu'on eſt obligé d'y preſſer le verre avec beaucoup de force, & que la matiere qui ſert à polir, attaque aiſément les petites cavités, & les rend polies. Auſſi m'a-t-on aſſuré que M. Dollond polit tous ſes verres, qui ſont généralement admirés, ſimplement à la main, le baſſin reſtant en repos & encore à ſec: ces circonſtances n'aboutiſſent ouvertement, qu'à empêcher que les cavités & l'intérieur des pores du verre n'en reçoivent aucune politure. Cependant je doute fort que nos Artiſtes s'accommodent jamais de cette méthode, de peur d'y employer trop de tems.

11. Si je pouvois obtenir des verres travaillés avec cette précaution, je ne douterois plus du ſuccès des verres objectifs compoſés de deux lentilles, l'une convexe & l'autre concave: mais, pour y mieux réuſſir, il me reſte encore une recherche toute particuliere ſur les limites entre leſquelles la pratique doit être renfermée. Les meſures que j'ai preſcrites ſur la conſtruction de ces verres, ſont déterminées à un tel point d'exactitude, qu'on ne ſauroit jamais y atteindre dans l'exécution: on s'en écartera toujours, tantôt plus tantôt moins, & il eſt très

important de déterminer les limites, qu'on ne ſauroit paſſer, ſans que l'ouvrage devienne tout à fait inutile. Cette recherche aura d'autant moins de difficulté, que j'ai déjà établi dans le XIII Volume de nos Mémoires tous les élémens ſur leſquels elle doit être fondée, & partant je n'aurai qu'à en tirer les formules, qui expriment en général la confuſion d'une lunette compoſée d'autant de verres qu'on voudra.

12. Or, en conſervant les mêmes dénominations que j'ai établies dans le dit volume, le demi-diametre de la confuſion eſt exprimé par cette formule:

$$\frac{\mu x^3}{4a^3}\left(\lambda m + \frac{m\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)} + \&c.\right),$$

où j'omets les autres termes provenant des autres verres après les deux premiers, puiſqu'ils ſont ordinairement fort petits, en remarquant ſeulement que le dernier terme, qui répond à l'oculaire, dont la diſtance de foyer ſoit $= v$, ſera $= \frac{\lambda^{(n)}a^3}{m^3 v^3}$. Or, pour que cette confuſion ſoit encore ſupportable, il faut qu'elle ſoit moindre que cette formule $\frac{4\mu}{x^3}$, où x eſt un nombre dont la valeur eſt entre 40 & 50.

13. Le premier verre eſt ici ſuppoſé convexe, dont la diſtance de foyer eſt $= a$, & x exprime le demi-diametre de ſon ouverture, de ſorte que ſi m marque le groſſiſſement, la clarté néceſſaire exige qu'on prenne $x = \frac{m}{50}$ pouces. Enſuite, poſant l'intervalle entre les deux premiers verres $= d$, & la diſtance de foyer du ſecond verre $= -q$, puiſque je le ſuppoſe concave, mes formules donnent

$$d = \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}a \;\&\; q = -\frac{\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}a, \text{ donc } \frac{d}{q} = \frac{-\pi}{\Phi}, \&\text{ partant } d = \frac{\mathfrak{B}\cdot f}{\mathfrak{B}d+q}a \text{ ou } \mathfrak{B} = \frac{q}{a-d} \;\&\; B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}} = \frac{q}{a-d-q}.$$

De là

De là la condition requiſe pour rendre inſenſible la confuſion, ſera contenue dans cette formule:

$$\frac{x^3}{a^3}\left(\lambda m - \frac{m(a-d)^2(\lambda'(a-d)^2+\nu q(a-d-q))}{aq^3} \cdots\cdots + \frac{\lambda^{(n)}}{m^3}\frac{a^3}{v^3}\right) < \frac{1}{x^3}.$$

Or le foyer commun de ces deux verres tombera après le ſecond verre à la diſtance $= \frac{-q(a-d)}{a-d-q}$, laquelle devant être poſitive, il faut qu'il ſoit $q > a - d$.

14. Donc, puiſque $x = \frac{m}{50}$ pouces, en exprimant toutes les meſures en pouces, & prenant $x = 50$, nous aurons

$$\lambda m - \frac{m(a-d)^2}{aq^3}(\lambda'(a-d)^2 - \nu q(q-a+d)) + \frac{\lambda^{(n)}a^3}{m^3 v^3} < \frac{a^3}{m^3},$$

d'où l'on voit que la confuſion cauſée par le ſeul verre oculaire, devient déjà inſupportable dès que $\frac{\lambda^{(n)}}{v^3} > 1$, & puiſque $\lambda^{(n)}$ eſt à peu près $= 1,63$, dès que la diſtance de foyer de l'oculaire v eſt moindre que $\sqrt[3]{1,63}$ pouce, ou $v < 1\frac{1}{6}$ pouce; d'où je tire cette concluſion bien importante, que quand même on ſeroit parvenu à conſtruire un objectif délivré de toute confuſion, dès qu'on le joindroit avec un oculaire au deſſous d'un pouce de foyer, il en réſulteroit une confuſion tout à fait inſupportable. Mais auſſi réciproquement, dès que le foyer de l'oculaire ſurpaſſe deux pouces, la confuſion qui en réſulte eſt inſenſible, puiſqu'elle décroît en raiſon du cube de la diſtance de foyer.

15. Pour les verres moyens, quand il y en a, à moins qu'ils ne ſoient fort mal arrangés, leur effet ſur la confuſion eſt ordinairement beaucoup plus petit que celui du ſeul oculaire. Cependant mettons la lettre M pour la partie qui en réſulte; & puiſqu'il eſt bon d'introduire dans le calcul la diſtance de foyer du verre objectif compoſé,

ſoit p cette diſtance derriere le ſecond verre concave, de ſorte que $p = \frac{q\,(\alpha - d)}{q - \alpha + d}$ & $q = \frac{p\,(\alpha - d)}{p - \alpha + d}$; d'où notre formule ſera

$$\lambda m - \frac{m(\alpha-d)(p-\alpha+d)}{\alpha p^3}(\lambda'(p-\alpha+d)^2 - \nu p(\alpha-d)) + M + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^3 v^3} \prec \frac{\alpha^3}{m^3}.$$

Il n'importe qu'on prenne la valeur $\frac{\alpha^3}{m^3}$ négative ou poſitive; & partant, en la prenant tantôt poſitive tantôt négative, & changeant le ſigne $\prec$ en $=$, on aura les deux limites, entre leſquelles la conſtruction de notre verre objectif doit être contenue.

16. Voilà donc les deux limites que nous cherchons, & par rapport auxquelles le nombre λ' doit être déterminé:

$$\lambda' = \frac{\nu p\,(\alpha-d)}{(p-\alpha+d)^2} + \frac{\alpha p^3}{(\alpha-d)(p-\alpha+d)^3}\left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^4 v^3} \pm \frac{\alpha^3}{m^4}\right),$$

d'où l'on voit d'abord, que pour les grands groſſiſſemens ces limites s'approchent d'autant plus, que le terme $\frac{\alpha^3}{m^4}$ devient petit, ce qui arrive quand le cube α^3 croît dans une moindre raiſon que le quarré-quarré m^4. Pour cet effet, ſuppoſons $\alpha = \frac{1}{\delta} m \sqrt[3]{m}$; & ſoit pour abréger nos formules $q = np$, $d = \frac{kp}{n+1}$, & nous aurons $\alpha = \frac{n+k}{n+1}p$; donc $p = \frac{n+1}{\delta(n+k)} m \sqrt[3]{m}$ & $\mathfrak{B} = n+1$, $B = \frac{-(n+1)}{n}$, & nous arriverons à cette équation:

$$\lambda' = \nu n(n+1) + \left(1 + \frac{k}{n}\right)(n+1)^3\left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{1,6^3}{\delta^3 v^3} \pm \frac{1}{\delta^3}\right),$$

où

où le terme $\frac{1}{\delta^3}$ ne doit pas être trop petit par rapport au nombre λ, puiſqu'alors l'exécution ne ſauroit réuſſir.

17. Mais, d'un autre côté, ſi l'on vouloit prendre δ très petit, comme $\delta = 1$, on n'y gagneroit rien, & la confuſion du ſeul premier verre ſeroit déjà ſi petite, qu'on n'auroit plus beſoin du verre concave pour en diminuer l'effet. La compoſition de l'objectif ne nous procure donc des avantages réels, qu'entant qu'on peut donner à δ une valeur aſſez conſidérable. D'ailleurs, ayant pris ci-deſſus $x = 50$, cette valeur eſt un peu trop grande, & on peut bien ſe contenter de $x = 45$; & dans ce cas, au lieu du dernier terme $\frac{1}{\delta^3}$, nous aurions $\frac{1000}{729\delta^3}$ ou $\frac{4}{3\delta^3}$, d'où pour le même nombre δ les limites embraſſeront un plus grand intervalle, & ſouffriront dans la pratique une plus grande aberration. Or, plus on eſt en état d'exécuter les meſures preſcrites, plus on pourra prendre le nombre δ grand, & l'objectif compoſé pourra être employé à des groſſiſſemens plus conſidérables. Outre cela, puiſque le verre concave allonge la lunette, la compoſition de l'objectif ne ſera d'aucun avantage, à moins qu'on ne puiſſe prendre $\delta > \frac{10}{9} \cdot \frac{n+k+1}{n+k}$, puiſque cette valeur répond aux objectifs ſimples ordinaires.

18. Cette circonſtance ne nous permet pas de donner au nombre n des valeurs très petites, qui ſeroient d'ailleurs à l'égard de la conſtruction du verre concave les plus convenables, puiſque la moindre valeur de la lettre δ, qui nous procureroit quelque avantage réel, deviendroit déjà trop conſidérable, pour qu'on pût eſpérer de ne pas paſſer dans l'exécution les limites preſcrites. Je ſuppoſe ici que le nombre k, qui détermine la diſtance des verres d, ſoit une fraction très petite, pour ne pas diminuer le champ apparent; car, ſi l'on vouloit donner à k une valeur aſſez conſidérable, on pourroit bien prendre n

d'autant plus petit: mais il vaudra toujours mieux prendre le nombre n plus grand, & donner à k la plus petite valeur que l'épaiſſeur des verres puiſſe ſouffrir. On ſera bien obligé d'admettre de ſi grandes diſtances de foyer par rapport au groſſiſſement, qu'on pourra prendre $k = \frac{1}{100}$, & encore plus petit.

19. Si l'on n'emploie qu'un ſeul oculaire, pour produire le groſſiſſement m, il faut prendre $v = \frac{p}{m}$, d'où l'on aura $v^3 = \frac{m\,(n+1)^3}{\delta^3\,(n+k)^3}$, & partant notre équation ſera:

$$\lambda' = vn(n+1) + \left(1+\frac{k}{n}\right)(n+1)^3\left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{1{,}63(n+k)^3}{m\,(n+1)^3} + \frac{4}{3\,\delta^3}\right);$$

d'où l'on voit que, pour les grands groſſiſſemens, la confuſion cauſée par l'oculaire eſt très petite par rapport à celle de l'objectif, qui doit être détruite par le verre concave. Il s'agit donc de voir, à quel degré de préciſion on peut porter la pratique, de ſorte que les limites actuelles étant connues, on en puiſſe enſuite conclure la valeur de δ, d'où l'on conclura enfin la diſtance de foyer du premier verre $\alpha = \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, & de là les autres meſures p & q exprimées en pouces. Cette recherche ſe fera le plus commodément, en donnant au nombre n des valeurs déterminées: où je remarque en général qu'il convient de poſer $\lambda = 1$, puiſque ce nombre ne ſauroit recevoir une valeur plus petite. Or, pour le nombre k, je le ſuppoſerai toujours $= \frac{n}{100}$, pour réduire l'intervalle entre les deux premiers verres à une quantité aſſez petite.

I Hypotheſe $n = 1$.

20. On a donc $q = p$, $\alpha = \frac{101}{200}p$, & $d = \frac{1}{100}p$, & partant pour le verre concave $\mathfrak{B} = 2$, & $\mathfrak{B} = -2$. Or le groſſiſſement m étant propoſé, il faut prendre $p = \frac{200}{101} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$,

où

où l'adreſſe de l'Artiſte déterminera le nombre δ. On a donc pour le nombre λ':

$$\lambda' = 2\nu + \tfrac{101}{100} \cdot 8 \left(1 + \frac{1{,}63 \,.\, 101^3}{200^3 \,.\, m} \pm \frac{4}{3\delta^3}\right).$$

Maintenant il faut ſe ſouvenir, que connoiſſant pour le verre concave ſa diſtance de foyer $-q$, avec les nombres $\mathfrak{B}$ & λ', ſa conſtruction eſt déterminée de cette ſorte:

$$\text{le rayon de ſa face de devant} = \frac{-q}{\varrho\mathfrak{B} - \sigma(\mathfrak{B}-1) + \tau\sqrt{(\lambda'-1)}},$$

$$\text{le rayon de ſa face de derriere} = \frac{-q}{\sigma\mathfrak{B} - \varrho(\mathfrak{B}-1) - \tau\sqrt{(\lambda'-1)}},$$

où les nombres ϱ, σ, τ avec ν dépendent de telle ſorte de la nature du verre, que ſi la raiſon de réfraction eſt 1,55 à 1, on a

$$\varrho = 0{,}19078;\ \sigma = 1{,}62740;\ \tau = 0{,}90513\ \&\ \nu = 0{,}23269.$$

Or la valeur de λ' ſe développe en ces trois parties:

$$\lambda' = 8{,}54538 + \frac{1{,}6961}{m} \pm \frac{10{,}77}{\delta^3};$$

d'où l'on tire $\sqrt{(\lambda'-1)} = 2{,}7469 + \frac{0{,}3087}{m} \pm \frac{1{,}9610}{\delta^3}$,

$$\&\ \tau\sqrt{(\lambda'-1)} = 2{,}4862 + \frac{0{,}2793}{m} \pm \frac{1{,}7747}{\delta^3}.$$

Or $\varrho\mathfrak{B} - \sigma(\mathfrak{B}-1) = -1{,}24584$ & $\sigma\mathfrak{B} - \varrho(\mathfrak{B}-1) = 3{,}06402$;
donc les deux rayons des faces du verre concaves ſont:

$$\text{de devant} = \frac{-q}{1{,}2404 + \frac{0{,}2793}{m} \pm \frac{1{,}7747}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{0{,}5778 - \frac{0{,}2793}{m} \pm \frac{1{,}7747}{\delta^3}}.$$

221. Pour juger maintenant du nombre δ, ſuppoſons que, quand il faut travailler la face d'un verre ſur une ſphéricité dont le rayon eſt $= r$, l'Artiſte ſoit ſi habile, qu'il ſe trompe moins que de la partie $\frac{1}{N}$ de ce rayon r. Donc, ſi le rayon d'une face doit être $\frac{-q}{P \pm \frac{Q}{\delta^3}}$, ou $\frac{-q}{P} : \left(1 \pm \frac{Q}{P\delta^3}\right)$, il faut ſuppoſer $\frac{1}{N} = \frac{Q}{P\delta^3}$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{\frac{NQ}{P}}$; & pour en faire l'application, il eſt clair qu'il faut prendre la face qui donne pour δ la moindre valeur, comme la plus difficile à exécuter; ce ſera donc celle où P eſt plus grand. Puiſque c'eſt la face de devant, nous aurons $P = 1,2404 + \frac{0,2793}{m}$, & $Q = 1,7747$; d'où nous tirons aſſez exactement $\delta = \sqrt[3]{\frac{10}{7}N}$; ce qui nous fournit les concluſions ſuivantes:

I. Si l'Artiſte n'eſt capable de travailler la face d'un verre qu'à une 50me partie près du rayon, nous aurons $\delta = \sqrt[3]{71}$, ou $\delta = 4\frac{1}{7}$, & partant, pour un groſſiſſement quelconque m, la diſtance de foyer de notre objectif, comptée depuis le premier verre, $d + p = \frac{201}{71} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta} = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,07}$. Or, en employant un verre objectif ſimple, on peut prendre ſa diſtance de foyer $= \frac{m\sqrt[3]{m}}{1,33}$; donc par ce moyen la longueur de la lunette n'eſt pas encore réduite à la moitié.

II. Si l'Artiſte eſt ſi habile qu'il ne ſe trompe pas de la partie $\frac{1}{105}$ du rayon d'une face, à cauſe de $N = 100$, nous aurons $\delta = \sqrt[3]{143}$, ou bien $\delta = 5,23$; d'où pour le groſſiſſement m la diſtance de foyer de notre objectif compoſé ſera $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,61}$, qui n'eſt que la moitié de celle d'un objectif ſimple.

III.

III. Donc, s'il falloit réduire la distance de foyer à la quatrieme partie, il faudroit qu'il fût $\frac{1}{2}\delta = 5,33$, ou $\delta = 10,66$; donc $N = \frac{7}{10}\,\delta^3 = 849$; c'est à dire qu'il y est requis un tel degré d'adresse, qu'on ne se trompe point dans l'exécution de la $\frac{1}{849}$ partie du rayon: or je doute fort qu'on puisse jamais atteindre ce degré d'adresse.

II Hypothese $n = 2$, & $k = \frac{2}{100}$.

22. Ayant donc $q = 2p$; $\alpha = \frac{200}{300}p$; $d = \frac{200}{300}p$ & $p = \frac{300}{200} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$; donc la distance $d + p = \frac{300}{200} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, cette distance étant dans le cas d'un objectif simple $= \frac{m\sqrt[3]{m}}{1,33}$. Or, pour la construction du verre concave, nous aurons $\mathfrak{B} = 3$, &

$$\lambda' = 1,3962 + \frac{101}{100} \cdot 27\left(1 + \frac{1,63}{m}\left(\frac{200}{300}\right)^3 = \frac{4}{3\delta^3}\right), \text{ ou}$$

$$\lambda' = 38,666 + \frac{13}{m} = \frac{36,36}{\delta^3}, \quad \& \text{ partant}$$

$$\nu V(\lambda' - 1) = 5,5550 + \frac{0,958}{m} = \frac{2,6810}{\delta^3};$$

or $3\varrho - 2\sigma = -2,6825$, & $3\sigma - 2\varrho = +4,5006$; donc les rayons des deux faces de nos verres

$$\text{de devant} = \frac{-q}{2,8735 + \frac{0,958}{m} = \frac{2,6810}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-1,0544 - \frac{0,958}{m} = \frac{2,6810}{\delta^3}}.$$

Ici donc, pour juger de la valeur de δ, il faut s'en tenir à la premiere face, qui nous donne $P = 2,8735 + \frac{0,958}{m}$ & $Q = 2,6810$, & partant $\delta = \sqrt[3]{0,923\,N}$: dont voici les conclusions.

I. Si l'Artiſte ne peut répondre que de la 50me partie du rayon, de ſorte que $N = 50$, nous aurons $\delta = 3,58$, & partant la diſtance de foyer de notre objectif compoſé $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,39}$, qui eſt en effet preſque deux fois plus petite qu'en ſe ſervant d'un oculaire ſimple.

II. Si l'Artiſte eſt ſûr de ne pas ſe tromper d'une 100me partie, de ſorte que $N = 100$, nous aurons $\delta = 4,52$; donc la diſtance de foyer de l'objectif compoſé $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,01}$, qui eſt à celle d'un objectif ſimple comme 9 à 4.

III. Pour réduire donc la longueur à la quatrieme partie, il faudroit qu'il fût $\delta = 8$, & partant $N = \frac{512}{0,923} = 555$; d'où l'on voit que cette hypotheſe eſt préférable à la précédente.

III Hypotheſe $n = 3$, & $k = \frac{3}{100}$.

23. Ayant $q = 3p$; $d = \frac{3}{400}p$ & $a = \frac{303}{400}p$, nous aurons: $p = \frac{400}{303} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, & $d + p = \frac{403}{303} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$. Or, pour la conſtruction du verre concave $\mathfrak{B} = 4$, &

$$\lambda' = 12\nu + \frac{101}{100} \cdot 64 \left(1 + \frac{1,63}{m}\left(\frac{303}{400}\right)^2 \pm \frac{4}{3\delta^3}\right); \text{ donc}$$

$$\lambda' = 67,4324 + \frac{45,7967}{m} \pm \frac{86,19}{\delta^3}; \text{ \& partant}$$

$$\tau V(\lambda' - 1) = 7,3773 + \frac{2,5418}{m} \pm \frac{4,7857}{\delta^3}.$$

Or $4\varrho - 3\sigma = -4,1191$ & $4\sigma - 3\varrho = +5,9372$; & partant les rayons des deux faces de notre verre concave

$$\text{de devant} = \frac{-q}{+3,2582 + \frac{2,5418}{m} \pm \frac{4,7857}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-1,4401 - \frac{2,5418}{m} \mp \frac{4,7857}{\delta^3}}.$$

Il faut donc s'en tenir à la premiere, qui donne $P = 3,2582 + \frac{2,5413}{m} = 3,342$, en prenant $m = 30$, & $Q = 4,7857$; donc $\delta = \sqrt[3]{1,431}\,N$; d'où je conclus:

I. Si l'Artiſte dans ſon travail n'eſt aſſuré que de la 50me partie du rayon, de ſorte que $N = 50$, nous aurons $\delta = 4,15$, & partant la longueur $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,11}$, qui eſt à celle d'un objectif ſimple comme 3 à 7.

II. Si l'Artiſte pouvoit répondre de la 100me partie, nous aurions $\delta = 5,23$ & partant $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,92}$, qui ſeroit à peu près trois fois plus courte qu'en employant un objectif ſimple.

III. Enfin, ſi l'on ſouhaitoit une longueur quatre fois plus petite, à cauſe de $\frac{3}{4}\delta = 4 \cdot \frac{4}{3}$, ou $\delta = 7,11$, l'adreſſe de l'Artiſte devroit être au point qu'il fût $N = 251$, & partant cette hypotheſe eſt encore bien préférable à la précédente.

IV Hypotheſe $n = 4$, & $k = 1\frac{4}{100}$.

24. Ayant $q = 4p$, $d = 3\frac{4}{100}p$, & $a = \frac{404}{300}p$, il faut poſer $p = \frac{500}{404} \cdot \frac{m\sqrt{m}}{\delta}$, & partant $d + p = \frac{504}{404} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$; or, pour la conſtruction du verre concave $\mathfrak{B} = 5$, &

$$\lambda' = 20\nu + \frac{101}{100} \cdot 125 \left(1 + \frac{1,63}{m} \left(\frac{404}{300}\right)^3 \pm \frac{4}{3\delta^3}\right);$$

ou, puiſque nous pouvons aiſément négliger la partie 100me,

$$\lambda' = 125 + 20\nu + \frac{1,63}{m} \cdot 64 \pm \frac{500}{3\delta^3} = 129,654 + \frac{104}{m} \pm \frac{167}{\delta^3};$$

donc $7V(\lambda' - 1) = 10,2660 + \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}$; & puiſque

$$5\varrho - 4\sigma = -5,5557, \quad \& \quad 5\sigma - 4\varrho = 7,3738,$$

nous aurons les rayons des faces de notre verre concave

$$\text{de devant} = \frac{-q}{4,7103 + \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-2,8922 - \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}}.$$

Tenons-nous en donc à la premiere, qui donne $P = 4,7103 + \frac{4,15}{m}$, ou $P = 4,85$, & $Q = \frac{6,66}{\delta^3}$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{1,373\,N}$; d'où je conclus:

I. Si l'Artiſte eſt ſûr de la 50me partie du rayon dont il travaille une face, à cauſe de $N = 50$, nous aurons $\delta = 4,095$, & partant la

la longueur $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,276}$, qui eſt à celle d'un objectif ſimple comme 2 à 5.

II. Or, ſi l'Artiſte pouvoit répondre de la 100me partie du rayon, on auroit $\delta = 5,16$, & la longueur $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{4,13}$, qui eſt $3\frac{1}{10}$ fois plus grande qu'en n'employant qu'un objectif ſimple.

III. Pour réduire la longueur du foyer à la quatrieme partie, à cauſe de $\frac{4}{5}\delta = \frac{1}{30}$, & $\delta = \frac{2}{30}$, l'adreſſe de l'Artiſte doit répondre au nombre $N = 216$, ou il faut qu'il puiſſe être ſûr de la 216 partie du rayon: cette hypotheſe eſt donc encore plus avantageuſe que la précédente.

V Hypotheſe $n = 5$.

25. Je négligerai ici la diſtance d, puiſqu'il ne s'agit que de déterminer à peu près, & ayant $q = 5p$, $\alpha = \frac{5}{6}p$, & $p = \frac{6}{5} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, nous aurons pour le verre concave $\mathfrak{B} = 6$, &

$$\lambda' = 301 + 216 + 125 \cdot \frac{1,63}{m} + \frac{288}{\delta^3}, \text{ ou bien}$$

$$\lambda' = 222,981 + \frac{204}{m} + \frac{288}{\delta^3}; \text{ donc}$$

$$\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 13,4850 + \frac{6,20}{m} \pm \frac{8,75}{\delta^3}. \text{ Or}$$

$6\varrho - 5\sigma = -6,9923$, & $6\sigma - 5\varrho = +8,8104$; donc les rayons des faces du verre concave ſeront

$$\text{de devant} = \frac{-q}{6,4927 + \frac{6,20}{m} \pm \frac{8,75}{\delta^3}},$$

de derriere $= \dfrac{-q}{4,6746 - \frac{6,20}{m} \mp \frac{8,75}{\delta^3}}$,

dont celle-là donne $P = 6,7$, & $Q = 8,75$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{1,306\,N}$; d'où je conclus:

I. Si l'adreſſe de l'Artiſte ſe borne à la 50me partie du rayon, de ſorte que $N = 50$, on aura $\delta = 4,03$, & partant la diſtance de foyer de notre objectif compoſé $p = \dfrac{m\sqrt[3]{m}}{3,36}$, qui eſt un peu plus petite que dans l'hypotheſe précédente.

II. Si l'Artiſte eſt ſûr de la 100me partie de ſon rayon, la valeur $N = 100$ donne $\delta = 5,07$, & la diſtance de foyer $p = \dfrac{m\sqrt[3]{m}}{4,23}$.

III. Mais, ſi l'on demandoit une adreſſe capable de raccourcir la diſtance de foyer à ſa quatrieme partie, à cauſe de $\frac{5}{6}\delta = \frac{1,4}{3}$, ou $\delta = \frac{3,2}{5}$, nous aurons $N = 201$, ou bien l'Artiſte doit être en état de ne pas ſe tromper de la 200 partie du rayon ſur lequel il travaille.

26. Je ne continue pas ces hypotheſes plus loin, quoiqu'en augmentant le nombre n les avantages deviennent toujours plus grands, & qu'en ſuppoſant $n = \infty$, une adreſſe de la part de l'Artiſte, qui pourroit répondre de la centieme partie du rayon, ſeroit ſuffiſante pour raccourcir la diſtance de foyer de l'objectif à la quatrieme partie. Mais, depuis cette hypotheſe, les avantages augmentent preſque inſenſiblement, de ſorte qu'il ne vaudroit pas la peine de pouſſer plus loin ces hypotheſes. Mais il faut ici principalement avoir égard à cette circonſtance, que plus on augmente le nombre n, plus les rayons des deux faces de notre ſecond verre ménifque deviennent égaux entr'eux; & l'on ſait que la conſtruction de tels ménifques eſt ſujette à de grands inconvéniens.

27.

27. De là je tire donc cette concluſion, que pour faire de tels objectifs compoſés, il eſt bon de donner au nombre n la plus grande valeur que les autres circonſtances permettent; & puiſque les avantages qu'on retireroit en donnant à n une plus grande valeur que 5, ne croiſſent plus ſenſiblement, je m'arrêterai à cette hypotheſe $n = 5$, & j'en déduirai plus ſoigneuſement les regles pour la conſtruction de ces objectifs compoſés, qui puiſſent ſervir pour toutes les eſpeces de lunettes. Or, quelque grand que ſoit le nombre des verres, pour que la confuſion évanouiſſe entierement, l'expreſſion ſuivante doit être réduite à zéro:

$$\lambda + \frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)} + \frac{\Phi(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu C)}{B^3C^3(\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi)}$$
$$+ \frac{\Phi(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu D)}{B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi'''-\pi''+\pi'-\Phi)} \text{ &c.}$$

chaque verre fourniſſant un membre dans cette expreſſion, dont la ſignification eſt expliquée dans mon Mémoire du XIII Volume.

28. Si la diſtance de foyer du premier verre en A eſt poſée $= \alpha$, celle du ſecond verre en $B = \frac{\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha$, & l'intervalle entre ces deux verres AB eſt $= \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha$, & le foyer commun de ces deux verres tombe après le ſecond à la diſtance $= \frac{B\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha$, que je regarderai comme la diſtance de foyer du verre objectif compoſé, en la poſant $= p$, de ſorte que $\alpha = \frac{\mathfrak{B}\pi-\Phi}{B\Phi}p$. Soit enſuite la diſtance de foyer négatif du ſecond verre concave $= -np$, pour avoir $\frac{\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha = \frac{\mathfrak{B}}{B}p = -np$, & partant $\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} = -nB$; d'où

d'où nous tirons $1 + B = -\frac{1}{n}$ & $B = -\frac{(n+1)}{n}$; donc $\mathfrak{B} = n + 1$, comme ci-deſſus. Or, pour l'intervalle des verres, poſons-le $= \frac{k}{n+1}p$, & de là nous aurons $\frac{k}{n+1}p = \frac{\mathfrak{B}\pi}{B\Phi}p = \frac{-n\pi}{\Phi}p$, donc $\pi = \frac{-k\Phi}{n(n+1)}$.

29. Donc, puiſque $\frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = \frac{-n}{n+k}$, & partant $\alpha = \frac{n+k}{n+1}p$, la diſtance de foyer du ſecond verre concave étant $= -np$, & l'intervalle entre les verres $AB = \frac{k}{n+1}p$, les deux premiers membres de notre formule, qui doit être réduite à rien, ſeront

$$\lambda - \frac{n}{(n+k)(n+1)^3}(\lambda' - \nu n(n+1));$$

& pour tous les autres membres fournis par les verres ſuivans, écrivons la lettre M, dont la valeur ſera toujours très petite par rapport aux premiers, & il s'agit de ſatisfaire à cette équation:

$$\lambda - \frac{n}{(n+k)(n+1)^3}(\lambda' - \nu n(n+1)) + M = o,$$

qui nous fournit la valeur du nombre λ' exprimée de cette ſorte.

$$\lambda' = \nu n(n+1) + \left(1 + \frac{k}{n}\right)(n+1)^3(\lambda + M).$$

30. Poſons donc $n = 5$, & ſoit k une fraction très petite, que je laiſſerai encore indéterminée, puiſqu'on peut aiſément la joindre avec la petite quantité M: & par la diſtance de foyer du verre compoſé p, nous aurons la diſtance de foyer du premier verre

$\alpha =$

$\alpha = \frac{5+k}{6}p$, & du ſecond $= -5p$, avec leur intervalle AB $= \frac{k}{6}p$. Enſuite, pour le premier verre en A, prenons $\lambda = 1$, afin que ſa confuſion devienne la plus petite, & nous aurons pour le verre concave: $\lambda' = 30\nu + 216\left(1+\frac{k}{5}\right)(1+M)$. Cependant pour la fraction k, qu'on ne ſauroit prendre plus petite que l'épaiſſeur des verres ne le permet, ſi l'on réuſſiſſoit à détruire toute la confuſion, & qu'on voulût prendre $x = \frac{1}{8}\alpha$, la valeur de k devroit être au moins $= \frac{3}{40}$. Poſons donc $k = \frac{3}{40}$, & nous aurons $\alpha = \frac{203}{240}p$, & l'intervalle AB $= \frac{1}{80}p$, & enfin:

$$\lambda' = 30\nu + 216 . \tfrac{203}{240}(1+M) = 219{,}24 + 30\nu + 219{,}24M.$$

31. Maintenant il faut ſe ſouvenir, que la lettre ν, de même que les lettres ϱ, σ, τ, qui entrent dans la détermination des faces des verres, dépendent de la réfraction des rayons en entrant de l'air dans le verre, laquelle n'étant pas aſſez fixe, conſidérons-en les principaux cas:

Réfraction

1,50 : 1; $\nu = 0{,}20000$; $\varrho = 0{,}28571$; $\sigma = 1{,}71429$; $\tau = 0{,}95832$,

1,51 : 1; $\nu = 0{,}20643$; $\varrho = 0{,}26529$; $\sigma = 1{,}69549$; $\tau = 0{,}94686$,

1,52 : 1; $\nu = 0{,}21291$; $\varrho = 0{,}24563$; $\sigma = 1{,}67745$; $\tau = 0{,}93584$,

1,53 : 1; $\nu = 0{,}21945$; $\varrho = 0{,}22668$; $\sigma = 1{,}66011$; $\tau = 0{,}92522$,

1,54 : 1; $\nu = 0{,}22605$; $\varrho = 0{,}20841$; $\sigma = 1{,}64344$; $\tau = 0{,}91499$,

1,55 : 1; $\nu = 0{,}23269$; $\varrho = 0{,}19078$; $\sigma = 1{,}62740$; $\tau = 0{,}90513$;

& pour chacun de ces cas, développons la conſtruction de notre objectif compoſé.

32. Or d'abord, pour le premier verre convexe, puiſque $\lambda = 1$, & ſa diſtance de foyer $\alpha = \frac{203}{240}p$, les rayons de ſes deux faces ſeront

de devant $= \frac{203p}{240\sigma}$, & de derriere $= \frac{203p}{240\varrho}$;

& pour le ſecond verre concave, dont la diſtance de foyer eſt $= -5p$, les rayons de ces deux faces, dont je nommerai pour abréger celui de la face de devant $= f$, & celui de la face de derriere $= g$, ſeront

$$f = \frac{-5p}{6\varrho - 5\sigma + \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}}, \text{ \& } g = \frac{-5p}{6\sigma - 5\varrho - \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}}.$$

C'eſt donc de ces quatre formules qu'il faut calculer les valeurs pour chaque cas de réfraction.

Pour le premier verre convexe.

33. Comme les rayons des faces de ce verre ne dépendent que des deux lettres ϱ & σ, le calcul ſe fera aiſément, & on trouvera ces deux rayons exprimés de la maniere ſuivante :

Si l'on vouloit que AB fût $\frac{1}{3\sigma}p$, il faudroit ajouter à ces valeurs leur partie $\frac{1}{4\sigma}$.	Raiſon de réfraction,	Rayon de la face de devant,	Rayon de la face de derriere,
	1,50 : 1	0,49341 p	2,96046 p
	1,51 : 1	0,49887 p	3,18834 p
	1,52 : 1	0,50424 p	3,44353 p
	1,53 : 1	0,50950 p	3,73140 p
	1,54 : 1	0,51467 p	4,05851 p
	1,55 : 1	0,51975 p	4,43355 p.

Pour le ſecond verre concave ou ménifque.

34. Cette détermination demande plus de calcul. D'abord, ſi $\lambda' - 1 = L + 219{,}24M$, puiſque M eſt une fraction très petite, on aura aſſez exactement $\sqrt{(\lambda' - 1)} = \sqrt{L} + \frac{109{,}62\,M}{\sqrt{L}}$, & partant $\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = \tau\sqrt{L} + \frac{109{,}62\tau}{\sqrt{L}}M$, qu'il faut combiner

avec

avec les valeurs des formules $6\varrho - 5\sigma$ & $6\sigma - 5\varrho$; ces trois valeurs ſont exprimées pour chaque cas de réfraction de cette ſorte:

Raiſon de réfraction	valeur de $6\varrho - 5\sigma$,	valeur de $6\sigma - 5\varrho$,	valeur de $\tau\sqrt{L} + \frac{109,62\,\tau}{\sqrt{L}}M$
1,50 : 1	−6,85719	8,85719	14,35050 + 7,0153 M
1,51 : 1	−6,88571	8,84649	14,18469 + 6,9282 M
1,52 : 1	−6,91347	8,83655	14,02596 + 6,8448 M
1,53 : 1	−6,94047	8,82726	13,87284 + 6,7642 M
1,54 : 1	−6,96674	8,81859	13,72552 + 6,6864 M
1,55 : 1	−6,99232	8,81050	13,58361 + 6,6114 M.

35. De là formons premierement les dénominateurs des fractions données pour les rayons des faces du ſecond verre, qui ſeront exprimés ainſi:

Raiſon de réfraction	I. Dénominateur $6\varrho - 5\sigma + \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}$	II. Dénominateur $6\sigma - 5\varrho - \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}$
1,50 : 1	+ 7,49331 + 7,0153 M	− 5,49331 − 7,0153 M
1,51 : 1	+ 7,29898 + 6,9282 M	− 5,33820 − 6,9282 M
1,52 : 1	+ 7,11249 + 6,8448 M	− 5,18941 − 6,8448 M
1,53 : 1	+ 6,93237 + 6,7642 M	− 5,04558 − 6,7642 M
1,54 : 1	+ 6,75878 + 6,6864 M	− 4,90693 − 6,6864 M
1,55 : 1	+ 6,59129 + 6,6114 M	− 4,77311 − 6,6114 M;

tous les deux dénominateurs ſont rapportés au même numérateur $-5p$.

36. Maintenant, pour en tirer les rayons mêmes, remarquons que cette fraction $\frac{-5p}{\tau + s\mathrm{M}}$, donne aſſez exactement $\frac{-5}{\tau}p + \frac{5s}{\tau\tau}\mathrm{M}p$; d'où nous tirons pour les rayons de chaque face les valeurs ſuivantes:

raiſon de réfraction,	pour le ſecond verre, Rayon de la face de devant,	rayon de la face de derriere,
1,50 : 1	$-0,66726p+0,6247Mp$	$+0,91020p-1,1624Mp$
1,51 : 1	$-0,68503p+0,6502Mp$	$+0,93665p-1,2156Mp$
1,52 : 1	$-0,70299p+0,6765Mp$	$+0,96350p-1,2708Mp$
1,53 : 1	$-0,72126p+0,7038Mp$	$+0,99096p-1,3285Mp$
1,54 : 1	$-0,73978p+0,7319Mp$	$+1,01897p-1,3885Mp$
1,55 : 1	$-0,75858p+0,7609Mp$	$+1,04754p-1,4510Mp$;

Si l'on vouloit que $AB = \frac{1}{30}p$, il faudroit prendre $M = \frac{1}{40}+M$.

d'où l'on voit que la face de devant de ce verre eſt toujours concave, & celle de derriere convexe. Or la diſtance entre ces deux verres eſt $AB = \frac{1}{80}p$.

37. Pour la lettre M, elle marque la partie de la confuſion qui réſulte des autres verres de la lunette, & partant elle dépend auſſi du groſſiſſement, que j'exprime par le nombre m. Si l'on n'emploie qu'un ſeul oculaire, cette partie de confuſion ſera fort à peu près $= \frac{1}{m}$, qu'il faudra écrire à la place de M. Or cette même lettre M admet une certaine latitude, que les limites de la confuſion admettent, en vertu de laquelle on peut ajouter ou ſouſtraire de M la particule $\frac{\alpha^3}{m x^3 x^3}$, prenant $v = 45$, & x marque le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif; & l'on ſait qu'il faut prendre $x = \frac{m}{50}$ pouces, de ſorte que cette particule devient $= \frac{4\alpha^3}{3m^4}$. Ou bien, ſi l'on ſuppoſe $\alpha = \frac{m\sqrt{m}}{\delta}$, au lieu de M, on peut écrire $M \pm \frac{4}{3\delta^3}$; d'où l'on peut juger du point de préciſion qu'on attend de l'adreſſe de l'Artiſte.

38. Mais, quand même l'Artiſte paſſeroit ces limites, pourvu que l'erreur ne fût pas très groſſiere, on pourra toujours ſe ſervir d'un

d'un tel objectif pour des groſſiſſemens plus petits qu'on ne ſe ſera propoſé. Or, comme cet objectif a été conſtruit ſur une certaine diſtance entre les deux verres, on comprend aiſément qu'un tel objectif compoſé, où l'Artiſte ſe ſera écarté tant ſoit peu des meſures preſcrites, pourra néanmoins être parfait par rapport à une autre diſtance entre les verres; & l'on pourra trouver des valeurs pour les nombres n & k, qui conduiroient préciſément à l'objectif exécuté. On n'aura donc qu'à joindre les deux verres de telle ſorte, moyennant une vis, qu'on les puiſſe éloigner ou approcher tant ſoit peu, & par ce moyen on découvrira aiſément la petite diſtance où toute la confuſion doit diſparoitre. C'eſt ſans doute le plus ſûr moyen de porter les lunettes au plus haut degré de perfection, lequel ne ſauroit manquer, pourvu que les verres ne ſoient pas aſſujettis à une confuſion irréguliere dont j'ai parlé au commencement.

39. En cas qu'on voulût conſtruire de tels objectifs, où la diſtance entre les verres ſeroit plus grande, afin qu'on fût mieux en état d'y apporter les corrections néceſſaires, en les rapprochant davantage, il ne ſeroit pas néceſſaire de refondre tout ce calcul. On n'a qu'à remarquer, qu'en augmentant la valeur de k, d'où dépend l'intervalle entre les verres, la lettre M en recevra un plus grand coëfficient. Par conſéquent nous arriverons à ce but, quand nous donnerons à la lettre M une valeur tant ſoit peu plus grande, qu'elle n'auroit en effet dans les formules qui expriment les rayons des faces du ſecond verre; car alors l'intervalle entre les verres ſera augmenté dans la même raiſon, & partant ſuſceptible d'une plus grande diminution, en cas que les circonſtances l'exigent.

40. Puiſque l'intervalle entre les deux verres qui conſtituent ces objectifs, eſt ſi petit, dans la combinaiſon avec d'autres verres on peut regarder ces objectifs comme des lentilles ſimples, dont la diſtance de foyer eſt $= p$, par laquelle les rayons des quatre faces ſont déterminés. Mais ces objectifs compoſés ont ce grand avantage ſur les ſimples, qu'ils ne produiſent non ſeulement aucune confuſion, mais

qu'un léger changement dans leur diſtance eſt même capable de détruire la confuſion qui réſulteroit des autres verres. Donc, pourvu que l'Artiſte trouve moyen de ſurmonter toutes les difficultés qui s'oppoſent à leur exécution, on peut eſpérer de porter par ce moyen les lunettes au plus haut degré de perfection dont elles ſoient ſuſceptibles; & cela d'autant plus, que j'ai déjà découvert les moyens d'augmenter le champ apparent, autant qu'on peut le ſouhaiter, en multipliant le nombre des verres oculaires.

41. Mais, quand la confuſion qui réſulte des autres verres, eſt ſi grande, que la lettre M approche fort de l'unité, on ne ſauroit plus ſe ſervir des formules que j'ai données pour le ménifque. Pour ces cas j'ajoute ici une table, qui montre les véritables valeurs des rayons des deux faces de notre ménifque, pour la raiſon de réfraction de 1,54 : 1.

	Pour le Ménifque,	
	rayon de ſa face de devant,	rayon de ſa face de derriere,
ſi M = 1 - - - - -	−0,40588*p*	+0,47769*p*
ſi M = $\frac{1}{2}$ - - - - -	−0,51170*p*	+0,63135*p*
ſi M = $\frac{1}{4}$ - - - - -	−0,59961*p*	+0,77079*p*
ſi M = $\frac{1}{6}$ - - - - -	−0,63847*p*	+0,83620*p*
ſi M = $\frac{1}{8}$ - - - - -	−0,66039*p*	+0,87422*p*
ſi M = $\frac{1}{10}$ - - - - -	−0,67460*p*	+0,89930*p*
ſi M = $\frac{1}{12}$ - - - - -	−0,68446*p*	+0,91691*p*.

RE-

RECHERCHES

SUR LES TÉLESCOPES A' RÉFLEXION ET LES MOYENS DE LES PERFECTIONNER. (*)

PAR M. L. EULER.

1.

Quelque grands que ſoient les avantages que ces Téleſcopes ont procurés à l'Aſtronomie & pour les autres beſoins de la vie, on a pourtant raiſon de ſe plaindre du trop petit champ qu'ils découvrent; ce qui rend auſſi leur uſage fort pénible, en nous obligeant de les tenir ſi fixes, qu'il eſt impoſſible de s'en ſervir ſur la mer, où des lunettes ordinaires peuvent ſouvent être employées avec ſuccès, pourvu qu'elles ne ſoient pas trop longues. On s'imagine communément, que ce petit champ eſt une ſuite néceſſaire de l'uſage des miroirs, & le préjugé eſt preſque général, qu'il eſt impoſſible de remédier à ce défaut. Il faut bien que les Anglois, qui ont d'ailleurs parfaitement bien réuſſi dans la conſtruction de ces Téleſcopes, ſoient dans ce ſentiment, puiſqu'il ne paroit pas qu'ils ayent travaillé à les délivrer de ce grand inconvénient.

2. Or, nonobſtant cette grande autorité, je ſuis perſuadé que l'uſage des miroirs n'eſt pas néceſſairement aſſujetti à ce défaut, mais que c'eſt uniquement à l'arrangement peu avantageux des verres oculaires avec les miroirs, qu'il faut attribuer la cauſe du petit champ apparent; & ſi l'on vouloit s'arrêter à un ſemblable arrangement dans les lunettes, on tomberoit dans le même défaut. On trouve dans tous les téleſcopes preſque la même diſpoſition des verres oculaires, & on n'en

(*) Lu le 25 Février 1762.

n'en découvre aucune autre raiſon, ſi ce n'eſt que les objets ſont par ce moyen repréſentés ſans les couleurs d'iris. Mais il y a une infinité d'autres arrangemens qui produiſent le même effet, parmi leſquels il y en aura ſans doute qui découvrent un plus grand champ; & j'oſe même aſſurer, qu'il ſeroit poſſible de pouſſer l'augmentation du champ auſſi loin qu'on voudra, tout comme j'en ai fait voir la poſſibilité dans les lunettes.

3. D'ailleurs il eſt clair, au premier coup d'œil, que la diſpoſition des oculaires dans les meilleurs téleſcopes d'Angleterre eſt fort peu propre à fournir un champ raiſonnable. On n'a qu'à examiner le dernier oculaire, qui eſt pour la plupart un ménifque tournant ſa face concave vers l'œil: je ne ſaurois deviner, quel préjugé a pu conduire à cette figure, qui eſt certainement la moins propre à tous égards, & principalement par rapport au champ apparent, qui demande ſans aucun doute des oculaires également convexes des deux côtés, afin qu'ils ſoient ſuſceptibles de la plus grande ouverture, d'où le champ apparent dépend principalement. Dans les verres oculaires, il ne s'agit plus de remédier à la confuſion, mais auſſi à cet égard un ménifque ſeroit fort peu propre.

4. Comme il eſt impoſſible que l'expérience ait décidé pour l'uſage d'un ménifque au lieu de l'oculaire, à moins qu'un hazard n'en ſoit la cauſe, je crois plutôt que quelques raiſonnemens illuſoires ont donné naiſſance à ce préjugé: ce qui eſt d'autant plus vraiſemblable, que les véritables principes de la Dioptrique, ſur leſquels la conſtruction de ces ſortes d'inſtrumens devroit être fondée, ne ſont pas encore ſuffiſamment développés, & qu'on s'eſt ſouvent laiſſé ſéduire par des raiſonnemens tout à fait équivoques. Si je puis me flatter d'avoir établi la vraie Théorie, d'où la perfection de tous les téleſcopes & microſcopes doit être puiſée; je me propoſe d'entreprendre ici les mêmes recherches pour la perfection des Téleſcopes à réflexion, que j'ai déjà expoſées à l'égard des Lunettes & des Microſcopes.

5. Or

5. Or je remarque d'abord que la conſtruction des téleſcopes à réflexion eſt fondée ſur les mêmes principes que celle des lunettes ordinaires, & qu'on y peut appliquer les mêmes formules générales que j'ai données dans le XIII Volume de nos Mémoires pour perfectionner les Lunettes & les Microſcopes, pourvu qu'on ait égard à quelques circonſtances, que la nature des miroirs & leur diſpoſition exige. Les miroirs concaves répondent aux verres convexes, & leurs diſtances de foyer, qui ſont égales à la moitié de leurs rayons de courbure, entrent de la même maniere dans le calcul que celles des verres: & pour les miroirs convexes, ils font le même ſervice que les verres concaves, & leur diſtance de foyer doit être conſidérée comme négative. La ſeule différence à laquelle il faut réfléchir dans l'application de mes regles, eſt que les miroirs n'ont aucune part à l'engendrement des couleurs d'iris.

7. Je commencerai donc par examiner en *général* la diſpoſition des miroirs & des verres dont on ſe ſert ordinairement, pour voir à quel point il eſt poſſible d'augmenter le champ apparent; & enſuite je chercherai d'autres arrangemens, qui peuvent fournir encore un plus grand champ. Or la diſpoſition ordinaire convient avec celle des lunettes à quatre verres, qui repréſentent les objets debout: & comme ces lunettes découvrent un aſſez grand champ, lorſque les verres ſont bien arrangés, il ſemble que les téleſcopes devroient produire le même effet. Mais la circonſtance des miroirs exige néceſſairement une certaine limitation dans l'arrangement des verres, qui n'eſt pas favorable au champ; & une lunette à quatre verres, dont l'arrangement ſeroit ſemblable à celui qui a lieu dans les téleſcopes, n'en découvriroit pas un plus grand. Il eſt donc bien important de conſidérer ſoigneuſement cette limitation que l'uſage des miroirs exige dans la diſpoſition des verres.

7. Or, dans les téleſcopes, au lieu de l'objectif, on ſe ſert d'un miroir concave PAP, dont la diſtance de foyer ſoit $= p$, qui eſt égale à la moitié du rayon du baſſin convexe ſur lequel il eſt formé: Planche VI. Fig. 1.

ce miroir eſt au milieu percé d'un trou $o\,o$, qui ne doit pas être trop grand, afin que la ſurface polie réfléchiſſe aſſez de rayons pour repréſenter en a l'image ap, la diſtance Aa étant $= p$. Mais, au delà de cette image en B, on diſpoſe encore un miroir concave QBQ, dont la diſtance de foyer ſoit $= q$, & partant le rayon de ſa courbure $= 2q$; la diſtance aB eſt ordinairement un peu plus grande que q, de ſorte que ce miroir tranſporte l'image ap par le trou du grand miroir quelque part en bq. Or, derriere le trou en C, eſt un verre convexe RCR, dont la diſtance de foyer ſoit $= r$, qui rapproche l'image bq en cr: & enfin, au delà ſe trouve l'oculaire SDS, dont la diſtance de foyer ſoit $= s$, qui eſt à peu près égale à la diſtance cD, & derriere ce verre le point O marque le lieu de l'œil.

Fig. 2. 8. Maintenant la ſeconde figure repréſente une lunette à quatre verres, qui répond parfaitement à ce téleſcope; où premierement, au lieu des miroirs, on a les verres convexes PP & QQ également éloignés par l'intervalle AB, dont les diſtances de foyer ſont auſſi p & q. Les autres verres RR & SS ſont auſſi les mêmes que ceux du téleſcope, & diſpoſés par les mêmes intervalles BC & CD. Suppoſons outre cela que les ouvertures des verres & miroirs ſoient auſſi les mêmes de part & d'autre; & puiſque les images ap, bq & cr, dont la premiere eſt renverſée & les autres debout, ſont également ſituées, non ſeulement le groſſiſſement ſera le même de part & d'autre, mais auſſi le lieu de l'œil O ſera également éloigné du dernier oculaire SS, & la lunette découvrira le même champ que le téleſcope. Ce n'eſt qu'à l'égard de ces trois articles que la lunette produit le même effet que le téleſcope; mais ils conſtituent preſque auſſi l'eſſence de la conſtruction.

9. Conſidérons donc auſſi la différence qui regne entre ces deux inſtrumens; & d'abord il eſt évident, que le téleſcope eſt conſidérablement plus court que la lunette, & cela de la diſtance AB, de ſorte que dans les grands inſtrumens la longueur du téleſcope ſe trouve preſque réduite à la moitié. Enſuite, quoique la grandeur des miroirs

roirs ſoit auſſi grande que l'ouverture des verres qui leur répondent, le téleſcope fournira beaucoup moins de clarté; puiſque d'un côté les miroirs ne réfléchiſſent pas tant de lumiere, que les verres n'en tranſmettent, & que de l'autre côté la lumiere eſt diminuée par le trou dans le grand miroir, auſſi bien que par l'interception des rayons cauſée par le petit miroir; & c'eſt la raiſon pourquoi les téleſcopes ne fourniſſent jamais tant de clarté que les lunettes, à moins qu'on ne veuille renoncer au groſſiſſement.

10. Mais il n'y a aucun doute que le téleſcope n'ait un très grand avantage ſur la lunette, parce que les miroirs ne ſont pas aſſujettis à la différente réfrangibilité des rayons: & c'eſt à cet égard qu'ils ſont très préférables aux lunettes ordinaires. Cependant, pour ce qui regarde les couleurs d'iris, dont les objets paroiſſent environnés, elles ne manquent pas d'être cauſées par les verres oculaires; & l'objectif, quoiqu'il ſoit de verre, n'y a aucune part. Pour délivrer la repréſentation des objets de ces couleurs d'iris, les verres oculaires doivent être arrangés d'une certaine maniere, que j'ai enſeignée dans ma Théorie inſérée au XIII Volume de nos Mémoires: & il faut prendre à cet égard la même précaution dans la conſtruction des Téleſcopes, que des Lunettes, avec cette différence, que dans le téleſcope il n'y a que les deux verres RR & SS qui engendrent les couleurs d'iris, pendant que dans la lunette le ſecond verre QQ y concourt auſſi. Et partant, ſi l'on veut appliquer mes regles aux téleſcopes, il faut conſidérer le ſecond verre QQ, comme ne contribuant rien à la production des couleurs d'iris.

11. Comme tout téleſcope peut être transformé dans une lunette de la maniere que je viens d'expliquer, ſi l'on pouvoit réciproquement transformer une lunette donnée dans un téleſcope, on lui procureroit auſſi le même champ apparent que la lunette découvre, & on n'auroit aucune raiſon de ſe plaindre d'un champ trop étroit. Mais il eſt très évident que cette derniere transformation ne ſauroit avoir lieu, à moins que la diſtance BC entre le ſecond & le troiſieme verre ne ſoit,

ou égale à la diſtance AB, ou plus grande, puiſque dans le téleſcope aucun verre ne ſauroit être placé entre entre les points A & B. Enſuite, l'ouverture du ſecond verre QQ, qui répond au petit miroir QQ, doit être très petite, pour ne pas intercepter trop de rayons: & enfin, l'ouverture du troiſieme verre RR ne ſauroit être plus grande que le trou dont le grand miroir eſt percé, qu'il eſt bon de faire auſſi petit qu'il eſt poſſible.

12. Il ſemble qu'on pourroit remédier à cet inconvénient, en donnant au miroir une plus grande étendue, pour qu'une aſſez grande quantité de lumiere en puiſſe être réfléchie, quoiqu'on y faſſe un trou très conſidérable; & alors on ne ſeroit plus aſtreint, ni à faire le ſecond miroir QQ ſi petit, ni à donner au verre RR une trop petite ouverture. Mais il n'y a aucun doute que l'expérience n'ait fait abandonner cet expédient, qui n'eſt pas certainement échappé à l'attention de ceux qui ont travaillé ſur cette matiere; & on s'eſt auſſi convaincu par la Théorie, que vers le centre d'un miroir la réflexion eſt beaucoup plus réguliere pour former une image diſtincte, que vers les bords; de ſorte qu'une figure annulaire ne produit jamais un auſſi bon effet qu'une circulaire de la même aire. Par cette raiſon, je ſuivrai dans ces recherches la même regle, de percer le grand miroir d'un très petit trou, & de ne faire le petit miroir que tant ſoit peu plus grand, comme cela ſe pratique dans tous les téleſcopes d'Angleterre.

13. Voilà donc bien des limitations pour la lunette, que je ſubſtitue ici à la place du téleſcope. D'abord la diſtance BC ne ſauroit être plus petite que AB, & enſuite l'ouverture des verres QQ & RR doit être très petite. Si nous conſultons la pratique des meilleurs Artiſtes Anglois, le diametre du trou *oo* n'eſt qu'un quart du diametre du miroir PP; & dans les grands inſtrumens il en eſt une partie encore plus petite, comme $\frac{1}{5}$, ou même $\frac{1}{6}$: mais toujours le diametre du petit miroir QQ eſt un peu plus grand en raiſon de 2 : 3 ou de 3 : 4. Or, en obſervant ces limitations dans la conſtruction de la lunette, on comprend aiſément, qu'elle ne ſauroit plus découvrir un ſi grand champ,

champ, que ſi nous avions la pleine liberté d'arranger les verres à notre gré. C'eſt auſſi la raiſon pourquoi les téleſcopes découvrent un ſi petit champ, qui eſt principalement borné par la trop petite ouverture du verre RR; ce qu'il ſera bon de prouver par l'exemple d'un tel téleſcope, qui eſt d'ailleurs très excellent.

14. Ayant examiné ce téleſcope, j'ai trouvé les meſures ſuivantes en pouces.

Diſt. de foyer $p = 18$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 1\frac{1}{3}$.

Ouvertures AP $= 1\frac{1}{8}$; BQ $= \frac{1}{2}$; CR $= \frac{1}{3}$; DS $= \frac{1}{4}$.

Diſtances AB $= 21\frac{2}{3}$; BC $= 21\frac{1}{4}$; CD $= 3$; environ.

De là cherchons d'abord les images pour juger par-là du groſſiſſement, & poſant le demi-diametre du champ apparent $= \Phi$, nous trouverons:

Diſtances $Aa = 18$; $Ba = 3\frac{2}{3}$; $Bb = 25\frac{1}{2}$; $Cb = 4$; $Cc = 2$;

Images $ap = 18\Phi$; $bq = 135\Phi$; $cr = 67\frac{1}{2}\Phi$.

Donc, puiſque la diſtance cD eſt $1\frac{1}{3}$, cette image ſera vue ſous un angle $= 50\Phi$, & partant 50 fois plus grande que l'objet même, de ſorte que le groſſiſſement peut être eſtimé $m = 50$; ce qui ſemble aſſez bien d'accord avec l'expérience, quoique le plus léger changement dans le lieu du petit miroir, en changeant enſuite convenablement la diſtance CD, puiſſe très conſidérablement varier le groſſiſſement.

15. Pour juger maintenant du champ apparent même, conſidérons dans la lunette la route d'un rayon qui, venant de l'extrémité viſible de l'objet, paſſe par le centre de l'objectif A, puiſque l'ouverture de l'objectif ne contribue rien au champ. Ce rayon donc paſſera par le point Q du ſecond verre, de ſorte que BQ $= 21\frac{2}{3}\Phi$, où il ſera rompu, & paſſera l'axe en M, de ſorte que BM $= 3\frac{1}{2}$ & CM $= 18$; donc CR $= 110\Phi$. Or en R ſe fait une nouvelle réfraction, qui dirige le rayon en N, en ſorte que CN $= 5\frac{1}{7}$ & DN $= 2\frac{1}{7}$, donc DS $= 46\Phi$. Enfin en S le rayon eſt rompu pour aller en O, Fig 3

de ſorte que DO $= \frac{6}{7}\frac{9}{3}$, & en O eſt le lieu de l'œil. A préſent il ne reſte qu'à comparer ces valeurs BQ, CR, & DS, avec les réelles, & la moindre valeur qui en réſulte pour Φ donnera le demi-diametre du champ apparent.

16. Le ſecond verre, ou le petit miroir QQ, donne $21\frac{2}{5}\Phi = \frac{1}{2}$, & partant $\Phi = \frac{1}{43}$, ou bien $\Phi = \frac{1}{44}$: de la même maniere le verre RR donnne $110\Phi = \frac{1}{3}$; donc $\Phi = \frac{1}{330}$: & enfin l'oculaire SS donne $46\Phi = \frac{1}{4}$; donc $\Phi = \frac{1}{184}$. C'eſt donc le verre RR qui borne le champ apparent, & ſi les circonſtances permettoient de donner au verre RR une plus grande ouverture, le champ apparent en recevroit une augmentation proportionelle. Mais il ſeroit bien inutile de vouloir donner dans cette vue à l'oculaire SS une plus grande ouverture, puiſque maintenant ce n'eſt qu'environ la moitié qui y concourt, & le reſte eſt tout à fait ſuperflu. On en pourroit reſſerrer l'ouverture preſque juſqu'à la moitié, ſans diminuer le champ; & partant il eſt fort indifférent, quelle figure on donne à ce verre; mais je ne ſaurois croire, que celle d'un ménifque ait la moindre préférence. Je regarde plutôt comme un grand défaut de cet arrangement des verres, que l'ouverture de l'oculaire SS n'entre point dans la détermination du champ, qui par un autre arrangement pourroit être porté preſqu'au double.

17. Comparons maintenant ce champ apparent, dont le demi-diametre eſt $\Phi = \frac{1}{330}$, avec celui que les lunettes ordinaires découvrent pour le même groſſiſſement $m = 50$. Or celles qui ſont compoſées de deux verres convexes, en donnant à l'oculaire une ouverture dont le diametre eſt égal à la moitié de ſa diſtance de foyer, donnent pour ce groſſiſſement $\Phi = \frac{1}{150}$; & une bonne lunette à quatre verres peut bien donner le double $\Phi = \frac{1}{150}$, de ſorte que le diametre du champ ſeroit trois fois plus grand que dans le téleſcope, & partant le champ même 9 fois plus grand. Par là il eſt clair qu'on a bien raiſon de ſe plaindre, que ces téleſcopes découvrent un trop petit champ; & j'en ai trouvé auſſi des devis, qui donnent encore un moindre champ.

18.

18. Rien ne ſeroit plus aiſé que de procurer à ce téleſcope un plus grand champ, & de le porter même au double; on n'auroit qu'à faire le trou du grand miroir deux fois plus grand, & augmenter également l'ouverture du verre RR. Il eſt vrai qu'on perdroit quelque choſe ſur la clarté; mais ce qu'on gagneroit dans le champ ne ſeroit pas à mépriſer; d'ailleurs, une petite augmentation dans la grandeur des miroirs pourroit réparer ce défaut. Mais je ne diſconviens pas, que ce remede ne puiſſe être ſujet à d'autres inconvéniens; & partant, ſans augmenter le trou du miroir, ne ſeroit-il pas poſſible de trouver une autre diſpoſition dans les verres, tant à l'égard de leurs diſtances de foyer, que de leurs diſtances entr'eux, qui produiſît un plus grand champ? On n'en ſauroit douter, & quelques eſſais nous découvriroient bien d'autres diſpoſitions. Mais on ne manqueroit pas de tomber dans un autre inconvénient, celui des couleurs d'iris; & c'eſt peut-être la raiſon pourquoi l'on n'oſe preſque rien changer dans l'arrangement une fois établi. Voici donc mes recherches, où je tiens compte de toutes les conditions qu'on doit remplir dans la conſtruction de ces téleſcopes.

19. Après avoir nommé les diſtances de foyer de nos quatre verres f, g, r, s, ſoient les demi-diametres de leurs ouvertures:

$$AP = x; \quad BQ = \pi' q; \quad CR\ \pi' r \quad \& \quad DS = \pi'' s,$$

& enſuite les nombres expoſans pour les lieux des images:

$$\mathfrak{B} = b; \qquad \mathfrak{C} = -c \quad \& \quad \mathfrak{D} = 1.$$

Cela poſé, que m ſignifie le groſſiſſement, & Φ le demi-diametre du champ apparent, & on aura $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$. Que ω ſoit la plus grande valeur que les fractions π, π', π'' puiſſent recevoir, & poſons $\pi = \delta\omega$; $\pi' = \gamma\omega$ & $\pi'' = -\omega$, où l'on peut prendre $\frac{1}{4}$ pour

pour ω, ſi le verre eſt également convexe des deux côtés; or ζ & γ ſont des fractions plus petites que 1. Alors, poſant pour abréger $M = \frac{1 + \gamma - \zeta}{m - 1}$, nous aurons $\Phi = M\omega$, où il eſt clair que, pour augmenter le champ apparent, il ſeroit bon de prendre $\gamma = 1$, & de diminuer ζ autant qu'il eſt poſſible. Mais, puiſque nous ſommes gênés par les circonſtances expoſées ci-deſſus, nous ſommes obligés de prendre $\gamma < 1$; mais l'oculaire SS influera toujours par toute ſon ouverture ſur le champ apparent, d'où il doit être fait également convexe des deux côtés.

20. En faiſant maintenant l'application de mes regles générales, on trouve les déterminations ſuivantes pour la conſtruction de ces lunettes.

$q = \frac{bM}{\zeta b - M} p$	AP $= x$	AB $= \frac{\zeta b}{\zeta b - M} p$,
$r = \frac{bc}{1-b} \cdot \frac{M}{\gamma c + \zeta - M} p$	BQ $= \frac{M}{\zeta b - M} x + \zeta\omega q$	BC $= \frac{b}{1-b} \cdot \frac{M(\zeta(1-b)+\gamma c)}{(\zeta b - M)(\gamma c + \zeta - M)} p$,
	CR $= \gamma\omega r$	CD $= \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M(1+\gamma(1+c))}{(\gamma c + \zeta - M)(1-\zeta+\gamma+M)} p$,
$s = \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M}{1-\zeta+\gamma+M} p$	DS $= \omega s$	& DO $= \frac{s}{Mm}$.

Mais, pour détruire les couleurs d'iris, puiſque le ſecond verre QQ, comme tenant lieu d'un miroir, ne doit pas entrer en compte, nous aurons cette équation à remplir:

$\frac{\gamma}{\gamma c + \zeta - M} = \frac{1}{1-\zeta+\gamma+M}$, doù nous tirons $\gamma c + \zeta - M = \gamma(1 - \zeta + \gamma + M)$.

Enſuite il faut obſerver que BC ne ſauroit être plus petit que AB, & que tant BQ que CR doivent être très petits.

21.

21. Poſons, pour abréger, $\mathfrak{C} - \gamma - M = \nu M$, & partant $Mm = 1 - \nu M$; donc $M = \frac{1}{m+\nu}$ & $\Phi = \frac{\omega}{m+\nu}$. Soit de plus $\mathfrak{C} = M$, & partant $\gamma = (\mu - \nu)M$, de ſorte que $\mu > \nu\,(\mu + 1)$; alors la deſtruction des couleurs d'iris donne $(\mu - \nu)\,c + \mu = (\mu - \nu)\,(1 - \nu M) = (\mu - \nu)\,\frac{m}{m+\nu}$; donc $c = \frac{m}{m+\nu} - \frac{\mu}{\mu-\nu}$, & $1 + c = \frac{m}{m+\nu} - \frac{\nu}{\mu-\nu}$; & de là

$$q = \frac{b}{(\mu+1)\,b-1}\,p \qquad r = \frac{bc}{1-b}\cdot\frac{m+\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{p}{m} \qquad s = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{p}{m}$$

$$AP = x \qquad BQ = \frac{1}{(\mu+1)b-1}x + \frac{\mu+1}{m+\nu}\omega q \qquad CR = \frac{\mu-\nu}{m+\nu}\omega r \qquad DS = \omega s$$

$$AB = \frac{(\mu+1)\,b}{(\mu+1)\,b-1}F, \qquad BC = \frac{b}{1-b}\cdot\frac{(\mu+1)(1-b)+(\mu-\nu)c}{(\mu+1)\,b-1}\cdot\frac{(\mu+\nu)p}{m(\mu-\nu)},$$

$$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{m+\mu}{\mu-\nu}\cdot\frac{p}{m}, \qquad DO = \frac{m+\nu}{m}s;$$

où il eſt clair, puiſque c doit être un nombre poſitif, qu'il faut prendre ν négativement, ce qui eſt fort avantageux, parce que le champ apparent en devient plus grand.

22. Rempliſſons maintenant la condition par laquelle l'intervalle BC ne ſauroit être plus petit que AB; & poſons pour cet effet BC = AB, puiſque rien n'empêche qu'on ne mette le verre RR dans le trou même du miroir, ou qu'on n'en puiſſe conſidérer la diſtance comme nulle. Alors on aura

$$(\mu+1)(1-b)\,m\,(\mu-\nu) = (\mu+1)(1-b)(m+\nu) + (\mu-\nu)(m+\nu)c,$$

& partant $\frac{c}{1-b} = \frac{(\mu+1)\,((\mu-\nu-1)\,m-\nu)}{(\mu-\nu)\,(m+\nu)}$;

où, ſi nous ſubſtituons la valeur de $c = \frac{-\nu(m+\mu)}{(\mu-\nu)(m+\nu)}$, nous aurons $1-b = \frac{-\nu(m+\mu)}{(\mu+1)((\mu-\nu-1)m-\nu)}$, d'où nous tirons auſſi valeur de b.

23. Poſons donc $-n$ au lieu de ν, pour avoir $\Phi = \frac{\omega}{m-n}$, & nous aurons

$$c = \frac{n(m+\mu)}{(\mu+n)(m-n)}; \quad 1-b = \frac{n(m+\mu)}{(\mu+1)((\mu+n-1)m+n)}.$$

Soit enſuite, pour abréger,

$$(\mu+1)b-1 = \zeta = \frac{m(\mu-1)(\mu+n)}{(\mu+n-1)m+n}, \quad \&$$

$$\frac{c}{1-b} = \theta = \frac{(\mu+1)((\mu+n-1)m+n)}{(\mu+n)(m+n)},$$

& les déterminations pour la conſtruction du téleſcope ſeront

$q = \frac{b}{\zeta}p$ | AP $= x$ | AB $= \frac{(\mu+1)b}{\zeta}p$,

BQ $= \frac{x}{\zeta} + \frac{\mu+1}{m-n}\omega q$ | BC $= \frac{(\mu+1)b}{\zeta}p$,

$r = b\theta \cdot \frac{m-n}{\mu+n} \cdot \frac{p}{m}$ | CR $= b\theta\omega \cdot \frac{p}{m}$ | CD $= \frac{b\theta}{1+c} \cdot \frac{m+\mu}{\mu+n} \cdot \frac{p}{m}$,

$s = \frac{b\theta}{1+c} \cdot \frac{p}{m}$ | DS $= \omega s$ | DO $= \frac{m-n}{m}s$;

où CR marquant le demi-diametre du trou, doit être une certaine partie comme $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de x, & alors la lettre ζ doit auſſi être ou 4 ou 5. Le demi-diametre du trou à l'œil doit être plus petit que

$$\frac{m\mu + 2mn - nn}{m(\mu + n)} s \text{ . ang. BCQ},$$

pour écarter les rayons étrangers. Or

$$\text{ang. BCQ} = \frac{\zeta}{1+\zeta} \cdot \frac{BQ}{p},$$

d'où la dite formule devient $= \frac{\mu - 1}{m}$. BQ.

24. Posant $n = 0$, on aura pour le champ $\Phi = \frac{\omega}{m}$, ou bien prenant $\omega = \frac{1}{4}$ en minutes $\Phi = \frac{859}{m}$ minutes, qui est déjà plus grand que dans les lunettes astronomiques ordinaires. Or alors nous aurons $c = 0$, $1 - b = 0$, donc $b = 1$, &

$$\zeta = \mu \quad \& \quad \theta = \frac{\mu\mu - 1}{\mu}.$$

Par conséquent, prenant $\omega = \frac{1}{4}$, nous obtiendrons les déterminations suivantes:

$$q = \frac{p}{\mu}$$

$$r = \frac{\mu\mu - 1}{\mu\mu} p$$

$$s = \frac{\mu\mu - 1}{\mu} \cdot \frac{p}{m}$$

AP $= x$	AB $= \frac{\mu + 1}{\mu} p$,
BQ $= \frac{x}{\mu} + \frac{(\mu+1)p}{4m\mu}$	BC $= \frac{\mu + 1}{\mu} p$,
CR $= \frac{(\mu\mu - 1)p}{4m\mu}$	CD $= \frac{\mu\mu - 1}{\mu\mu} \cdot \frac{(m+\mu)}{\mu} p$,
DS $= \frac{s}{4}$	DO $= s$.

Il faut donc prendre $\mu = 4$, ou plus grand, & puisque l'ouverture du miroir doit être proportionelle au grossissement, supposons en général $x = \frac{m}{\eta}$ pouces, & soit CR $= \frac{x}{\mu}$; par conséquent $\frac{(\mu\mu-1)p}{4m\mu}$ $= \frac{m}{\mu\eta}$; donc $p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu - 1)}$ pouces.

25. Donnons donc ces valeurs aux quantités x & p, & nos meſures ſeront exprimées en pouces de cette ſorte:

Diſt. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu-1)}$	$AP = \frac{m}{\eta}$	$AB = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu-1)}$,
$q = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu\mu-1)}$	$BQ = \frac{m}{\eta(\mu-1)}$	$BC = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu-1)}$,
$r = \frac{4mm}{\eta\mu\mu}$	$CR = \frac{m}{\eta\mu}$	$CD = \frac{4m(m+\mu)}{\eta\mu\mu}$,
$s = \frac{4m}{\eta\mu}$	$DS = \frac{m}{\eta\mu}$	$DO = \frac{4m}{\eta\mu}$;

où CR exprime en même tems le demi-diametre du trou dont il faut percer le grand miroir PP; & BQ devient un peu plus grand que CR. Or le demi-diametre du champ apparent ſera $\Phi = \frac{859}{m}$ minutes.

26. Dans les lunettes on prend communément, ſelon la regle de Huygens, $\eta = 60$; mais, puiſqu'ici le miroir PP eſt percé d'un trou, & qu'il réfléchit moins de rayons qu'un verre n'en tranſmet, il faut bien prendre $\eta = 40$. Suppoſons donc $\mu = 4$, & nous aurons les meſures ſuivantes pour la conſtruction des Téleſcopes:

Diſt. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{150}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{120}$,
$q = \frac{mm}{600}$	$BQ = \frac{m}{120}$	$BC = \frac{mm}{120}$,
$r = \frac{mm}{160}$	$CR = \frac{m}{160}$	$CD = \frac{m(m+4)}{160}$,
$s = \frac{m}{40}$	$DS = \frac{m}{160}$	$DO = \frac{m}{40}$.

Or,

Or, posant $\mu = 5$, on aura

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{240}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{200}$,
$q = \frac{mm}{1200}$	$BQ = \frac{m}{160}$	$BC = \frac{mm}{200}$,
$r = \frac{mm}{250}$	$CR = \frac{m}{200}$	$CD = \frac{m(m+5)}{250}$,
$s = \frac{m}{50}$	$DS = \frac{m}{200}$	$DO = \frac{m}{50}$.

Posons aussi $\mu = 6$ pour avoir

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{350}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{300}$,
$q = \frac{mm}{2100}$	$BQ = \frac{m}{200}$	$BC = \frac{mm}{300}$,
$r = \frac{mm}{360}$	$CR = \frac{m}{240}$	$CD = \frac{m(m+6)}{360}$,
$s = \frac{m}{60}$	$DS = \frac{m}{240}$	$DO = \frac{m}{60}$.

27. Or, pour rendre insensible la confusion causée par l'ouverture du miroir, il faut prendre à peu près $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces; d'où l'on devroit prendre à peu près $\mu = \sqrt[3]{m}$; mais rien n'empêche de prendre μ plus petit; la confusion deviendra encore moins sensible. Donc la premiere forme aura lieu tant que $m > 64$, la seconde tant que $m > 125$, & la troisieme tant que $m > 216$. Donc, pour de moindres grossissemens, il faut encore ajouter cette forme $\mu = 3$:

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{80}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{60}$,
$q = \frac{mm}{240}$	$BQ = \frac{m}{80}$	$BC = \frac{mm}{60}$,
$r = \frac{mm}{90}$	$CR = \frac{m}{120}$	$CD = \frac{m(m+3)}{90}$,
$s = \frac{m}{30}$	$DS = \frac{m}{120}$	$DO = \frac{m}{30}$;

où le groſſiſſement doit être plus grand que 27. Mais, en général prenant $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces, & $x = \frac{m}{40}$ pouce, on détermine la valeur du nombre μ ainſi: $\mu\mu = 1 + \sqrt[3]{mm}$, ayant poſé $\eta = 40$; mais laiſſant le nombre η indéterminé, il faut prendre $\mu\mu = 1 + \frac{40\sqrt[3]{mm}}{\eta}$.

28. Commençons donc plutôt par la valeur de p, qui doit être $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces, & de là nous tirons $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{\mu\mu - 1}$. Or cette valeur doit être tout au plus 40, & ſi elle eſt plus petite, on jouira d'une lumiere d'autant plus grande. Par cette raiſon, poſons $\eta < 40$, & nous aurons $\sqrt[3]{mm} < \mu\mu - 1$; donc $m < (\mu\mu - 1)\sqrt{(\mu\mu - 1)}$. Par conſéquent, prenant ſucceſſivement pour μ les nombres 3, 4, 5, 6, on n'aura qu'à obſerver les conditions ſuivantes:

ſi $\mu = 3$; $m < 23$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{8} = 5\sqrt[3]{mm}$,

ſi $\mu = 4$; $m < 58$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{15} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{mm}$,

ſi μ

$$\text{si } \mu = 5; \quad m < 118; \quad \& \ \eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{24} = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{mm},$$

$$\text{si } \mu = 6; \quad m < 207; \quad \& \ \eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{35} = \tfrac{8}{7}\sqrt[3]{mm},$$

$$\text{si } \mu = 7; \quad m < 333; \quad \& \ \eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{48} = \tfrac{5}{6}\sqrt[3]{mm},$$

$$\text{si } \mu = 8; \quad m < 500; \quad \& \ \eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{63} = \tfrac{40}{63}\sqrt[3]{mm}.$$

Mais, ayant trouvé ces valeurs, & pris p ou égal ou plus grand que $\frac{1}{10}m\sqrt[3]{m}$, les autres mesures seront:

$p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu-1)}$	$AP = \frac{m}{\eta} = x$	$AB = \frac{\mu+1}{\mu}p = p+q.$
$q = \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{x}{\mu-1}$	$BC = \frac{\mu+1}{\mu}p = p+q.$
$r = \frac{\mu\mu-1}{\mu\mu}p$	$CR = \frac{x}{\mu} = \frac{1}{4}s$	$CD = r+s.$
$s = \frac{\mu}{m}r$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DO = s.$

Or pour le champ apparent on a toujours $\phi = \frac{859}{m}$ minutes.

29. Mais tenons-nous-en aux formules du §. 25, & prenons $\mu\mu = 1 + \sqrt[3]{mm}$, posant $\eta = 40$, afin que $p = \frac{1}{10}m\sqrt[3]{m}$, & nos mesures seront:

$p =$

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = p + q,$
$q = \frac{p}{\mu}$	$BQ = \frac{m}{40(\mu-1)}$	$BC = p + q,$
$r = \frac{mm}{10\mu\mu}$	$CR = \frac{m}{40\mu}$	$CD = r + s,$
$s = \frac{m}{10\mu}$	$DS = \frac{m}{40\mu}$	$DO = s;$

d'où l'on voit que plus le groſſiſſement m eſt grand, plus auſſi ſera augmenté le nombre μ, de ſorte que le trou devient de plus en plus petit par rapport au miroir même. En voici quelques exemples.

I. Exemple $m = 10$, où $\mu = 2,3752$:

$p = 2,1544$	$AP = 0,2500$	$AB = 2,8749,$
$q = 0,7205$	$BQ = 0,1818$	$BC = 2,8749,$
$r = 1,7725$	$CR = 0,1053$	$CD = 2,1935,$
$s = 0,4210$	$DS = 0,1052$	$DO = 0,4210,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 86' = 1°,26'$.

II. Exemple $m = 20$, où $\mu = 2,8928$:

$p = 5,4288$	$AP = 0,5000$	$AB = 7,3059,$
$q = 1,8771$	$BQ = 0,2642$	$BC = 7,3059,$
$r = 4,7800$	$CR = 0,1729$	$CD = 5,4714,$
$s = 0,6914$	$DS = 0,1729$	$DO = 0,6914,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 43'$.

III. Exemple $m = 30$, où $\mu = 3,2642$:

$p = 9,3217$	$AP = 0,7500$	$AB = 12,1774,$
$q = 2,8557$	$BQ = 0,3313$	$BC = 12,1774,$
$r = 8,4468$	$CR = 0,2298$	$CD = 9,3659,$
$s = 0,9191$	$DS = 0,2298$	$DO = 0,9191,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 29'$.

IV.

IV. Exemple $m = 50$, où $\mu = 3{,}8173$:

$p = 18{,}4201$	AP $= 1{,}2500$	AB $= 23{,}2455$,
$q = 4{,}8254$	BQ $= 0{,}4437$	BC $= 23{,}2455$,
$r = 17{,}1561$	CR $= 0{,}3274$	CD $= 18{,}4659$,
$s = 1{,}3098$	DS $= 0{,}3274$	DO $= 1{,}3098$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 17'$.

V. Exemple $m = 75$, où $\mu = 4{,}3341$:

$p = 31{,}6287$	AP $= 1{,}8750$	AB $= 38{,}9263$,
$q = 7{,}2976$	BQ $= 0{,}5624$	BC $= 38{,}9263$,
$r = 29{,}9449$	CR $= 0{,}4326$	CD $= 31{,}6754$,
$s = 1{,}7305$	DS $= 0{,}4326$	DO $= 1{,}7305$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 11\frac{1}{2}'$.

VI. Exemple $m = 100$, où $\mu = 4{,}7481$:

$p = 46{,}4159$	AP $= 2{,}5000$	AB $= 56{,}1916$,
$q = 9{,}7757$	BQ $= 0{,}6670$	BC $= 56{,}1916$,
$r = 44{,}3571$	CR $= 0{,}5261$	CD $= 46{,}4615$,
$s = 2{,}1044$	DS $= 0{,}5261$	DO $= 2{,}1044$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 8\frac{1}{2}'$.

30. Quoique le champ que cet arrangement découvre soit déjà assez considérable, voyons s'il n'est pas possible de le porter à un plus haut degré encore. Dans cette vue, posons dans les formules du §. 20, $\gamma = 1$, & soit $\mathfrak{G} = (\mu + 1)\,M$, pour avoir $M(m - 1) = 2 - (\mu + 1)\,M$, donc $M\frac{2}{m + \mu}$; & $\Phi = \frac{1718}{m + \mu}$ minutes, prenant $\omega = \frac{1}{4}$. Or la destruction des couleurs d'iris donne $c + \mu M = 2 - \mu M$, ou $c = 2 - 2\mu M = \frac{2\,(m - \mu)}{m + \mu}$. De là nous aurons:

$\mathcal{E}b - M = M((\mu+1)b-1)$; $\gamma c + \mathcal{E} - M = 2 - \mu M$; $1 - \mathcal{E} + \gamma + M = 2 - \mu M = mM$;

$\mathcal{E}(1-b) + \gamma c = M(m+1-(\mu+1)b)$; $1 + \gamma(1+c) = 2mM$,

& partant ces meſures pour la conſtruction des téleſcopes :

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{40}$ pouces	$AB = \frac{(\mu+1)b}{(\mu+1)b-1} p$
$q = \frac{b}{(\mu+1)b-1} \cdot p$	$BQ = \frac{x}{(\mu+1)b-1} + \frac{\mu+1}{2(m+\mu)} q$	$BC = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{m+1-(\mu+1)b}{(\mu+1)b-1} \cdot \frac{p}{m}$,
$r = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{2(m-\mu)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{4} r$	$CD = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{4(m-\mu)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m} = 2s$
$s = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{2(m-\mu)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{m+\mu}{2m} s$;

où il faut faire $BC = AB$, ce qui fournit $b = \frac{\mu m - 1}{(\mu+1)(m-1)}$, & $1 - b = \frac{m-\mu}{(\mu+1)(m-1)}$, & $(\mu+1)b - 1 = \frac{(\mu-1)m}{m-1}$; d'où réſultent les meſures ſuivantes :

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{40}$ pouces	$AB = \frac{\mu m - 1}{(\mu-1)m} p$
$q = \frac{\mu m - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-1}{(\mu-1)m} x + \frac{m+1}{2(m+\mu)} q$	$BC = \frac{\mu m - 1}{(\mu-1)m} p$
$r = \frac{2(\mu m - 1)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{4} r$	$CD = 2s$
$s = \frac{2(\mu m - 1)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{m+\mu}{2m} s$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{1718}{m+\mu}$ minutes.

31.

31. Mais ici, à moins que le groſſiſſement m ne ſoit très grand, on ne ſauroit ſatisfaire aux conditions preſcrites. Car, prenant pour μ un nombre petit, afin que CR ou le demi-diametre du trou devienne petit, le petit miroir devient trop grand, & intercepte une trop grande portion de lumiere: mais, ſi l'on augmente le nombre μ, il faut faire le trou trop grand, d'où la clarté ſouffre encore une perte conſidérable. Pour mieux éclaircir cela, conſidérons le cas où $m = 50$, & prenons $p = 18$, comme nous avons trouvé ci-deſſus, & nous aurons:

$p = 18$	$AP = 1,25 = \frac{5}{4}$	$AB = \frac{50\mu - 1}{50(\mu - 1)} \cdot 18$
$q = \frac{50\mu - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{18}{50}$	$BQ = \frac{49}{40(\mu+1)} + \frac{\mu+1}{2(50+\mu)} q$	$BC = \frac{50\mu - 1}{50(\mu - 1)} \cdot 18$
$r = \frac{2(50\mu - 1)}{50 + \mu} \cdot \frac{18}{50}$	$CR = \frac{50\mu - 1}{50 + \mu} \cdot \frac{9}{50}$	$CD = 2s$
$s = \frac{2(50\mu - 1)}{150 - \mu} \cdot \frac{18}{50}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{50 + \mu}{100} s.$

Maintenant poſons $\mu = 3\frac{1}{2}$, afin que CR devienne égal à peu près à la premiere partie de BQ, & nous trouverons les meſures ſuivantes:

$p = 18$ pouces	$AP = 1,25$	$AB = 25,056$
$q = 5,568$	$BQ = 0,724$	$BC = 25,056$
$r = 2,341$	$CR = 0,585$	$CD = 1,710$
$s = 0,855$	$DS = 0,214$	$DO = 0,457,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 32'$,

qui dans le premier cas n'étoit que de $15'$. Mais c'eſt ici un grand inconvénient, que le diametre du petit miroir ſurpaſſe la moitié de celui du grand, & que le diametre du trou lui eſt preſque égal.

32. Développons auſſi le cas où $m = 100$; il faudra prendre $\mu = 4$, pour remplir les conditions preſcrites. Or pour p je mettrai 45 pouces, d'où nous tirons les meſures ſuivantes:

$p = 45$ pouces	AP $= 2,500$	AB $= 59,850$
$q = 11,970$	BQ $= 1,113$	BC $= 59,850$
$r = 3,453$	CR $= 0,863$	CD $= 2,426$
$s = 1,213$	DS $= 0,303$	DO $= 0,630$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 16\frac{1}{2}$ minutes.

Si nous comparons cet arrangement avec celui du premier cas, le demi-diametre du champ eſt preſque ici le double, mais le petit miroir eſt preſque deux fois plus grand ſelon le diametre, & le diametre du trou eſt au précédent comme 5 à 3. Or déjà auparavant le trou eſt plus grand qu'on ne le fait ordinairement. Cependant il ſemble que ce cas où $m = 100$ pourroit bien être exécuté dans la pratique, puiſque la grandeur du champ compenſeroit la diminution de la clarté, quand même il ne ſeroit pas poſſible de donner au grand miroir une plus grande ouverture, que la grandeur du trou ſemble pourtant bien admettre. Auſſi n'eſt-il pas abſolument néceſſaire, que le petit miroir ſoit auſſi grand qu'il eſt marqué ici; & il ſuffit que BQ ſurpaſſe un peu CR.

33. Pour remédier à cet inconvénient du trop grand trou dans les moindres groſſiſſemens, il faut rabattre quelque choſe du champ apparent, qui reſtera néanmoins plus grand que le premier cas, & par conſéquent beaucoup plus grand que dans les téleſcopes ordinaires. Il faut donc donner à γ une moindre valeur que 1, que je laiſſerai indéterminée, & poſant comme auparavant $\mathfrak{E} = (\mu + 1)M$, nous aurons $M = \frac{1 + \gamma}{m + \mu}$; & la deſtruction des couleurs d'iris fournit $c = \frac{(1 + \gamma)(\gamma m - \mu)}{\gamma (m + \mu)}$. Or l'égalité entre les intervalles AB & BC donne $1 - b = \frac{\gamma m - \mu}{(1 + \mu)(\gamma m - 1)}$, & $b = \frac{\gamma \mu m - 1}{(1+\mu)(\gamma m - 1)}$.

De là nous tirons les meſures ſuivantes:

$p =$

$$p = \alpha n \sqrt[3]{m} \text{ pouces}$$

$$q = \frac{\gamma\mu m - 1}{\gamma(\mu\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m}$$

$$r = \frac{(1+\gamma)(\gamma\mu m - 1)}{\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{\gamma m}$$

$$s = \frac{(1+\gamma)(\gamma\mu m - 1)}{\gamma(\gamma+2)m - \mu} \cdot \frac{p}{m}$$

$$\text{AP} = x = \tfrac{1}{4}\alpha m$$

$$\text{BQ} = \frac{\gamma m - 1}{(\mu - 1)\gamma m} x + \frac{(\mu+1)(1+\gamma)}{4(m+\mu)} q$$

$$\text{CR} = \frac{\gamma}{4} r$$

$$\text{DS} = \tfrac{1}{4} s$$

$$\text{AB} = \frac{\gamma\mu m - 1}{(\mu-1)\gamma m} p$$

$$\text{BC} = \frac{\gamma\mu m - 1}{(\mu-1)\gamma m} p$$

$$\text{CD} = \frac{1+\gamma}{\gamma} s$$

$$\text{DO} = \frac{m+\mu}{(1+\gamma)m} s$$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{3437(1+\gamma)}{4(m+\mu)}$ minutes;

où α eſt écrit pour $\frac{1}{100}$, afin que les formules ſoient plus générales, en cas qu'on veuille prendre $\text{AP} = x$ plus grand ou plus petit.

34. Avant que de faire l'application, je remarque que, dans la valeur de BQ, la derniere partie, qui eſt plus petite que la premiere, y eſt ajoutée, afin que le même degré de clarté regne par tout le champ apparent; & ſi on négligeoit cette partie, il n'en réſulteroit d'autre inconvénient, ſinon que les extrémités du champ paroitroient moins lumineuſes que le milieu. Donc, puiſque cet inconvénient eſt peuconſidérable, il ſuffit de donner à BQ une étendue tant ſoit peu plus grande que la premiere partie; mais à celle-ci il faut égaler le demi-diametre du trou CR, ce qui nous donne cette équation:

$$\frac{(1+\gamma)(\gamma\mu m - 1)}{(m+\mu)} \cdot \frac{\alpha\sqrt[3]{m}}{4\gamma} = \frac{\gamma m - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{\alpha}{4\gamma},$$

ou bien $(1+\gamma)(\mu-1)(\gamma\mu m - 1)\sqrt[3]{m} = (m+\mu)(\gamma m - 1)$.

Maintenant on peut donner à μ une valeur, qu'on jugera convenable pour rendre le trou aſſez petit, & enſuite il faut chercher par cette équation la valeur de γ.

35. Il ſe préſente ici une ſolution particuliere fort commode en poſant $\gamma = \frac{1}{\mu}$, qui donne

$$(\mu\mu - 1)(m-1)\sqrt[3]{m} = mm - \mu\mu, \text{ \& partant}$$

$$\mu\mu = \frac{mm + (m-1)\sqrt[3]{m}}{1 + (m-1)\sqrt[3]{m}},$$

d'où l'on tire à peu près $\mu = \sqrt[3]{m} + \frac{1}{2\sqrt[3]{m}}$;

où je remarque que la valeur de μ ne ſauroit être rendue beaucoup plus grande; car, poſant $\mu = \sqrt[3]{m} + 1$, la valeur de γ en réſulteroit négative. Par cette raiſon je m'arrête à cette ſolution particuliere, puiſqu'on ne ſauroit eſpérer d'augmenter μ beaucoup au delà: & dès que le groſſiſſement monte à 50 & au delà, le trou ne devient plus trop grand, & pourtant le champ apparent eſt encore très conſidérable. Cependant il n'eſt pas néceſſaire d'obſerver ſi ſoigneuſement ces valeurs de γ & μ, puiſqu'il ſuffit que les ouvertures BQ & CR deviennent aſſez petites.

36. Je conſidérerai donc le groſſiſſement $m = 50$, où je prends $p = 18$ pouces & $x = 1\frac{1}{4}$ pouce; mais, pour faire le petit miroir plus petit que ci-deſſus (§. 31), je poſerai $\mu = 4$, & j'aurai

$$p = 18 \text{ pouces} \qquad AP = 1\tfrac{1}{4} \qquad \left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{3(200\gamma - 1)}{25\gamma}$$

$$q = \frac{3(200\gamma - 1)}{125\gamma} \qquad BQ = \frac{50\gamma - 1}{120\gamma} + \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{1800\gamma} \qquad CD = \frac{1+\gamma}{\gamma}$$

$$r = \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{150\gamma\gamma} \qquad CR = \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{600\gamma} \qquad DO = \frac{27}{25(1+\gamma)};$$

$$s = \frac{9(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{125\gamma\gamma(\gamma+2)100} \qquad DS = \tfrac{1}{4}s \qquad \Phi = 16(1+\gamma) \text{ min.}$$

Main-

Maintenant, puiſque $BQ = \frac{50\gamma - 1}{120\gamma} + \frac{1}{2}CR$, & $CR = \frac{(1+\gamma)(200\gamma-1)}{600\gamma}$, développons ces valeurs pour pluſieurs hypotheſes de γ.

Si	$\frac{50\gamma-1}{120\gamma}$	$\frac{(1+\gamma)(200\gamma-1)}{600\gamma}$
$\gamma = 1$	$\frac{49}{120} = 0,408$	$\frac{2.199}{600} = 0,663$
$\gamma = \frac{1}{2}$	$\frac{48}{120} = 0,400$	$\frac{3.198}{2.600} = 0,495$
$\gamma = \frac{1}{3}$	$\frac{47}{120} = 0,392$	$\frac{4.197}{3.600} = 0,438$
$\gamma = \frac{1}{4}$	$\frac{46}{120} = 0,383$	$\frac{5.196}{4.600} = 0,408$
$\gamma = \frac{1}{5}$	$\frac{45}{120} = 0,375$	$\frac{6}{5}\cdot\frac{195}{600} = 0,390$
$\gamma = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{120} = 0,333$	$\frac{11}{10}\cdot\frac{190}{600} = 0,348$;

d'où l'on voit, qu'en diminuant γ, ces nombres vont en décroiſſant, mais auſſi le champ apparent en devient plus petit. Poſons donc $\gamma = \frac{1}{2}$, & nous aurons les déterminations ſuivantes:

$p = 18$ pouces	$AP = 1,250$	$AB = 23,760$
$q = 4,752$	$BQ = 0,565$	$BC = 23,760$
$r = 3,960$	$CR = 0,495$	$CD = 2,741$
$s = 0,901$	$DS = 0,225$	$DO = 0,720$,

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = 24'$,

où

où les valeurs de BQ & CR peuvent bien être admiſes dans la pratique. Mais conſidérons auſſi le cas $\gamma = \frac{1}{4}$, qui donne

$p = 18$ pouces	AP $= 1{,}250$	AB $= 23{,}520$
$q = 4{,}704$	BQ $= 0{,}519$	BC $= 23{,}520$
$r = 6{,}533$	CR $= 0{,}408$	CD $= 4{,}570$
$s = 0{,}914$	DS $= 0{,}229$	DO $= 0{,}790$,

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = 20'$.

37. Pour la pratique il ne reſte donc que d'expoſer ici les meſures trouvées pour quelques valeurs du nombre γ:

I. $\gamma = 1$; $\Phi = \frac{1718}{m+\mu}$ min:

$p = \alpha m \sqrt[3]{m}$	AP $= x = \frac{1}{4}\alpha m$	AB, BC $= \frac{\mu m - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	BQ $= \frac{m-1}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{\mu+1}{2(m+\mu)} q$	
$r = \frac{2(\mu m - 1)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	CR $= \frac{1}{4} r$	CD $= 2s$
$s = \frac{2(\mu m - 1)}{3m - \mu} \cdot \frac{p}{m}$	DS $= \frac{1}{4} s$	DO $= \frac{m+\mu}{2m} s$

II. $\gamma = \frac{1}{2}$; $\Phi = \frac{1289}{m+\mu}$ min:

$p = \alpha m \sqrt[3]{m}$	AP $= x = \frac{1}{4}\alpha m$	AB, BC $= \frac{\mu m - 2}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 2}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	BQ $= \frac{m-2}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{3(\mu+1)}{8(m+\mu)} q$	
$r = \frac{3(\mu m - 2)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	CR $= \frac{1}{8} r$	CD $= 3s$
$s = \frac{3(\mu m - 2)}{5m - 4\mu} \cdot \frac{p}{m}$	DS $= \frac{1}{4} s$	DO $= \frac{2(m+\mu)}{3m} s$.

III. $\gamma = \frac{1}{3}$; $\Phi = \frac{1146}{m+\mu}$ min:

$p = a m \sqrt[3]{m}$	$AP = x = \frac{1}{8} a m$	$AB \atop BC \Big\} = \frac{\mu m - 3}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 3}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-3}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{\mu+1}{3(m+\mu)} q$	
$r = \frac{4(\mu m - 3)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{12} r$	$CD = 4s$
$s = \frac{4(\mu m - 3)}{7m - 9\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{3(m+\mu)}{4m} s.$

IV. $\gamma = \frac{1}{4}$; $\Phi = \frac{1074}{m+\mu}$ min:

$p = a m \sqrt[3]{m}$	$AP = x = \frac{1}{4} a m$	$AB \atop BC \Big\} = \frac{\mu m - 4}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 4}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-4}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{5(\mu+1)}{16(m+\mu)} q$	
$r = \frac{5(\mu m - 4)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{16} r$	$CD = 5s$
$s = \frac{5(\mu m - 4)}{9m - 16\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{4(m+\mu)}{5m} s.$

38. De ces différens arrangemens on peut choisir, pour chaque cas proposé, celui qui conviendra le mieux avec les circonstances qu'on aura en vue. Pour en faire mieux voir l'application, choisissons le III cas, & supposons $\mu = 5$, pour avoir ces mesures:

$$p = a m \sqrt[3]{m} \qquad \left|\begin{array}{l} \mathrm{AP} = x = \frac{1}{4} a m \\ \mathrm{BQ} = \frac{m-3}{4m} x + \frac{2q}{m+5} \\ \mathrm{CR} = \frac{1}{12} r = \frac{8q}{m+5} \\ \mathrm{DS} = \frac{1}{4} s \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} \mathrm{AB} \\ \mathrm{BC} \end{array}\right\} = \frac{5m-3}{4m} p = 6q$$

$$q = \frac{5m-3}{24m} p \qquad \mathrm{CD} = 4s$$

$$r = \frac{4(5m-3)}{(m+5)m} p \qquad \mathrm{DO} = \frac{3(m+5)}{4m} s,$$

$$s = \frac{4(5m-3)}{7m-45} \cdot \frac{p}{m}$$

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = \frac{1146}{m+5}$ min.,

d'où je tirerai les devis ſuivans, en ſuppoſant $p = \frac{1}{12} m \sqrt[3]{m}$ pouce, & $x = \frac{m}{36}$ pouces, conformément à quelques conſtructions angloiſes, qui paroiſſent fort bonnes.

I. Devis $m = 10$. $\Phi = 76'$.

$p = 1{,}795$	$\mathrm{AP} = 0{,}278$	$\mathrm{AB}, \mathrm{BC} = 2{,}112$
$q = 0{,}352$	$\mathrm{BQ} = 0{,}095$	$\mathrm{CD} = 4{,}400$
$r = 2{,}250$	$\mathrm{CR} = 0{,}187$	$\mathrm{DO} = 1{,}519$
$s = 1{,}350$	$\mathrm{DS} = 0{,}338$	

II. Devis $m = 15$. $\Phi = 57'$.

$p = 3{,}083$	$\mathrm{AP} = 0{,}417$	$\mathrm{AB}, \mathrm{BC} = 3{,}702$
$q = 0{,}617$	$\mathrm{BQ} = 0{,}145$	$\mathrm{CD} = 3{,}944$
$r = 2{,}959$	$\mathrm{CR} = 0{,}247$	$\mathrm{DO} = 0{,}986.$
$s = 0{,}986$	$\mathrm{DS} = 0{,}247$	

III. Devis $m = 20$. $\Phi = 46'$.

$p = 4{,}524$	$\mathrm{AP} = 0{,}556$	$\mathrm{AB}, \mathrm{BC} = 5{,}484$
$q = 0{,}914$	$\mathrm{BQ} = 0{,}192$	$\mathrm{CD} = 3{,}696$
$r = 3{,}511$	$\mathrm{CR} = 0{,}276$	$\mathrm{DO} = 0{,}866.$
$s = 0{,}924$	$\mathrm{DS} = 0{,}231$	

Cet

Cet arrangement ne convient donc point aux petits groſſiſſemens, puiſque le trou du miroir devient trop grand; il faut pour ces cas donner à μ une plus petite valeur. Mais, pour les grands groſſiſſemens, cette forme y paroit fort propre.

39. Or, en conſidérant bien toutes les circonſtances, & en particulier que le petit miroir devienne un peu plus grand que le trou, afin qu'aucun rayon direct n'y puiſſe paſſer, je trouve que la quatrieme hypotheſe peut être appliquée à tous les groſſiſſemens, en ſuppoſant $\mu = 1 + \sqrt[3]{m}$. Donc, pour ôter les irrationalités, je poſe

$$\gamma = \tfrac{1}{4};\ m = n^3;\ \mu = n+1, \text{ de ſorte que } \Phi = \frac{1074}{n^3+n+1} \text{ min:},$$

& je trouve ces meſures:

$$p = \frac{n^4}{12} \qquad \mathrm{AP} = \frac{n^3}{36} \qquad \left.\begin{matrix}\mathrm{AB}\\ \mathrm{BC}\end{matrix}\right\} = \frac{n^3(n+1)-4}{12}$$

$$q = \frac{n^3(n+1)-4}{12(n+2)} \qquad \mathrm{BQ} = \frac{n^3-4}{36n} + \frac{r}{16n} \qquad \mathrm{CD} = 5s$$

$$r = \frac{n^3(n+1)-4}{n^3+n+1} \cdot \frac{5n}{12} \qquad \mathrm{CR} = \frac{r}{16} \qquad \mathrm{DO} = \tfrac{4}{5}\left(1+\frac{n+1}{n^3}\right)s.$$

$$s = \frac{n^3(n+1)-4}{9n^3-16(n+1)} \cdot \frac{5n}{12} \qquad \mathrm{DS} = \frac{s}{4}$$

Le demi-diametre du trou auquel on applique l'œil, doit être plus petit que $\frac{\mathrm{BQ}}{nn}$, afin que les rayons étrangers en ſoient exclus:

Mais, puiſqu'il n'eſt pas néceſſaire d'obſerver ces meſures avec une exactitude ſcrupuleuſe, il ſuffit de prendre des valeurs approchantes pour la commodité du calcul: d'où l'on aura

$$p = \frac{n^4}{12} \qquad AP = \frac{n^3}{36} \qquad \left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{n^3(n+1)}{12} - \frac{1}{8}$$

$$q = \frac{n^3 - nn + 2n - 3}{12} \qquad BQ = \frac{nn}{36} + \frac{5(n+1)}{192} \qquad CD = 5s$$

$$r = \frac{5(nn+n-3)}{12} \qquad CR = \frac{5(nn+n-3)}{192} \qquad DO = \frac{nn+n+2}{27};$$

$$s = \frac{5(nn+n+2)}{108} \qquad DS = \tfrac{1}{4}s$$

d'où je tire les devis ſuivans:

I. Devis $n = 2\frac{1}{2}$; donc $m = 15\frac{1}{2}$, $\Phi = 56'$.

$p = 3\frac{1}{4}$	$AP = 0{,}43$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = 4{,}22$
$q = 1$	$BQ = 0{,}25$	
$r = 2\frac{1}{2}$	$CR = 0{,}16$	$CD = 1{,}25$
$s = \frac{1}{4}$	$DS = 0{,}06$	$DO = 0{,}20.$

II. Devis $n = 3$; donc $m = 27$ & $\Phi = 36'$.

$p = 6{,}750$	$AP = 0{,}750$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = 8{,}667$
$q = 1{,}733$	$BQ = 0{,}316$	
$r = 4{,}194$	$CR = 0{,}262$	$CD = 3{,}630$
$s = 0{,}726$	$DS = 0{,}182$	$DO = 0{,}581,$

III. Devis $n = 3\frac{1}{2}$; donc $m = 43$ & $\Phi = 21'$.

$p = 12{,}505$	$AP = 1{,}196$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = 15{,}752$
$q = 2{,}864$	$BQ = 0{,}412$	
$r = 5{,}818$	$CR = 0{,}364$	$CD = 4{,}390$
$s = 0{,}878$	$DS = 0{,}220$	$DO = 0{,}702.$

IV. Devis $n = 4$; donc $m = 64$ & $\Phi = 15\frac{1}{2}$ min.

$p =$

$p = 21,333$	AP $= 1,778$	AB, BC $= 26,333$
$q = 4,389$	BQ $= 0,536$	
$r = 7,632$	CR $= 0,477$	CD $= 5,310$
$s = 1,062$	DS $= 0,265$	DO $= 0,850.$

V. Devis $n = 4\frac{1}{2}$; donc $m = 91$ & $\Phi = 11'.$

$p = 34,172$	AP $= 2,531$	AB, BC $= 41.432$
$q = 6,374$	BQ $= 0,672$	
$r = 9,648$	CR $= 0,603$	CD $= 6,365$
$s = 1,273$	DS $= 0,318$	DO $= 1,018.$

VI. Devis $n = 5$; donc $m = 125$ & $\Phi = 8\frac{1}{4}'.$

$p = 52,083$	AP $= 3,472$	AB, BC $= 62,167$
$q = 8,881$	BQ $= 0,816$	
$r = 11,864$	CR $= 0,742$	CD $= 7,550$
$s = 1,510$	DS $= 0,378$	DO $= 1,208.$

VII. Devis $n = 6$; donc $m = 216$ & $\Phi = 4\frac{3}{4}$ min.

$p = 108,000$	AP $= 6,000$	AB, BC $= 125,667$
$q = 15,708$	BQ $= 1,157$	
$r = 16,906$	CR $= 1,057$	CD $= 10,290$
$s = 2,058$	DS $= 0,512$	DO $= 1,646.$

40. Or j'ai déjà remarqué ci-deſſus, que pour les grands groſſiſſemens on peut même poſer $\gamma = 1$, d'où le champ apparent devient d'autant plus conſidérable. Et partant on peut établir les eſpeces ſuivantes.

I. Eſpece,

depuis $m = 8$ juſqu'à $m = 27$; $\Phi = \frac{1074}{m + 3}$ min.

$p = \ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{3m-4}{2} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{3m-4}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-4}{2} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{8}CR$	$CD = 5s$
$r = \frac{5(3m-4)}{m+3} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{8}{11}r$	$DO = \frac{4(m+3)}{5m}s.$
$s = \frac{5(3m-4)}{9m-48} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	

II. Eſpece,

depuis $m = 27$ juſqu'à $m = 64$; $\Phi = \frac{1146}{m+4}$ min:

$p = \ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{4m-3}{3} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{4m-3}{15} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-3}{3} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{3}CR$	$CD = 4s$
$r = \frac{4(4m-3)}{m+4} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{3}{11}r$	$DO = \frac{3(m+4)}{4m}s.$
$s = \frac{4(4m-3)}{7m-36} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	

III. Eſpece,

depuis $m = 64$ juſqu'à $m = 125$; $\Phi = \frac{1289}{m+5}$ min:

$p = \ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{5m-2}{4} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{5m-2}{24} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-2}{4} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{4}CR$	$CD = 3s$
$r = \frac{3(5m-2)}{m+5} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{8}r$	$DO = \frac{2(m+5)}{3m}s.$
$s = \frac{3(5m-2)}{5m-20} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	

IV.

IV. Eſpece,

depuis $m = 125$ juſqu'à 216; $\Phi = \frac{1718}{m+6}$ minutes:

$p = \ldots$	AP $= x = \ldots$	AB, BC $= \frac{6m-1}{5} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{6m-1}{35} \cdot \frac{p}{m}$	BQ $= \frac{m-1}{5} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{5}$ CR	
$r = \frac{2(6m-1)}{m+6} \cdot \frac{p}{m}$	CR $= \frac{3}{4} r$	CD $= 2s$
$s = \frac{2(6m-1)}{3m-6} \cdot \frac{p}{m}$	DS $= \frac{3}{4} s$	DO $= \frac{m+6}{2m} s.$

41. De là il ſera aiſé de corriger la conſtruction du téleſcope dont j'ai parlé ci-deſſus, en ſorte que le champ devienne conſidérablement plus grand. On y avoit

$$p = 18 \text{ pouces}, \quad x = 1\tfrac{1}{2} \quad \& \quad m = 50,$$

& le demi-diametre du champ Φ n'étoit que 10′: or maintenant la ſeconde eſpece nous fournit cette conſtruction:

$p = 18$ pouces	AP $= 1,5$	AB, BC $= 23,64$
$q = 4,73$	BQ $= 0,61$	
$r = 5,25$	CR $= 0,44$	CD $= 3,64$
$s = 0,91$	DS $= 0,23$	DO $= 0,68,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 21'$.

Outre cela il n'y a aucun doute, que de cette façon la repréſentation ne ſoit plus nette, & entierement délivrée des couleurs d'iris, au lieu que la conſtruction ordinaire ne remplit qu'à peu près cette condition.

MOYENS

MOYENS

de procurer aux Téleſcopes à réflexion un plus grand champ encore.

42. Pour augmenter d'avantage le champ apparent de ces téleſcopes, on n'a qu'à ajouter encore un verre oculaire. On pourroit bien le placer dans le foyer même du dernier oculaire, où tombe l'image cr; mais, comme ce verre deviendroit alors lui-même un objet de la viſion, entant qu'il n'eſt pas parfaitement tranſparent, & que ſes parties viſibles ſe confondroient avec la véritable image, il vaudra mieux placer ce nouveau verre avant le foyer, plus près du verre RCR. Ayant donc à conſidérer, après avoir fait la réduction à une lunette ordinaire, cinq verres, ſoient p, q, r, s, t leurs diſtances de foyer, & les demi-diametres de leurs ouvertures x, πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, $\pi''' t$. Cela poſé, nommant le groſſiſſement $= m$ & le demi-diametre du champ Φ, on aura $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$. Maintenant poſons $\pi = \mathfrak{E}\omega$; $\pi' = \gamma\omega$; $\pi'' = -\omega$ & $\pi''' = \omega$; & ſoit, pour abréger, $\mathrm{M} = \frac{2 + \gamma - \beta}{m - 1}$, afinque nous ayons $\Phi = \mathrm{M}\omega$, laquelle valeur eſt conſidérablement plus grande qu'auparavant.

43. Soient de plus les nombres qui déterminent tant les diſtances de foyer des verres, que leurs intervalles,

$$\mathfrak{B} = \frac{+b}{1-b}; \quad \mathfrak{C} = \frac{-c}{1+c}; \quad \mathfrak{D} = \frac{-d}{1+d}; \quad \mathfrak{E} = \omega$$

$$\mathfrak{B} = +b; \quad \mathfrak{C} = -c; \quad \mathfrak{D} = -d; \quad \mathfrak{E} = 1;$$

& de là nous aurons:

$$\mathfrak{B}\pi - \Phi = +(\mathfrak{E}b - \mathrm{M})\omega$$
$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi = -(\gamma c + \mathfrak{E} - \mathrm{M})\omega$$
$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = +(d - \gamma + \mathfrak{E} - \mathrm{M})\omega$$
$$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = +(2 + \gamma + \mathfrak{E} + \mathrm{M})\omega,$$

d'où

d'où nous tirons les formules ſuivantes:

$$p = \ldots\ldots : \qquad AB = \frac{\mathfrak{G} b}{\mathfrak{G} b - M} p$$

$$q = \frac{bM}{\mathfrak{G} b - M} p \qquad BC = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{M(\gamma c + \mathfrak{G}(1-b))}{(\mathfrak{G} b - M)(\gamma c + \mathfrak{G} - M)} p$$

$$r = \frac{bc}{1-b} \cdot \frac{M}{\gamma c + \mathfrak{G} - M} p \qquad CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M(d - \gamma(1+c))}{(\gamma c + \mathfrak{G} - M)(d - \gamma + \mathfrak{G} - M)} p$$

$$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M}{d - \gamma + \mathfrak{G} - M} p \qquad DE = \frac{bdc}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{M(2+d)}{(d - \gamma + \mathfrak{G} - M)(2 + \gamma - \mathfrak{G} + M)} p$$

$$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{M}{2 + \gamma - \mathfrak{G} + M} p \qquad EO = \frac{s}{2 + \gamma - \mathfrak{G} + M}.$$

Or, pour les ouvertures des verres, en tenant compte tant du champ apparent que de la clarté dans tous les verres, nous aurons, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$,

$$AP = x$$

$$BQ = \frac{M}{\mathfrak{G} b - M} x + \tfrac{1}{4} \mathfrak{G} q$$

$$CR = \frac{M}{\gamma c + \mathfrak{G} - M} x + \tfrac{1}{4} \gamma r$$

$$DS = \frac{M}{d - \gamma + \mathfrak{G} - M} x + \tfrac{1}{4} s$$

$$ET = \frac{M}{2 + \gamma - \mathfrak{G} + M} x + \tfrac{1}{4} t.$$

où pour les trois derniers verres la premiere partie eſt ſi petite, qu'on peut aiſément la négliger par rapport à l'autre.

44. Maintenant la deſtruction des couleurs d'iris exige cette équation:

$$\frac{\gamma}{\gamma c + \mathfrak{G} - M} + \frac{1}{d - \gamma + \mathfrak{G} - M} = \frac{1}{2 + \gamma - \mathfrak{G} + M}.$$

Pour cet effet nous pourrions égaler chaque partie du premier membre à la moitié de l'autre, pour avoir:

$$\gamma c + \mathfrak{C} - \mathrm{M} = 2\gamma\,(2 + \gamma - \mathfrak{C} + \mathrm{M}) \quad \&$$
$$d - \gamma + \mathfrak{C} - \mathrm{M} = 2\,(2 + \gamma - \mathfrak{C} + \mathrm{M}).$$

Mais, pour arriver à une ſolution plus générale, poſons

$$\gamma c + \mathfrak{C} - \mathrm{M} = \frac{\gamma}{1-\zeta}\,(2 + \gamma - \mathfrak{C} + \mathrm{M}) \quad \&$$

$$d - \gamma + \mathfrak{C} - \mathrm{M} = \frac{1}{\zeta}\,(2 + \gamma - \mathfrak{C} + \mathrm{M}).$$

Or mettons comme ci-deſſus $\mathfrak{C} = (\mu + 1)\mathrm{M}$, & nous aurons:

$$\mathrm{M} = \frac{2 + \gamma}{m + \mu}; \quad \& \quad \mathfrak{C} = \frac{(\mu + 1)(2 + \gamma)}{m + \mu};$$

enſuite $2 + \gamma - \mathfrak{C} + \mathrm{M} = \frac{(2+\gamma)m}{m+\mu}$, & $\frac{\mathrm{M}}{2+\gamma-\mathfrak{C}+\mathrm{M}} = \frac{1}{m}$;

& partant

$$\gamma c + \mu\,\mathrm{M} = \frac{\gamma\,(2+\gamma)\,m}{(1-\zeta)(m+\mu)}, \quad \& \; c = \frac{2+\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\gamma m - (1-\zeta)\mu}{(1-\zeta)(m+\mu)}$$

$$d - \gamma + \mu\mathrm{M} = \frac{(2+\gamma)\,m}{\zeta\,(m+\mu)}, \quad \& \; d = \frac{(2+\gamma+\gamma\zeta)m - 2\zeta\mu}{\zeta\,(m+\mu)};$$

outre cela

$$d - \gamma\,(1+c) = \frac{1-\zeta+\gamma\zeta}{\zeta(1-\zeta)} \cdot \frac{(2+\gamma)m}{m+\mu} \;\&\; 2 + d = \frac{(2+\gamma)(1+\zeta)m}{\zeta\,(m+\mu)}.$$

45. Ayant donc trouvé les juſtes valeurs pour les lettres c & d, ſi nous faiſons ces ſubſtitutions, nous aurons d'abord pour le champ apparent: $\Phi = \frac{2+\gamma}{4\,(m+\mu)}$, ou bien $\Phi = \frac{859(2+\gamma)}{m+\mu}$ minutes, & enſuite les meſures ſuivantes:

$p =$

$p = \ldots\ldots$	$AP = x$	$AB = \frac{(\mu+1)\,b}{(\mu+1)\,b-1}\,p$
$q = \frac{b}{(\mu+1)\,b-1}\,p$	$BQ = \frac{x}{(\mu+1)b-1} + \frac{(\mu+1)(2+\gamma)q}{4(m+\mu)}$	$BC = \frac{b}{1-b}\cdot\frac{\gamma c+\mathfrak{C}(1-b)}{\mathfrak{C}b-M}\cdot\frac{(1-\zeta)y}{\gamma m}$
$r = \frac{bc}{1-b}\cdot\frac{(1-\zeta)p}{\gamma m}$	$CR = \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m} + \frac{1}{4}\gamma r$	$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{1-\zeta+\gamma\zeta}{\gamma}\cdot\frac{p}{m}$
$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{\zeta p}{m}$	$DS = \frac{\zeta x}{m} + \frac{1}{4}s$	$DE = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)}\cdot(1+\zeta)\frac{p}{m}$
$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)}\cdot\frac{p}{m}$	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)\,m}\,s.$

Mais la nature du téleſcope exige, qu'il ſoit $BC = AB$, ce qui donne $\mathfrak{C}\,(1-b) = \frac{M\,(\gamma c+\mathfrak{C}\,(1-b))}{\gamma c+\mathfrak{C}+M} = \frac{1-\zeta}{\gamma m}(\gamma c+\mathfrak{C}(1-b))$,

& partant $\mathfrak{C}(1-b)(\gamma m-1+\zeta) = (1-\zeta)\gamma c = \frac{(2+\gamma)(\gamma m-(1+\zeta)\mu)}{m+\mu}$;

donc; $(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)(1-b) = \gamma m-(1-\zeta)\mu$; par conſéquent

$1-b = \frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)}$, & $b = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)}$,

d'où $(\mu+1)\,b-1 = \frac{\gamma(\mu-1)m}{\gamma m-1+\zeta}$, & $\frac{b}{(\mu+1)b-1} = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{\gamma(\mu\mu-1)m}$.

46. Il faut donc prendre les lettres b, c, d de la maniere ſuivante:

$$b = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)};\quad 1-b = \frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)};$$

$$c = \frac{2+\gamma}{m+\mu}\cdot\frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{\gamma(1-\zeta)};\quad 1+c = \frac{\gamma(3+\gamma-\zeta(m-2(1-\zeta)\mu}{\gamma(1-\zeta)(m+\mu)};$$

 $d =$

$$d = \frac{(2+\gamma+\zeta\gamma)m-2\zeta\mu}{\zeta(m+\mu)}; \quad 1+d = \frac{(2+\gamma+\zeta+\gamma\zeta)m-\zeta\mu}{\zeta(m+\mu)};$$

$$\& \; \epsilon = \frac{(\mu+1)(2+\gamma)}{m+\mu}; \quad \text{d'où nous aurons:}$$

$p = \ldots$	$AP = x$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{\gamma(\mu-1)} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{\gamma(\mu\mu-1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{\gamma m-1+\zeta}{\gamma(\mu-1)m} x + \frac{1}{4}\epsilon\eta$	
$r = \frac{bc}{1-b} \cdot \frac{1-\zeta}{\gamma} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m} + \frac{1}{4}\gamma r$	$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{1-\zeta+\zeta\gamma}{\gamma} \cdot \frac{p}{m}$
$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)} \cdot \zeta \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{\zeta x}{m} + \frac{1}{4}s$	$DE = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot (1+\zeta) \cdot \frac{p}{m}$
$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)m} t,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{859(2+\gamma)}{m+\mu}$ min.,

où il eſt évident qu'on peut omettre les termes affectés par $\frac{x}{m}$ comme extrêmement petit.

47. Il ſe préſente ici un cas bien remarquable, en poſant $\zeta = \frac{1}{1+\gamma}$, d'où ces formules deviennent beaucoup plus ſimples, que voici:

$p =$

$p = \ldots\ldots$	$AP = x$	AB / BC $= \frac{\mu m - \zeta}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - \zeta}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{-\zeta}{\mu - 1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{\zeta}{\mu - 1} \cdot CR$	
$r = \frac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{\zeta(1+\zeta)(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{4\zeta\zeta(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m}$	$CD = \frac{2\zeta(1+\zeta)(\mu m + \zeta)}{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu} \cdot \frac{p}{m}$
$s = \frac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{\zeta(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DE = (1+\zeta)s$
$t = \frac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{(1+2\zeta)m - \zeta\zeta\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{\zeta(m+\mu)}{(1+\zeta)m}t.$

$$\& \quad \Phi = \frac{859(1+\zeta)}{\zeta(m+\mu)} \text{ min:}$$

Car poſant $\gamma = \frac{1-\zeta}{\zeta}$, on aura $\epsilon = \frac{(1+\zeta)(\mu+1)}{\zeta(m+\mu)}$, &

$$b = \frac{\mu m - \zeta}{(\mu+1)(m-\zeta)}; \quad c = \frac{(1+\zeta)(m-\zeta\mu)}{\zeta(1-\zeta)(m+\mu)}; \quad d = \frac{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu}{\zeta\zeta(m+\mu)};$$

$$1-b = \frac{m-\zeta\mu}{(\mu+1)(m-\zeta)}; \quad 1+c = \frac{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu}{\zeta(1-\zeta)(m+\mu)}; \quad 1+d = \frac{(1+2\zeta)m - \zeta\zeta\mu}{\zeta\zeta(m+\mu)};$$

où il faut obſerver que, puiſque $\gamma < 1$, il faut prendre $\zeta > \frac{1}{2}$, & pourtant $\zeta < 1$.

48. Mais, quoique ce cas rende les formules plus ſimples, il n'eſt pas propre à notre deſſein, puiſque le trou du miroir devient trop grand; & partant il s'en faut tenir aux formules générales, que je m'en vais développer, & premierement les diſtances de foyer:

$$p = \ldots\ldots$$

$$q = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu\mu + 1)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$r = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{\gamma\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$s = \frac{(2+\gamma)\gamma\mu m - 1 + \zeta)((2+\gamma+\gamma\zeta)m - 2\zeta\mu)}{(m+\mu)(\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu} \cdot \frac{p}{m},$$

$$t = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)((2+\gamma+\gamma\zeta)m - 2\zeta\mu)}{(\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu)((2+\gamma+\zeta+\gamma\zeta)m - \zeta\mu)} \cdot \frac{p}{m};$$

enſuite les demi-diametres des ouvertures:

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{\gamma m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)m} x + \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{4\gamma(\mu - 1)(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$CR = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{4\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m} + \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m},$$

$$DS = \tfrac{1}{4}s,$$

$$ET = \tfrac{1}{4}t;$$

& enfin les intervalles:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$CD = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu} \cdot \frac{p}{m},$$

$$DE = (1+\zeta)t,$$

$$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)m}t, \quad \& \ \varphi = \frac{859(2+\gamma)}{m+\mu} \text{ min.}$$

49. Maintenant le trou du miroir ne ſauroit devenir aſſez petit, à moins qu'on ne prenne γ très petit. Pour cet effet, poſons $\gamma m = \eta$, ou $\gamma = \frac{\eta}{m}$, & nous aurons:

$$p = \ldots\ldots$$

$$q =$$

$$q = \frac{\eta\mu - 1 + \zeta}{\eta(\mu\mu - 1)} p,$$

$$r = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{\eta\eta(m + \mu)} p,$$

$$s = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)(2m + (1 + \zeta)\eta - 2\zeta\mu)}{m(m + \mu)(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)m\mu} p,$$

$$t = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)(2m + (1 + \zeta)\eta - 2\zeta\mu)}{m(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)m\mu)((2 + \zeta)m + (1 + \zeta)\eta - \zeta\mu)} p;$$

enſuite:

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{\eta - 1 + \zeta}{\eta(\mu - 1)} x + \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{4\eta m(\mu - 1)(m + \mu)} p,$$

$$CR = \frac{1 - \zeta}{\eta} x + \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{4\eta m(m + \mu)} p,$$

$$DS = \tfrac{1}{4} s,$$

$$ET = \tfrac{1}{4} t;$$

& enfin:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\eta\mu - 1 + \zeta}{\eta(\mu - 1)} p,$$

$$CD = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{m(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)\mu m)} p,$$

$$DE = (1 + \zeta) t,$$

$$ED = \frac{m + \mu}{2m + \eta} t \quad \& \quad \Phi = \frac{859(2m + \eta)}{m(m + \mu)} \text{ min:}$$

où il faut que $\eta(3 - \zeta) > 2(1 - \zeta)$, ou bien $\eta > \frac{2(1 - \zeta)}{3 - \zeta}$.

Or,

Or, afin que CR deviennne beaucoup plus petit que x, il faut bien que $\eta > 1 - \zeta$.

50. Pour éloigner le nouveau verre du lieu de la derniere image autant qu'il eſt poſſible, poſons $\zeta = 1$, & nous aurons les meſures ſuivantes:

$p = \ldots\ldots$	$AP = x = \ldots$	AB } $= \frac{\mu}{\mu - 1} p,$
$q = \frac{\mu}{\mu\mu - 1} p,$	$BQ = \frac{x}{\mu 1} + \frac{\mu(2m+\mu)}{4m(\mu-1)(m+\mu)} p,$	BC }
$r = \frac{\mu(2m+\eta)}{\eta(m+\mu)} p,$	$CR = \frac{\mu(2m+\eta)}{4m(m+\mu)} \cdot p,$	$CD = \frac{\mu}{m} p,$
$s = \frac{2\mu(m+\eta-\mu)}{m(m+\mu)} p,$	$DS = \frac{1}{4} s,$	$DE = 2t,$
$t = \frac{2\mu(m+\eta-\mu)}{m(3m+2\eta-\mu)} p,$	$ET = \frac{1}{4} t,$	$EO = \frac{m+\mu}{2m+\eta} t,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{859(2m+\eta)}{m(m+\mu)}$ min:

Puiſque μ ne ſauroit être pris plus petit que 4, en ſuppoſant $p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{10}$ & $x = \frac{m}{30}$; la valeur de CR ne ſauroit être égalée à $\frac{x}{\mu - 1}$, à moins que m ne ſoit plus grand que 64. Mais, pour de ſemblables grands groſſiſſemens, on peut dans le cas précédent prendre $\gamma = 1$, & le champ apparent devient là auſſi grand qu'ici, de ſorte que le nouveau verre ne nous apporte aucun avantage.

RE-

RECHERCHES

SUR

UNE AUTRE CONSTRUCTION DES TÉLESCOPES À RÉFLEXION. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Comme l'arrangement ordinaire dans les téleſcopes à réflexion répond à celui dont on ſe ſert dans les lunettes à quatre verres, où pourtant une mauvaiſe imitation eſt cauſe que le champ apparent eſt trop petit, comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent; je me propoſe ici d'appliquer aux téleſcopes le même arrangement dont on ſe ſert dans la conſtruction des nouvelles lunettes à 5 & 6 verres, dont l'un admet une ſi petite ouverture, qu'elle paroit très propre à arrêter tous les rayons étrangers. Mais, pour réduire ces lunettes aux téleſcopes, il y faut faire un petit changement, que la nature des téleſcopes exige, c'eſt à dire, que les deux intervalles entre les trois premiers verres AB & BC deviennent égaux entr'eux, & que tant le ſecond QBQ, qui répond au petit miroir, que le troiſieme RCR, qu'on met preſque dans le trou du grand miroir objectif, ayent une très petite ouverture. Planche VI. Fig. 4.

2. Pour cet effet, je mets le ſecond verre QBQ concave, afin qu'étant placé devant le foyer de l'objectif, il éloigne le foyer davantage juſqu'en C, où l'on met le troiſieme verre RCR, afin d'avoir BC = AB. Comme ce verre concave contribue à diminuer la confuſion,

(*) Lu le 25 Février 1762.

Fig. 5. fuſion cauſée par l'objectif à cauſe de ſa figure, le miroir convexe QBQ, qu'on lui ſubſtitue dans le téleſcope, produira un ſemblable effet, & l'inſtrument en ſera porté à un plus haut degré de perfection.

3. Ayant donc ſix verres à conſidérer, ſoient p, q, r, s, t, u, leurs diſtances de foyer, & les demi-diametres de leurs ouvertures, α, πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, $\pi''' t$, & $\pi^{IV} u$, où, à l'exception de l'objectif, je ne conſidere que les parties qui contribuent au champ apparent. Soit donc Φ le demi-diametre du champ apparent, & poſant le groſſiſſement $= m$, on aura $\Phi = \frac{-\alpha + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV}}{m-1}$.

Maintenant, pour rendre ce champ auſſi grand qu'il eſt poſſible, poſons :

$$\alpha = -\mathfrak{E}\omega; \quad \pi' = -\gamma\omega; \quad \pi'' = \mathfrak{o}\omega; \quad \pi''' = \omega \;\&\; \pi^{IV} = -\mathfrak{a},$$

& ſoit, pour abréger, $M = \frac{2 + \mathfrak{E} - \gamma}{m-1}$, pour avoir $\Phi = M\omega$.

4. Enſuite, pour les nombres qui déterminent tant les diſtances de foyer des verres que leurs intervalles, poſons :

$$B = \frac{-b}{b-1}; \quad C = -1; \quad D = \frac{d}{1-d}; \quad E = \frac{-e}{e+1};$$
$$\mathfrak{B} = b; \quad \mathfrak{E} = \infty; \quad \mathfrak{D} = d; \quad \mathfrak{E} = -e;$$

d'où nous tirons les valeurs des formules ſuivantes :

$$\mathfrak{B}\alpha - \Phi = -(\mathfrak{E}b + M)\,\omega,$$
$$\mathfrak{E}\pi' - \alpha + \Phi = \mathfrak{o}\gamma\omega,$$
$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \alpha - \Phi = +(\gamma - \mathfrak{E} - M)\,\omega,$$
$$\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \alpha + \Phi = -(e + \gamma - \mathfrak{E} + M)\,\omega,$$
$$\mathfrak{a}^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \alpha - \Phi = -(2 - \gamma + \mathfrak{E} + M)\,\omega.$$

Or la deſtruction des couleurs d'iris demande cette équation :

$$e + \gamma - \mathfrak{E} - M = 2 - \gamma + \mathfrak{E} + M, \text{ ou bien } e = 2(1 - \gamma + \mathfrak{E} + M).$$

5. De

5. De là les diſtances de foyer des verres avec leurs intervalles ſont exprimés ainſi :

$$p = \ldots\ldots \qquad AB = \frac{\mathfrak{G}b}{\mathfrak{G}b+M}p,$$

$$q = \frac{-bM}{\mathfrak{G}b+M}p, \qquad BC = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\mathfrak{G}b+M}p,$$

$$r = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma}\cdot p, \qquad CD = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma-\mathfrak{G}-M}p,$$

$$s = \frac{bd}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma-\mathfrak{G}-M}p, \qquad DE = \frac{bde}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{M}{(\gamma-\mathfrak{G}-M)(e+\gamma-\mathfrak{G}-M)}p,$$

$$t = \frac{bde}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{M}{e+\gamma-\mathfrak{G}-M}p, \qquad EF = \frac{bde}{(b-1)(1-d)(1+e)}\cdot\frac{M(e+2)}{(e+\gamma-\mathfrak{G}-M)(2-\gamma+\mathfrak{G}+M)}p,$$

$$u = \frac{bde}{(b-1)(1-d)(1+e)}\cdot\frac{M}{2-\gamma+\mathfrak{G}+M}p, \qquad FO = \frac{u}{2-\gamma+\mathfrak{G}+M}.$$

Or, pour les ouvertures complettes, nous avons, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$,

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{M}{\mathfrak{G}b+M}x + \tfrac{1}{4}\mathfrak{G}q,$$

$$CR = ox + \tfrac{1}{4}\gamma r,$$

$$DS = \frac{M}{\gamma-\mathfrak{G}-M}x + os,$$

$$ET = \frac{M}{e+\gamma-\mathfrak{G}-M}x + \tfrac{1}{4}t,$$

$$FV = \frac{M}{2-\gamma+\mathfrak{G}+M}x + \tfrac{1}{4}u.$$

6. Pour abréger ces formules, posons $\gamma - \mathfrak{E} - M = nM$, ou $\gamma = \mathfrak{E} + (n+1)M$; & de là nous aurons $M = \frac{2}{m+n}$, & $e + \gamma - \mathfrak{E} - M = 2 - \gamma + \mathfrak{E} + M = 2 - nM = \frac{2m}{m+n}$; donc $e = 2 - 2nM = \frac{2(m-n)}{m+n}$, & $\gamma = \mathfrak{E} + \frac{2(n+1)}{m+n}$.

Or, en supposant BC = AB, nous trouvons $\mathfrak{E} = \frac{M}{b-1}$, ou $\mathfrak{E} = \frac{2}{(b-1)(m+n)}$; donc $\gamma = \frac{2(bn+b-n)}{(b-1)(m+n)}$; d'où nous tirons les mesures suivantes:

$p = \ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{b}{2b-1}p,$
$q = \frac{-b(b-1)}{2b-1}p,$	$BQ = \frac{b-1}{2b-1}x + \frac{bp}{2(2b-1)(m+n)},$	
$r = \frac{b}{b(n+1)-n}p,$	$CR = \frac{bp}{2(b-1)(m+n)},$	$CD = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{p}{n},$
$s = \frac{bd}{(b-1)}\cdot\frac{p}{n},$	$DS = \frac{x}{n},$	$DE = \frac{bd}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{m-n}{mn}p,$
$t = \frac{bd}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{2(m-n)}{m+n}\cdot\frac{p}{m},$	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t,$	$EF = 2u,$
$u = \frac{bd}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{2(m-n)}{3m-n}\cdot\frac{p}{m},$	$FV = \frac{x}{m} + \frac{3}{4}u.$	$FO = \frac{m+n}{2m}u;$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{1718}{m+n}$ minutes.

7. Maintenant il faut donner à b une valeur telle que $\frac{b-1}{2b-1}x$ devienne une partie de x, d'autant plus petite que le groſſiſſement m eſt

eſt grand. Pour cet effet, poſons $\frac{b-1}{2b-1} = \frac{1}{\mu}$, d'où réſulte $b = \frac{\mu-1}{\mu-2}$. Enſuite il faut remarquer que, pour un groſſiſſement m donné, on prend $p = \frac{1}{10}\sqrt[3]{m}$ & $x = \frac{m}{30}$. De là nous aurons:

$$\text{BQ} = \frac{m}{30\mu} + \frac{(\mu-1)\,m\sqrt[3]{m}}{20\mu\,(m+n)} \text{ \& } \text{CR} = \frac{(\mu-1)\,m\sqrt[3]{m}}{20\,(m+n)}.$$

Or les circonſtances de ces téleſcopes demandent, que BQ ſoit un peu plus grand que CR; & par cette raiſon poſons $\frac{m}{30\mu} = \frac{(\mu-1)\,m\sqrt[3]{m}}{20\,(m+n)}$, & partant $m+n = \frac{3}{2}\mu\,(\mu-1)\sqrt[3]{m}$, ou bien $\mu(\mu-1) = \frac{2\,(m+n)}{3\sqrt[3]{m}}$, donc $\mu\mu - \mu > \frac{2}{3}\sqrt[3]{m^2}$, & $\mu > \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{m^2})}$, ou $\mu > \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{m}$. On pourra donc prendre $\mu = \sqrt[3]{m}$, ou à peu près, puiſqu'il ne s'agit pas ici de préciſion: & par ce moyen on ſatisfait à la condition preſcrite, que, pour les grands groſſiſſemens, le trou du miroir devient une partie de plus en plus petite de la ſurface entiere.

8. Or, poſant $b = \frac{\mu-1}{\mu-2}$, en prenant $\mu = \sqrt[3]{m}$ environ, ou tant ſoit peu plus grand, ou bien plus exactement $\mu = \frac{5}{6}\sqrt[3]{m} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6\sqrt[3]{m}}$, nos meſures pour la conſtruction du téleſcope ſe réduiſent aux formules ſuivantes:

$$p = \tfrac{1}{10}\, m \sqrt[3]{m} \text{ pouces}, \qquad AP = x = \frac{m}{30} \text{ pouces}, \qquad \left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\mu - 1}{\mu} p,$$

$$q = \frac{-(\mu-1)}{\mu(\mu-2)} p, \qquad BQ = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu-1}{2\mu(m+n)} p, \qquad CD = (\mu-1)\frac{p}{n},$$

$$r = \frac{\mu-1}{n+\mu-1} p, \qquad CR = \frac{\mu-1}{2(m+n)} p, \qquad DE = \frac{d}{1-d} \cdot \frac{(\mu-1)(m-n)}{n} \cdot \frac{p}{m} = \frac{(m+n)t}{2n},$$

$$s = d \cdot (\mu-1)\frac{p}{n}, \qquad DS = \frac{x}{n}, \qquad EF = 2u,$$

$$t = \frac{d}{1-d} \cdot \frac{2(\mu-1)(m-n)}{m+n} \cdot \frac{p}{m}, \qquad ET = \frac{x}{m} + \tfrac{1}{4} t, \qquad FO = \frac{m+n}{2m} u;$$

$$u = \frac{d}{1-d} \cdot \frac{2(\mu-1)(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}, \qquad FV = \frac{x}{m} + \tfrac{1}{4} u,$$

& le demi-diametre du champ $\varphi = \frac{1718}{m+n}$ minutes;

où il eſt clair que dans les dernieres ouvertures la partie $\frac{x}{m} = \frac{1}{30}$ pouce eſt ſi petite, qu'on la peut négliger ſans faute.

9. Ayant déterminé le nombre μ, il nous reſte encore deux nombres n & d, qui ſont laiſſés à notre choix. Pour le premier n, il eſt clair, que plus on le prend petit, plus auſſi le champ eſt augmenté; mais cet accroiſſement eſt peu ſenſible dans les grands groſſiſſemens. Il faut donc plutôt avoir égard à la longueur de la lunette, dont les parties CD & DE deviendroient exceſſives, ſi l'on prenoit le nombre n trop petit. Il ſemble même qu'on fera très bien de prendre $n > \mu$, non ſeulement pour rendre DS plus petit que BQ ou CR, mais pour y ménager une très petite ouverture. Pour l'autre nombre d, on le peut prendre en ſorte, que la diſtance de foyer du dernier oculaire u devienne d'une grandeur donnée, par exemple, d'un

d'un pouce: attendu que de trop petits oculaires cauſent une confuſion très ſenſible.

I. Développement d'un tel Téleſcope qui groſſit 25 fois.

10. Puiſque $m = 25$, nous aurons pour la diſtance de foyer du grand miroir $p = 7\frac{1}{3}$ pouce, & $x = \frac{5}{8}$ pouce; donc $\frac{x}{\mu} = \frac{5}{6\mu}$, & $CR = \frac{\mu - 1}{25 + n} \cdot \frac{11}{3}$. Poſons $n = 2\mu$, & pour rendre ces deux valeurs égales, il faut prendre $\mu = 3\frac{1}{3}$, & ſoit $n = 7$; d'où nous tirons les valeurs ſuivantes:

$p = 7,333,$	$AP = 0,833,$	$AB \} = 5,133,$
$q = -3,850,$	$BQ = 0,330,$	$BC \}$
$r = 1,833,$	$CR = 0,267,$	$CD = 2,444,$
$s = \frac{22}{9} d,$	$DS = 0,119,$	$DE = \frac{44}{25} \cdot \frac{d}{1-d},$
$t = \frac{77}{100} \cdot \frac{d}{1-d},$	$ET = \frac{1}{4} t,$	$EF = 2u,$
$u = \frac{154}{425} \cdot \frac{d}{1-d};$	$FV = \frac{3}{4} u,$	$FO = \frac{16}{25} u;$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 54'$.

11. Poſons maintenant $u = 1$ pouce, &, à cauſe de $\frac{d}{1-d} = \frac{425}{154}$, nous aurons $d = \frac{425}{579}$, d'où le téleſcope ſera déterminé de cette ſorte:

$p =$

$p = 7{,}333,$	$AP = 0{,}833,$	$AB \} = 5{,}133,$
$q = -3{,}850,$	$BQ = 0{,}330,$	$BC \}$
$r = 1{,}833,$	$CR = 0{,}267,$	$CD = 2{,}444,$
$s = 1{,}794,$	$DS = 0{,}119,$	$DE = 4{,}857,$
$t = 2{,}125,$	$ET = 0{,}531,$	$EF = 2{,}000,$
$u = 1{,}000,$	$FV = 0{,}250,$	$FO = 0{,}640.$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 54'$.

Ici la longueur du grand tuyau ſurpaſſera un peu 5 pouces, mais celle du petit qui contient les verres, devient preſque de 10 pouces.

II. Développement d'un tel Téleſcope qui groſſit 50 fois.

12. Puiſque $m = 50$, la diſtance de foyer du grand miroir devient $p = 18$ pouces, & ſon demi-diametre $x = 1\frac{2}{3}$. Prenons $\mu = 4$, & puiſque $\frac{x}{\mu} = \frac{5}{12}$, & $CR = \frac{3 \cdot 9}{50 + n}$, ces deux valeurs deviennent à peu près égales en prenant $n = 10$, & cette valeur ſert auſſi à diminuer le tuyau qui contient les verres, CO. Nous aurons donc:

$p = 18$ pouces,	$AP = 1{,}667,$	$AB \} = 13{,}500,$
$q = -6{,}750,$	$BQ = 0{,}529,$	$BC \}$
$r = 4{,}154,$	$CR = 0{,}450,$	$CD = 5{,}400,$
$s = \frac{27}{5} d,$	$DS = 0{,}167,$	$DE = \frac{108}{25} \cdot \frac{d}{1-d},$
$t = \frac{36}{25} \cdot \frac{d}{1-d},$	$ET = \frac{1}{4} t,$	$EF = 2u,$
$u = \frac{108}{175} \cdot \frac{d}{1-d},$	$FV = \frac{1}{4} u,$	$FO = \frac{3}{5} u;$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 29'$.

13. Suppoſons de plus encore $u = 1$ pouce, & puiſque $\frac{d}{1-d} = \frac{17}{1000}$, nous aurons $d = \frac{17}{1017}$, d'où nous tirons le devis ſuivant pour la conſtruction du téleſcope:

$p = 18{,}000,$	$AP = 1{,}667,$	$AB \atop BC \Big\} = 13{,}500,$
$q = -6{,}750,$	$BQ = 0{,}529,$	
$r = 4{,}154,$	$CR = 0{,}450,$	$CD = 5{,}400,$
$s = 3{,}339,$	$DS = 0{,}167,$	$DE = 7{,}000,$
$t = 2{,}333,$	$ET = 0{,}583,$	$EF = 2{,}000,$
$u = 1{,}000,$	$FV = 0{,}250,$	$FO = 0{,}600;$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 29'$.

Ici la longueur du grand tuyau AB devient $13\frac{1}{2}$ pouces, mais celle du petit CO $= 15$ pouces.

III. Développement d'un tel Téleſcope qui groſſit 100 *fois.*

14. Puiſque $m = 100$, nous pourrons prendre $p = 45$ pouces, & $x = 3\frac{1}{3}$ pouces, & $n = 20$; d'où nous tirons les meſures ſuivantes, en poſant $\mu = 5$:

$p = 45$ pouces,	$AP = 3{,}333,$	$AB \atop BC \Big\} = 36{,}000,$
$q = -12{,}000,$	$BQ = 0{,}813,$	
$r = 7{,}500,$	$CR = 0{,}750,$	$CD = 9{,}000,$
$s = 9d,$	$DS = 0{,}167,$	$DE = 7{,}200\frac{d}{1-d},$
$t = \frac{12}{5} \cdot \frac{d}{1-d},$	$ET = \frac{1}{4}t,$	$EF = 2u,$
$u = \frac{36}{35} \cdot \frac{d}{1-d},$	$FV = \frac{1}{4}u,$	$FO = \frac{3}{5}u;$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 14'$.

15. Si nous poſons maintenant $u = 1$, & partant $\frac{d}{1-d} = \frac{3}{5}\frac{5}{6}$, & $d = \frac{3}{7}\frac{5}{1}$, nous aurons le devis ſuivant :

$p = 45{,}000$,	AP $= 3{,}333$,	AB, BC $= 36{,}000$,
$q = -12{,}000$,	BQ $= 0{,}813$,	
$r = 7{,}500$,	CR $= 0{,}750$,	CD $= 9{,}000$,
$s = 4{,}436$,	DS $= 0{,}167$,	DE $= 7{,}000$,
$t = 2{,}333$,	ET $= 0{,}583$,	EF $= 2{,}000$,
$u = 1{,}000$,	FV $= 0{,}250$,	FO $= 0{,}600$;

& le demi-diametre du champ $\Phi = 14^{l}$.

La longueur du grand tuyau AB ſera donc de 36 pouces ; or celle du tuyau CO, qui contient les verres, ſera de $18\frac{3}{7}$ pouces.

SUR

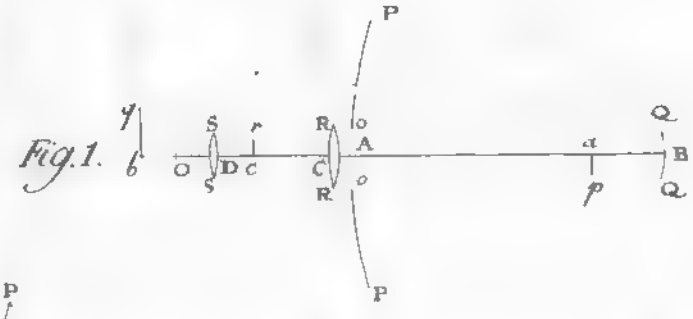


Fig. 1.
P
Q
S
R
A
B
D
C
O
a
p
o
q
b
P
Q

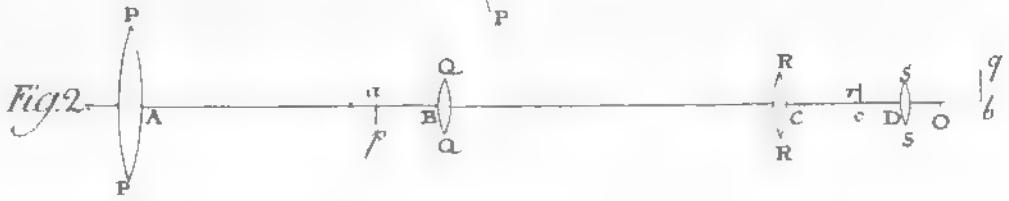


Fig. 2.
P
A
a
f
Q
B
R
C
c
D
S
O
q
b
P
Q
R

Fig. 3.
A
Q
B
M
C
D
O
N
R
S

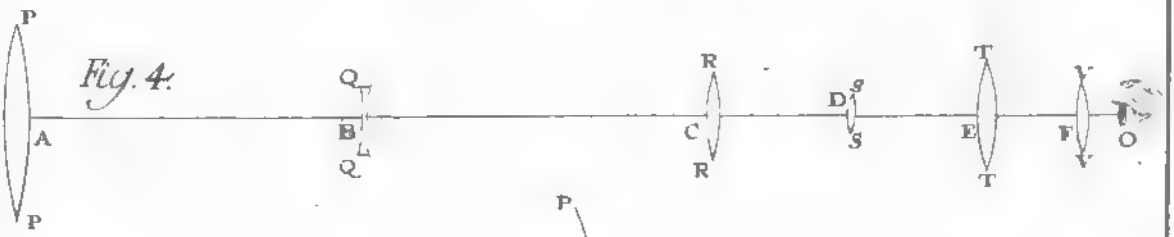


Fig. 4.
P
A
P
Q
B
Q
R
C
R
D
S
T
E
T
V
F
V
O

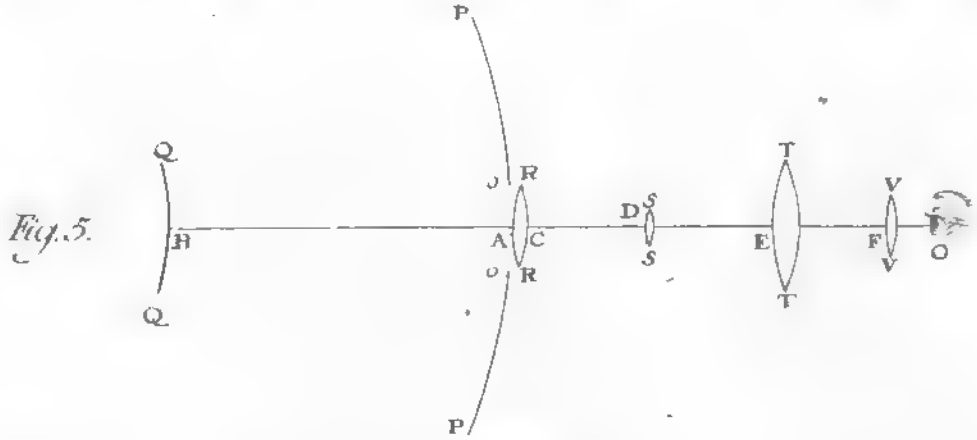


Fig. 5.
P
Q
H
Q
R
A
C
R
D
S
S
T
E
T
V
F
V
O
P

SUR

LA CONFUSION

QUE CAUSE DANS LES INSTRUMENS DIOPTRIQUES LA DIVERSE RÉFRANGIBILITÉ DES RAYONS. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Dans mon Mémoire ſur la conſtruction des Inſtrumens dioptriques, tant Téleſcopes que Microſcopes, qui ſe trouve dans le XIII Volume de notre Académie, j'ai expoſé tout ce qui regarde ces Inſtrumens, & qui peut contribuer à leur perfection: je me flatte de n'y avoir omis aucune circonſtance rélative à ce but. Toutes les déterminations que j'y ai données, ſont le réſultat de calculs fort prolixes, & pour la plupart très embaraſſées, que j'ai enfin trouvé moyen de développer après pluſieurs efforts aſſez pénibles. Mais je fus obligé de me borner au ſimple rapport de toutes les formules qui renferment les vraies maximes pour la conſtruction de ces inſtrumens, ſans détailler les principes & les calculs ſur leſquels elles ſont fondées, ce qui fourniroit de la matiere pour un traité très conſidérable. Chaque article en particulier demande des recherches fort ſoigneuſes; & je me propoſe maintenant de développer celui qui regarde la différente réfrangibilité des rayons, pour faire voir plus clairement, combien elle influe ſur tous ces Inſtrumens.

II. Pour cet effet il faut conſidérer les diſtances de foyer de chaque verre comme des quantités variables, puiſque chaque eſpece des rayons y forme ſon propre foyer: ſur quoi je remarque dabord,

(*) Lu le 2 de Sept. 1762.

que ces variations dans la diſtance de foyer ſont proportionelles à la diſtance même, en ſorte que ſi l'on connoit la diſtance de foyer d'un verre pour les rayons d'une réfrangibilité moyenne, on peut aiſément déterminer par-là celle qui convient aux rayons qui ſouffrent ou la plus grande ou la plus petite réfraction. On ſait que, ſi la diſtance de foyer d'un verre eſt $= p$ pour les rayons moyens, les rayons rouges auront leur foyer à la diſtance $(1 + \frac{1}{55})p$, & les violets à la diſtance $(1 - \frac{1}{55})p$. Cete différence de $\frac{1}{55}p$ étant aſſez petite, il ſera permis, dans le calcul, de la conſidérer comme le différentiel de p, de ſorte qu'en écrivant λ pour la fraction $\frac{1}{55}$, j'aurai $dp = \lambda p$, où λ ſe prendra & négatif & poſitif.

Planche VII. Fig. 1.

III. Conſidérons donc une ſuite d'autant de verres qu'on voudra, diſpoſés ſur le même axe, pour y examiner tous les changemens que la diverſe réfrangibilité des rayons cauſe dans les images repréſentées par ces verres. J'appliquerai mes recherches au nombre de cinq verres, repréſentés par les barres PAP, QBQ, RCR, SDS & TET, puiſqu'il ſera auſſi aiſé de les étendre à un plus grand nombre, que de les reſtreindre à un plus petit. Que devant ces verres ſe trouve l'objet Oo, dont les images formées par les rayons moyens ſoient ſucceſſivement repréſentées en Ff, Gg, Hh, Kk & Ll. Poſons, tant pour marquer les lieux des verres que ceux de ces images, les diſtances

$$AO = a; \quad BF = b; \quad CG = c; \quad DH = d; \quad EK = e$$
$$AF = \alpha; \quad BG = \beta; \quad CH = \gamma; \quad DK = \delta; \quad EL = \epsilon;$$

& ſoit, pour abréger le calcul dans la ſuite:

$$\alpha = Aa; \quad \beta = Bb; \quad \gamma = Cc; \quad \delta = Dd; \quad \epsilon = Ee.$$

IV. De là les diſtances entre les verres ſeront:

$$AB = a + b; \quad BC = \beta + c; \quad CD = \gamma + d; \quad \& \quad DE = \delta + e,$$

qui doivent reſter conſtantes, & même toujours poſitives, quoique les quantités a, b, β, c &c. varient ſelon la diverſe nature des rayons.

Or,

Or, puiſque leur variabilité dépend de celle de la diſtance de foyer des verres, nommons la diſtance de foyer de chacun pour les rayons moyens: de PAP $= p$; QBQ $= q$; RCR $= r$; SDS $= s$; TET $= t$; que je regarde toutes comme poſitives, ou les verres mêmes comme convexes, la concavité ſe réduiſant à une diſtance négative de foyer. Or ces diſtances de foyer ſont déjà déterminées par les diſtances précédentes de la maniere ſuivante:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}; \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta};$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e} + \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ou bien}$$

$$p = \frac{Aa}{A+1}; \; q = \frac{Bb}{B+1}; \; r = \frac{Cc}{C+1}; \; s = \frac{Dd}{D+1}; \; t = \frac{Ee}{E+1}.$$

V. Voyons maintenant quel changement produira la variabilité de la réfraction dans le lieu de la derniere image Ll, qu'on doit regarder comme l'objet immédiat de la vue. Et puiſque cette variabilité provient de celle des diſtances de foyer p, q, r, s, t, à cauſe de $dp = \lambda p$, $dq = \lambda q$, $dr = \lambda r$ &c., & parce que la diſtance de l'objet AO $= a$ n'en dépend point, la différentiation nous fournit les formules ſuivantes:

$$\frac{da}{a\alpha} = \frac{\lambda}{p} = \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\lambda\,(A+1)}{A\alpha},$$

$$\frac{db}{b\beta} + \frac{d\beta}{\beta\beta} = \frac{\lambda}{q} = \lambda\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\lambda\,(B+1)}{B\beta},$$

$$\frac{dc}{c\gamma} + \frac{d\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{\lambda}{r} = \lambda\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\lambda\,(C+1)}{C\gamma},$$

$$\frac{dd}{d\delta} + \frac{d\delta}{\delta\delta} = \frac{\lambda}{s} = \frac{\lambda\,(D+1)}{Dd}, \quad \text{\& enfin}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{ee} + \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\lambda}{t} = \frac{\lambda\,(\mathrm{E}+1)}{\mathrm{E}e}.$$

VI. Or l'invariabilité des distances entre les verres donne

$$\mathrm{d}b = -\mathrm{d}\alpha;\ \mathrm{d}c = -\mathrm{d}\mathfrak{E};\ \mathrm{d}d = -\mathrm{d}\gamma;\ \mathrm{d}e = -\mathrm{d}\delta;$$

d'où nous pouvons tirer les valeurs de tous nos différentiels, réduites à la fraction λ; & d'abord ayant:

$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{\lambda\,(\mathrm{A}+1)}{\mathrm{A}a}$ à cause de $\alpha = \mathrm{A}a$, nous aurons

$$\mathrm{d}\alpha = \lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1),\quad \&\ \mathrm{d}b = -\lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1).$$

Enfuite, les autres équations fe réduifent à celle-ci:

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}\mathfrak{E}} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{bb} + \frac{\lambda(\mathrm{B}+1)}{\mathrm{B}b},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\mathfrak{E} = \mathrm{BB}\mathrm{d}\alpha + \lambda\mathfrak{E}\,(\mathrm{B}+1) = -\mathrm{d}c,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{E}}{cc} + \frac{\lambda(\mathrm{C}+1)}{\mathrm{C}c},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\gamma = \mathrm{CC}\mathrm{d}\mathfrak{E} + \lambda\gamma\,(\mathrm{C}+1) = -\mathrm{d}d,$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta\delta} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{dd} + \frac{\lambda(\mathrm{D}+1)}{\mathrm{D}d},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\delta = \mathrm{DD}\mathrm{d}\gamma + \lambda\delta\,(\mathrm{D}+1) = -\mathrm{d}e,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\delta}{ee} + \frac{\lambda(\mathrm{E}+1)}{\mathrm{E}e},\ \text{ou}\ \mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{EE}\mathrm{d}\delta + \lambda\varepsilon\,(\mathrm{E}+1),$$

d'où nous concluons:

$$\mathrm{d}\alpha = -\mathrm{d}b = +\lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1),$$

$$\mathrm{d}\mathfrak{E} = -\mathrm{d}c = \lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1)\,\mathrm{BB} + \lambda\mathfrak{E}\,(\mathrm{B}+1),$$

$$\mathrm{d}\gamma = -\mathrm{d}d = \lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1)\mathrm{BBCC} + \lambda\mathfrak{E}\,(\mathrm{B}+1)\mathrm{CC} + \lambda\gamma\,(\mathrm{C}+1),$$

$$\mathrm{d}\delta = -\mathrm{d}e = \lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1)\,\mathrm{BBCCDD} + \lambda\mathfrak{E}\,(\mathrm{B}+1)\,\mathrm{CCDD} + \lambda\gamma\,(\mathrm{C}+1)\,\mathrm{DD} + \lambda\delta\,(\mathrm{D}+1),$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = \lambda\alpha\,(\mathrm{A}+1)\,\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2\mathrm{E}^2 + \lambda\mathfrak{E}\,(\mathrm{B}+1)\,\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2\mathrm{E}^2 + \lambda\gamma\,(\mathrm{C}+1)\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}^2 + \lambda\delta\,(\mathrm{D}+1)\,\mathrm{E}^2 + \lambda\varepsilon\,(\mathrm{E}+1);$$

&

& cette derniere formule exprime le changement dans le lieu de la derniere image L*l*, qui eſt cauſé par la différente réfrangibilité des rayons.

VII. Cherchons à préſent, par ces mêmes principes, combien la grandeur de l'image L*l* doit être changée par la différente réfraction, ſuppoſant que L*l* eſt l'image formée par les rayons d'une nature moyenne. Or, poſant la grandeur de l'objet O*o*, ou de ſa partie dont les rayons ſont tranſmis par les verres, $= o$, & ſuivant les principes de la Dioptrique, nous aurons ſucceſſivement la grandeur de toutes les images exprimée de cette façon:

$$Ff = \frac{\alpha}{a} o;\ Gg = \frac{\alpha\mathfrak{E}}{ab} o;\ Hh = \frac{\alpha\mathfrak{E}\gamma}{abc} o;\ Kk = \frac{\alpha\mathfrak{E}\gamma\delta}{abcd} o;$$

$$Ll = \frac{\alpha\mathfrak{E}\gamma\delta\varepsilon}{abcde} o.$$

Poſons maintenant, pour abréger, $\frac{\alpha\mathfrak{E}\gamma\delta\varepsilon}{abcde} = V$, de ſorte que $V =$ ABCDE, pour avoir $Ll = Vo$; & puiſque la différentiation nous fournit les changemens cauſés par la différente réfraction des rayons, nous aurons, pour l'image infiniment proche $L'l'$, la grandeur $L'l' = (V + dV)o$, & partant l'incrément $L'l' - Ll = o, dV$. Pour le changement dans le lieu, la valeur de $d\varepsilon$ que nous venons de trouver, exprime le petit intervalle LL', de ſorte que $LL' = d\varepsilon$.

VIII. Tout revient donc à trouver le différentiel de la quantité V: pour cet effet, cherchons ſon différentiel logarithmique, qui, à cauſe de a & o conſtantes, ſera

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}} - \frac{db}{b} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dc}{c} + \frac{d\delta}{\delta} - \frac{dd}{d} + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{de}{e},$$

qui, à cauſe de $db = -d\alpha$, $dc = -d\mathfrak{E}$, $dd = -d\gamma$ & $de = -d\delta$, ſe change en

dV

$$\frac{dV}{V} = d\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + d\mathfrak{E}\left(\frac{1}{\mathfrak{E}} + \frac{1}{c}\right) + d\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d}\right) + d\delta\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{e}\right) + \frac{de}{e};$$

où, ſi nous ſubſtituons à $d\alpha$, $d\mathfrak{E}$, $d\gamma$, $d\delta$, de, les valeurs trouvées ci-deſſus, nous trouverons l'expreſſion ſuivante:

$$\frac{dV}{V} = \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{a+b}{ab} + \frac{BB(\mathfrak{E}+c)}{\mathfrak{E}c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{BBCCDDE}{e}\right)$$
$$+\lambda\mathfrak{E}(B+1)\left(\frac{\mathfrak{E}+c}{\mathfrak{E}c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{CCDDE}{e}\right)$$
$$+\lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{DDE}{e}\right)$$
$$+\lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e} + \frac{E}{e}\right)$$
$$+\lambda(E+1).$$

IX. Ayant trouvé ces valeurs différentielles, en donnant à λ toutes les valeurs compriſes entre les limites $+\frac{1}{5}\frac{1}{5}$ & $-\frac{1}{5}\frac{1}{5}$, on connoitra l'arrangement de toutes les images formées par les rayons de toutes eſpeces. Ces images ſeront diſpoſées ſur l'eſpace $LL' = de$, de part & d'autre de l'image moyenne, & cet eſpace entier ſe trouvera en poſant $\lambda = \frac{1}{5}\frac{1}{5}$ dans l'expreſſion de de. Or il eſt clair que toutes ces images ſeront terminées par la ligne droite $l'l'$, qui étant prolongée coupera l'axe des verres en quelque point $\sim$, ſous un angle dont la tangente eſt $= \frac{dV}{de} \cdot o$: d'où l'on aura la diſtance $L\sim = \frac{V\,de}{dV}$,

&

& partant la distance $E\omega = e - \frac{Vde}{dV} = \frac{eV}{dV}\left(\frac{dV}{V} - \frac{de}{e}\right)$.

Mais, retranchant la valeur de $\frac{de}{e} = \frac{de}{Ee}$ de celle de $\frac{dV}{V}$, on obtient:

$$\frac{dV}{V} - \frac{de}{e} = \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{\alpha+b}{\alpha b} + \frac{BB(\mathfrak{G}+c)}{\mathfrak{G}c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\mathfrak{G}(B+1)\left(\frac{\mathfrak{G}+c}{\mathfrak{G}c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e}\right).$$

X. Dans ces formules j'ai tâché d'introduire les distances entre les verres $\alpha + b$, $\mathfrak{G} + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$, puisqu'elles sont nécessairement positives. Mais cela se peut faire d'une autre maniere, qui s'étend aussi à la valeur de de; un léger changement nous fournit ces expressions:

$$de = \lambda(\alpha AABBCCDDEE + (\alpha+b)BBCCDDEE + (\mathfrak{G}+c)CCDDEE$$
$$+ (\gamma+d)DDEE + (\delta+e)EE + \varepsilon),$$

& celle-ci:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\lambda(E+1)}{e}(\alpha AABBCCDD + (\alpha+b)BBCCDD + (\mathfrak{G}+c)CCDD$$
$$+ (\gamma+d)DD + \delta + e)$$
$$+ \frac{\lambda(D+1)}{d}(\alpha AABBCC + (\alpha+b)BBCC + (\mathfrak{G}+c)CC + \gamma + d)$$
$$+ \frac{\lambda(C+1)}{c}(\alpha AABB + (\alpha+b)BB + \mathfrak{G} + c)$$

$$+\frac{\lambda(B+1)}{b}(\alpha AA+\alpha+b)$$

$$+\frac{\lambda(A+1)}{a}(\alpha).$$

XI. Pour abréger ces formules posons:

$$\alpha+b+\alpha AA=P$$
$$\beta+c+PBB=Q$$
$$\gamma+d+QCC=R$$
$$\delta+e+RDD=S$$

& nous aurons:

$$d\varepsilon=\lambda\varepsilon+\lambda SEE \quad \&$$
$$\frac{dV}{V}=\lambda\left(A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}\right);$$

donc:

$$\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\lambda\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right),$$

d'où l'on tire la distance $E\omega=\frac{\varepsilon V}{dV}\left(\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$;

or il faut se souvenir que $V=ABCDE$, & substituant ces valeurs on obtiendra

$$E\omega=\frac{\varepsilon\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right)}{A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}}.$$

XII. La premiere question qui se présente ici est, s'il ne seroit pas possible que toute cette diffusion des images fût réduite à rien,

ce

de ſorte que tant de que $\frac{dV}{V}$ devînt égal à zéro? Or d'abord je remarque, que pour le cas où la diſtance de la derniere image doit être infinie ou très grande, comme l'exige une bonne vue, l'intervalle LL' ne ſauroit jamais évanouir, ni même ſon rapport à la diſtance entiere $EL = \varepsilon$. Car, puiſque $de = \lambda(\varepsilon + SEE) = \lambda\varepsilon\left(1+\frac{S\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon}\right)$, à cauſe de $\varepsilon = \omega$, la quantité S devroit être $= o$, ce qui eſt impoſſible, puiſque S eſt une quantité poſitive, néceſſairement plus grande que l'intervalle des deux derniers verres $\delta + e$. Et par cette raiſon il eſt clair, que non ſeulement de, mais auſſi $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \lambda\left(1+\frac{S\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon}\right)$, ne ſauroit jamais évanouir. Il eſt auſſi évident qu'il eſt encore moins poſſible de remplir cette condition, lorſque ε doit avoir une valeur poſitive, ce qui eſt le cas des presbytes.

XIII. Mais pour les myopes, dont la vue demande une valeur négative de ε, qui n'eſt pas trop grande, rien n'empêche qu'on ne ſatisfaſſe à cette condition qui, à cauſe de $\varepsilon = E\varepsilon$, donne $\varepsilon = -SE$, ou $\varepsilon = -SEE$: & enſuite il ſera auſſi poſſible de remplir l'autre condition que $\frac{dV}{V} = o$, pourvu que le nombre des verres ſoit plus grand que deux. Mais, ayant examiné le cas de trois verres, je trouve qu'en ſatisfaiſant aux deux conditions qui anéantiſſent toute confuſion, on tombe dans d'autres inconvéniens très conſidérables: c'eſt toujours, ou le groſſiſſement, qui importe peu, ou la lunette devient énormément longue, & le champ apparent évanouit preſque tout à fait. Pour les cas de pluſieurs verres, je ne ſaurois prononcer; le calcul devient trop embaraſſé, pour que j'aye pu me réſoudre à le développer; mais, puiſque $S = \delta + e + RDD$, il faudroit qu'il fût $\varepsilon = -E(\delta + e + RDD)$, & partant E un nombre négatif

moindre que l'unité; ou $-\varepsilon < e$, ce qui ſuppoſe une vue ſi courte qu'on n'en rencontrera jamais de ſemblable.

XIV. Or, puiſqu'il faut ſe régler principalement ſur les bonnes vues, qui demandent une valeur preſque infinie pour la diſtance ε, on ne ſauroit remédier tout à fait à l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons, en ſorte que l'intervalle LL' devienne évanouiſſant. Donc, renonçant à ce degré de perfection, il ne nous reſte que de rendre la confuſion qui naît de cette ſource, auſſi peu ſenſible qu'il ſe pourra. Pour cet effet je remarque, que ſi l'on place l'œil dans le point ω, la confuſion deviendra très peu ſenſible; car, puiſque les rayons, qui viennent des extrémités l & l' de toutes les images, ſe réuniſſent dans la même direction $l\omega$, ils repréſenteront les bords des objets aſſez diſtinctement, & les couleurs d'iris n'en troubleront point l'apparence; ce qui eſt un avantage preſque auſſi grand, que ſi toutes les images étoient parfaitement réunies dans une ſeule. Tout revient donc à bien déterminer ce point ω, & à faire en ſorte que l'œil y puiſſe être placé; or nous venons de trouver la diſtance $E\omega$ depuis le dernier oculaire TET

$$E\omega = \frac{\varepsilon\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right)}{A+1+\frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S(E+1)}{e}},$$

laquelle expreſſion pour le cas $\varepsilon = \infty$ & partant $E = \frac{\varepsilon}{e} = \infty$, ſe change en celle-ci:

$$E\omega = \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right),$$

ou bien

$$E\omega = e + \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d}\right);$$

où

où il faut remarquer que e exprime la diſtance de foyer du dernier verre TET.

XV. Mais le lieu de l'œil eſt déjà déterminé par d'autres circonſtances, tant dans les lunettes que dans les microſcopes; il faut toujours tenir l'œil là, d'où l'on découvre le plus grand champ; & partant il s'agit d'arranger les verres en ſorte que ces deux points dans l'axe derriere les verres, où l'on découvre le plus grand champ, & où l'on voit les objets délivrés des couleurs d'iris, ſe réuniſſent dans un ſeul point, ou au moins à peu près. Pour cet effet, cherchons auſſi le point d'où l'on voit le plus grand champ, & qui ſera là où les rayons de l'extrémité o de l'objet, après avoir paſſé par tous les verres, ſe réuniſſent avec l'axe; & dans cette recherche il ſuffit de conſidérer les rayons qui paſſent par le centre A de l'objectif, puiſque les autres rayons ne font qu'augmenter la clarté, ſans rien changer dans le champ apparent. La 2de figure repréſente un tel rayon, qui vient de l'extrémité o de l'objet, & qui, après toutes les réfractions, coupe l'axe au point ω, qui ſera par conſéquent le lieu de l'œil, que nous cherchons. Planche VII. Fig. 2.

XVI. Le rayon paſſera bien par les extrémités de toutes les images f, g, h, k, d'où ſa route pourroit être déterminée; mais les points q, r, s où il coupe ſucceſſivement l'axe, nous fourniſſent un moyen plus aiſé de la trouver. En effet, puiſque le rayon AQ eſt rompu par le verre QQ en Qq, s'il y avoit en A un objet, ſon image tomberoit en q, dont les rayons paſſant par le verre RR donneront la ſeconde image en r, & enſuite de même maniere la troiſieme en s, & la derniere en ω, qui eſt préciſément le lieu de l'œil que nous cherchons, où l'angle EωT nous montre en même tems l'angle viſuel, ſous lequel la partie de l'objet Oo ſera vue, & de là on pourra juger du groſſiſſement que cet inſtrument produit. Il eſt auſſi évident, que le champ apparent dépend principalement de l'ouverture de tous les verres oculaires, ſans que celle de l'objectif y concoure.

XVII. Conſervons les mêmes dénominations que nous avons établies ci-deſſus §§. 3. & 4, & la conſidération des diſtances de foyer de tous les verres nous fournit ces équations:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{Bq}=\frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\mathfrak{C}};\quad Cq=\mathfrak{C}+c-Bq$$

$$\frac{1}{Cq}+\frac{1}{Cr}=\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma};\quad Dr=\gamma+d-Cr$$

$$\frac{1}{Dr}+\frac{1}{Ds}=\frac{1}{s}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta};\quad Es=\delta+e-Ds$$

$$\frac{1}{Es}+\frac{1}{E\omega}=\frac{1}{t}=\frac{1}{e}+\frac{1}{\varepsilon}.$$

Introduiſons auſſi dans le calcul l'angle OAo ou BAQ, qui ſoit $=\Phi$, & qui marque la même choſe que ce qui eſt exprimé ci-deſſus par $\frac{o}{a}$, où o marquoit la portion vue de l'objet Oo. De là nous aurons les images:

$$Ff=a\Phi;\ Gg=\frac{a\mathfrak{C}}{b}\Phi;\ Hh=\frac{a\mathfrak{C}\gamma}{bc}\Phi;\ Kk=\frac{a\mathfrak{C}\gamma\delta}{bcd}\Phi,$$

& les angles

$$BqQ=CqR=\frac{AB}{Bq}\Phi;\quad CrR=Drs=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq\,.\,Cr}\Phi;$$

$$DsS=EsT=\frac{AB.Cq.Dr}{Bq.Cr.Ds}\Phi,\ \&\ E\omega T=\frac{AB.Cq.Dr.Es}{Bq.Cr.Ds.E\omega}\Phi;$$

& outre cela pour l'ouverture des verres:

$$BQ=AB.\Phi;\ CR=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq}.\Phi;\ DS=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr}{Bq\,.\,Cr}.\Phi;$$

$$ET=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr\,.\,Es}{Bq\,.\,Cr\,.\,Ds}\Phi.$$

XVIII.

XVIII. Comme l'ouverture des verres entre ſi eſſentiellement dans ces déterminations, & qu'elle dépend principalement de la diſtance de foyer de chaque verre, en y tenant un certain rapport, poſons:

$$BQ = \pi q;\ CR = \pi' r;\ DS = \pi'' s \ \&\ ET = \pi''' t;$$

de là nous aurons à cauſe de $AB = a + b$ d'abord:

$$\pi q = (a + b)\Phi, \text{ donc } \pi = \frac{(a+b)\Phi}{q} = \Phi + \frac{(a+b)\Phi}{Bq};$$

& partant $\frac{a+b}{Bq} = \frac{AB}{Bq} = \frac{\pi - \Phi}{\Phi}$; d'où nous tirons

$$CR = \pi' r\ (\pi - \Phi)\, Cq;\ \&\ \pi' = \pi - \Phi + \frac{(\pi - \Phi)\, Cq}{Cr};$$

donc $\frac{Cq}{Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\pi - \Phi}$ & $\frac{AB \cdot Cq}{Bq \cdot Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\Phi}$.

Enſuite, $DS = \pi'' s = (\pi' - \pi + \Phi)\, Dr$, d'où, à cauſe de $\frac{Dr}{s} = 1 + \frac{Dr}{Ds}$, on aura $\pi'' = \pi' - \pi + \Phi + (\pi' - \pi + \Phi)\frac{Dr}{Ds}$, partant

$$\frac{Dr}{Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\pi' - \pi + \Phi}, \ \&\ \frac{AB \cdot Cq \cdot Dr}{Bq \cdot Cr \cdot Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi}.$$

De là on obtient

$$ET = \pi''' t = (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\, Es, \text{ \& depuis}$$

$$\pi''' = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi + (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\frac{Es}{E\omega},$$

ou $\frac{Es}{E\omega} = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$, par conſéquent

$$\frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi.$$

XIX.

XIX. Pour les angles donc, qu'on peut confondre avec leurs tangentes, il ſera bon de remarquer les formules ſuivantes:

$$OAo = BAQ = \frac{BQ}{AB} = \varphi,$$

$$Bq Q = Cq R = \frac{BQ}{Bq} = \pi - \varphi = \frac{CR}{Cq};$$

$$Cr R = Dr S = \frac{CR}{Cr} = \pi' - \pi + \varphi = \frac{DS}{Dr};$$

$$Ds S = Es T = \frac{DS}{Ds} = \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = \frac{ET}{Es},$$

$$\& \quad E\omega T = \frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi.$$

Donc, ſi nous poſons le groſſiſſement $= m$, ou que l'angle viſuel $E\omega T$ ſoit m fois plus grand que l'angle $OAo = \varphi$, nous aurons $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = m\varphi$, & de là, par les ouvertures de tous les verres oculaires enſemble, nous connoiſſons le champ apparent même, ou bien l'angle φ, qui eſt

$$\varphi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m - 1};$$

d'où l'on comprend très évidemment, comment le champ apparent dépend, tant du groſſiſſement que de l'ouverture des verres, à l'exception de l'objectif.

XX. Ayant poſé ci-deſſus, pour abréger,

$$\alpha = Aa, \quad \mathfrak{G} = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee;$$

poſons de plus, pour abréger davantage,

$$\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}; \quad \frac{B}{B+1} = \mathfrak{B}; \quad \frac{C}{C+1} = \mathfrak{C}; \quad \frac{D}{D+1} = \mathfrak{D}; \quad \frac{E}{E+1} = \mathfrak{E};$$

pour

pour avoir les distances de foyer de tous les verres:

$$p = \mathfrak{A}a; \quad q = \mathfrak{B}b; \quad r = \mathfrak{C}c; \quad s = \mathfrak{D}d; \quad t = \mathfrak{E}e.$$

Maintenant, puisque

$$BQ = \pi\mathfrak{B}b; \; CR = \pi'\mathfrak{C}c; \; DS = \pi''\mathfrak{D}d; \; ET = \pi'''\mathfrak{E}e;$$

à cause de $AB = a + b = Aa + b$, nous aurons $\pi\mathfrak{B}b = \Phi Aa + \Phi b$,

donc $b = \frac{\Phi Aa}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$. De plus, nous aurons

$$Bq = \frac{\pi\mathfrak{B}b}{\pi - \Phi}, \; \& \; Cq = \frac{\pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi}, \text{ donc}$$

$$\frac{\pi\mathfrak{B}b + \pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi} = Bb + c, \; \& \; \frac{c}{b} = \frac{\pi\mathfrak{B} - \pi B + \Phi B}{-\pi'\mathfrak{C} + \pi - \Phi}.$$

De la même maniere

$$Cr + Dr = \frac{\pi'\mathfrak{C}c + \pi''\mathfrak{D}d}{\pi' - \pi + \Phi} = Cc + d \; \& \; \frac{d}{c} = \frac{\pi'\mathfrak{C} - (\pi' - \pi + \Phi)C}{-\pi''\mathfrak{D} + \pi' - \pi + \Phi},$$

$$Ds + Es = \frac{\pi''\mathfrak{D}d + \pi'''\mathfrak{E}e}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = Dd + e \; \& \; \frac{e}{d} = \frac{\pi''\mathfrak{D} - (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)D}{-\pi'''\mathfrak{E} + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi},$$

& enfin $E\omega = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{m\Phi}$.

XXI. Ces formules admettent une belle réduction à cause de

$$\mathfrak{B} - B = \frac{-BB}{B + 1} = -\mathfrak{B}B, \; \& \text{ partant aussi}$$

$$\mathfrak{C} - C = -\mathfrak{C}C; \; \mathfrak{D} - D = -\mathfrak{D}D; \; \mathfrak{E} - E = -\mathfrak{E}E,$$

d'où nous trouvons:

$$b = \frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \cdot Aa; \qquad a + b = \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} Aa;$$

$$a = \frac{+(\mathfrak{B}\pi-\Phi)\,\mathrm{B}b}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}; \qquad \mathfrak{E}+c = \frac{\mathfrak{C}\pi'+(\mathfrak{B}-1)\pi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}.\mathrm{B}b;$$

$$d = \frac{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\mathrm{C}c; \quad \gamma+d = \frac{\mathfrak{D}\pi''+(\mathfrak{C}-1)\pi'}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}.\mathrm{C}c;$$

$$e = \frac{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}.\mathrm{D}d; \quad \delta+e = \frac{\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{D}-1)\pi''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}\,\mathrm{D}d;$$

& ſubſtituant toutes ces valeurs:

$$b = \frac{\mathrm{A}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}; \qquad \mathfrak{E} = \mathrm{B}b; \qquad q = \mathfrak{B}b;$$

$$c = \frac{\mathrm{AB}a\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}; \qquad \gamma = \mathrm{C}c; \qquad r = \mathfrak{C}c;$$

$$d = \frac{\mathrm{ABC}a\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}; \qquad \delta = \mathrm{D}d; \qquad s = \mathfrak{D}d;$$

$$e = \frac{\mathrm{ABCD}a\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}; \qquad \varepsilon = \mathrm{E}e; \qquad t = \mathfrak{E}e.$$

XXII. Voyons maintenant de quelle maniere les quantités P, Q, R, S, employées ci-deſſus, ſeront déterminées par ces nouveaux élémens; & d'abord, en ſubſtituant pour a, $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε, les valeurs indiquées, nous aurons:

$$\mathrm{P} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{A}a + b,$$

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABB}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{B}b + c,$$

$$\mathrm{R} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABBCC}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{BCC}b + (\mathrm{C}+1)\,\mathrm{C}c + d,$$

$$\mathrm{S} = (\mathrm{A}+1)\,\mathrm{ABBCCDD}a + (\mathrm{B}+1)\,\mathrm{BCCDD}b + (\mathrm{C}+1)\,\mathrm{CDD}c + (\mathrm{D}+1)\,\mathrm{D}d + e,$$

où il ne s'agit plus que de ſubſtituer pour b, c, d, e, les valeurs indiquées ci-deſſus. Or, pour la valeur de $\mathrm{E}\omega$, nous aurons premierement:

A +

$$A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e} =$$

$$A + \frac{(A+1)(B+1)Aa}{b}$$

$$B+1+\frac{(A+1)(C+1)ABBa}{c} + \frac{(B+1)(C+1)Bb}{c}$$

$$C+1+\frac{(A+1)(D+1)ABBCCa}{d} + \frac{(B+1)(D+1)BCCb}{d} + \frac{(C+1)(D+1)Cc}{d}$$

$$D+1+\frac{(A+1)ABBCCDDa}{e} + \frac{(B+1)BCCDDb}{e} + \frac{(C+1)CDDc}{e} +$$

$$\frac{(D+1)Dd}{e}.$$

Ici la premiere colonne verticale fait

$$A + (B + 1) + (C + 1) + (D + 1) + 1;$$

& la ſeconde, après avoir fait les ſubſtitutions, où la plupart des termes ſe détruiſent, donne

$$-(A + 1) + (A + 1)BCD\mathfrak{E}\frac{\pi'''}{\Phi}.$$

La troiſieme colonne, qui eſt multipliée par b, ſe réduit à

$$\frac{(B+1)b}{Aa\Phi}(\Phi - \pi + CD\mathfrak{E}\pi''') = \frac{(B+1)(\Phi-\pi+CD\mathfrak{E}\pi''')}{\mathfrak{B}\pi - \Phi};$$

les termes affectés par c donnent

$$\frac{(C+1)c}{ABa\Phi}(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \Phi) = \frac{(C+1)(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \Phi)}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi},$$

& enfin le dernier eſt

$$\frac{(D+1)d}{ABCa\Phi}(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi) = \frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}.$$

Joignons à ces trois derniers les parties $(B+1)$, $(C+1)$, $(D+1)$ du premier membre, & toute l'expreſſion prendra cette forme:

$$\frac{(A+1)BCD(\mathfrak{E}\pi'''}{\Phi}+\frac{(B+1)CD(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{B}-1)\pi)}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{(C+1)(D(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{C}-1)\pi)}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}$$
$$+\frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{D}-1)\pi'')}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}.$$

XXIII. Cette expreſſion nous donne le numérateur de la fraction qui exprime la diſtance $E\backsim$; or, pour en avoir le dénominateur, nous n'avons qu'à y ajouter encore $1+\frac{SE}{e}$, dont la valeur ſe réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}{\Phi}+\frac{(B+1)CDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}$$
$$+\frac{(C+1)DE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{(D+1)E(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+(E+1),$$

qui, étant multipliée par $\lambda\epsilon=\lambda Ee$, donneroit l'intervalle $LL'=d\epsilon$. Mais, ſi nous ajoutons actuellement cette expreſſion à la précédente, à cauſe de $\mathfrak{E}+\mathfrak{E}E=E$, nous obtiendrons:

$$(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)\left(\frac{(A+1)BCDE}{\Phi}+\frac{(B+1)CDE}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{(C+1)DE}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}\right.$$
$$\left.+\frac{(D+1)E}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{(E+1)}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}\right)$$
$$-\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}-\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}.$$

Le numérateur ſe réduit auſſi à une forme preſque ſemblable:

$$\mathfrak{E}\pi'''\left(\frac{(A+1)BCD}{\Phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\right)$$

$-\pi$

$$\frac{-\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi};$$

& le dénominateur ſe peut auſſi exprimer de cette ſorte:

$$E(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)\left(\frac{(A+1)BCD}{\Phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}\right)$$
$$\frac{-\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+E+1.$$

XXIV. Poſons maintenant, pour abréger,

$$\frac{(A+1)BCD\Phi}{\Phi}+\frac{(B+1)CD\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{(C+1)D\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{(D+1)\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=X,$$

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=Y;$$

pour avoir les expreſſions ſuivantes:

$$A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}=\frac{\mathfrak{E}X\pi'''}{\Phi}-Y,$$

$$A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}=\frac{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}{\Phi}$$
$$-Y+E+1,$$

$$\&\ de=\lambda e\left(1+\frac{SE}{e}\right)=\lambda e\left(\frac{EX(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}{\Phi}+E+1\right).$$

De là nous aurons pour le lieu de l'œil, où les couleurs d'iris évanouiſſent:

$$E\omega=\frac{Ee\,(\mathfrak{E}X\pi'''-Y\Phi}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)-Y\Phi+(E+1)\Phi}.$$

Or, pour le lieu de l'œil d'où l'on découvre le plus grand champ, nous avons trouvé, (§. 20)

$$E\omega = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}.$$

XXV. Donc, afin que ces deux lieux ſe réuniſſent dans un ſeul, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{E\mathfrak{E}X\pi''' - EY\Phi}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi) - Y\Phi + (E+1)\Phi} = \frac{\mathfrak{E}\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi},$$

qui ſe change en celle-ci:

$$o = EY\Phi(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi) - \mathfrak{E}Y\pi'''\Phi + \mathfrak{E}(E+1)\pi'''\Phi,$$

ou, à cauſe de $E - \mathfrak{E} = E\mathfrak{E}$, en celle-ci:

$$o = EY(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi) + E\pi''',$$

qui, étant diviſée par $E(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)$, donne

$$o = Y + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}.$$

Et partant ces deux lieux de l'œil ſe réuniſſent dans un ſeul, lorſqu'on arrange les verres en ſorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi} = o.$$

S'il étoit poſſible de faire évanouir en même tems l'intervalle LL′ entre toutes les images colorées, on remédieroit parfaitement à l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons: pour cet effet il faudroit outre cela remplir cette équation:

$$\frac{(A+1)BCDE\Phi}{\Phi} + \frac{(B+1)CDE\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi} + \frac{(C+1)DE\Phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi} + \frac{(D+1)E\Phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}$$
$$+ \frac{(E+1)\Phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi} = o.$$

Or nous avons vu que cela ne ſauroit s'exécuter que pour les myopes, qui demandent pour la diſtance $\epsilon = Ee$ une valeur négative aſſez mé-

médiocre: or $\varepsilon = \frac{ABCDE\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; mais, pour toute autre vue, il ſera toujours bon de rendre cette expreſſion auſſi petite qu'il eſt poſſible.

XXVI. S'il arrivoit que, pour le lieu d'où l'on voit le plus grand champ, la diſtance $E\omega$ devînt négative, comme dans les petites lunettes à deux verres dont l'oculaire eſt concave, on ſeroit obligé d'appliquer l'œil immédiatement au dernier verre oculaire. Dans ce cas donc, afin que les couleurs d'iris évanouiſſent également, il faut faire en ſorte que cette quantité $\mathfrak{E}X\pi''' - Y\Phi$ évanouiſſe, ou bien il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{(A+1)ACD\mathfrak{E}\pi'''}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0;$$

& on remédieroit auſſi tout à fait à l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons, s'il étoit poſſible de remplir l'équation précédente, qui, à cauſe de $\frac{E}{E+1} = \mathfrak{E}$, ſe réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCD\mathfrak{E}\Phi}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

En cas que cela ſoit impoſſible, qu'on tâche de rendre la valeur de cette expreſſion auſſi petite, que les autres circonſtances le permettent.

XXVII. Mais retournons au cas précédent, où l'on n'eſt pas obligé d'appliquer l'œil immédiatement au verre oculaire, & quand on aura arrangé les verres en ſorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=o,$$

le lieu de l'œil derriere le dernier verre ſe trouvera à la diſtance:

$$E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi},$$

d'où l'on découvrira en même tems le plus grand champ, & l'on verra les objets bien terminés ſans aucune confuſion de couleurs. Si l'on veut auſſi tenir compte du groſſiſſement, qui marque combien de fois l'angle $\Phi=OAo$ eſt multiplié par les verres, en poſant l'angle viſuel $E\omega T=m.OAo$, on aura $\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi=m\Phi$, & de là on aura pour le lieu de l'œil $E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi}$,

ou bien $E\omega=\frac{(m-1)\mathfrak{E}\pi'''}{m(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi}e$, à cauſe de $\Phi=\frac{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi}{m-1}$.

XXVIII. Voilà donc la démonſtration des formules que j'ai données dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie, pour délivrer tant les Téleſcopes que les Microſcopes des couleurs d'iris, dont les objets paroiſſent d'ailleurs environnés. Ce ſont préciſément les mêmes formules que j'ai produites alors; & il faut bien remarquer, que c'eſt uniquement l'introduction des lettres π, π', π'', π''', avec l'angle Φ, qui nous a conduits à des formules ſi ſimples, dont la progreſſion, pour quelque grand nombre de verres qu'on veuille l'employer, eſt tout à fait évidente; tandis que les autres quantités α, b, $\mathfrak{C}$, c, γ &c., quoiqu'elles paroiſſent plus naturelles à cette recherche, nous auroient conduits à des expreſſions extrêmement embaraſſées, qu'on ne ſauroit plus développer dès que le nombre des verres eſt tant ſoit peu conſidérable. Le cas de cinq verres, que j'ai ici ſuppoſé, ſuffit pour nous éclaircir parfaitement ſur cet important article, quelque grand que puiſſe être le nombre des verres.

XXIX.

XXIX. Donc, quelque grand que ſoit le nombre des verres, conſidérons les quantités, qui nous tiennent preſque lieu des premiers élémens; & d'abord, par rapport au verre objectif, nous avons la diſtance de l'objet $AO = a$, avec l'angle $OAo = \varphi$, duquel dépend le champ apparent, & outre cela le nombre A, duquel on forme $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$. Par rapport au ſecond verre QQ, nous introduiſons dans le calcul les nombres π, B & $\mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}$;

le troiſieme verre fournit π', C & $\mathfrak{C} = \frac{C}{C+1}$;

le quatrieme fournit ces nombres π'', D & $\mathfrak{D} = \frac{D}{D+1}$;

le cinquieme - - - π''', E & $\mathfrak{E} = \frac{E}{E+1}$;

le ſixieme - - - π^{IV}, F & $\mathfrak{F} = \frac{F}{F+1}$;

&c.

où π, π', π'', π''' &c. ſont des fractions, qui marquent à la quantieme partie de la diſtance de foyer de chaque verre eſt pris égal le demi-diametre de ſon ouverture. Ces fractions dépendent donc de la courbure des faces du verre, & l'on convient, que pour les verres également convexes ou concaves des deux côtés, cette fraction ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{1}{4}$; mais elle doit être plus petite, quand les deux faces du verre ſont inégales.

XXX. Voyons maintenant comment les autres quantités qui entrent dans la détermination de l'inſtrument, ſont déterminées par ces élémens; & d'abord pour les diſtances de foyer, celle de l'objectif eſt $= \mathfrak{A}a = f$, & pour les autres de la maniere qui ſuit:

		Demi-diametre de l'ouverture
Diſtance de foyer du ſecond verre	$= \frac{A\mathfrak{B}\alpha\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = q$;	$BQ = \pi q$
du troiſieme	$= \frac{AB\mathfrak{C}\alpha\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = r$;	$CR = \pi' r$
du quatrieme	$= \frac{ABC\mathfrak{D}\alpha\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = s$;	$DS = \pi'' s$
du cinquieme	$= \frac{ABCD\mathfrak{E}\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = t$;	$ET = \pi''' t$
du ſixieme	$= \frac{ABCDE\mathfrak{F}\alpha\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = u$;	$FV = \pi^{IV} u$
	&c.	&c.

Enſuite pour les lieux des images:

$AF = a = A\alpha$;

$BF = b = \frac{A\alpha\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$

$BG = \mathfrak{e} = \frac{AB\alpha\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$;

$CG = c = \frac{AB\alpha\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$

$CH = \gamma = \frac{ABC\alpha\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$;

$DH = d = \frac{ABC\alpha\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$DK = \delta = \frac{ABCD\alpha\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$;

$EK = e = \frac{ABCD\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$

$EL = \varepsilon = \frac{ABCDE\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; $FL = f = \frac{ABCDE\alpha\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$EM = \zeta = \frac{ABCDEF\alpha\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$.

Et

Et pour les images mêmes, la partie vue de l'objet étant $Oo = a\Phi$, on a

$$Ff = Aa\Phi;\ Gg = ABa\Phi;\ Hh = ABCa\Phi;\ Kk = ABCDa\Phi;$$
$$Ll = ABCDEa\Phi;\quad Mm = ABCDEFa\Phi.$$

XXXI. Pour les distances entre les verres on tirera de là

$$AB = a + b = \frac{A\mathfrak{B} + \pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi};$$

$$BC = \mathfrak{C} + c = \frac{Aa\Phi\ (B\mathfrak{C}\pi' - \mathfrak{B}\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \Phi)\ (\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)};$$

$$CD = \gamma + d = \frac{ABa\Phi\ (C\mathfrak{D}\pi'' - \mathfrak{C}\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)\ (\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)};$$

$$DE = \delta + e = \frac{ABCa\Phi\ (D\mathfrak{E}\pi''' - \mathfrak{D}\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\ (\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)};$$

$$EF = \varepsilon + f = \frac{ABCDa\Phi\ (E\mathfrak{F}\pi^{IV} - \mathfrak{E}\pi''')}{(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)(\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi)},$$

&c.

auxquelles expressions il faut apporter d'autant plus d'attention, qu'elles doivent absolument être positives.

Ensuite, pour les angles dans la 2de figure, d'où l'on juge du grossissement, on a

$$OAo = BAQ = \Phi,$$
$$BqQ = CqR = \pi - \Phi,$$
$$CrR = DrS = \pi' - \pi + \Phi,$$
$$DsS = EsT = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi,$$
$$EtT = FtV = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi,$$
$$FuV = GuW = \pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi$$

&c.

& de là on trouve pour les interſections q, r, s, &c.

$$Bq = AB.a\Phi\left(\frac{1}{\mathfrak{B}\pi\cdot\Phi} - \frac{1}{\pi\cdot\Phi}\right); \quad Cq = AB.a\Phi\left(\frac{1}{\mathfrak{C}\pi^{I}\cdot\pi+\Phi} + \frac{1}{\pi\cdot\Phi}\right);$$

$$Cr = \frac{ABC.a\Phi}{\mathfrak{C}\pi^{I} - \pi + \Phi} - \frac{ABC.a\Phi}{\pi^{I} - \pi + \Phi};$$

$$Dr = \frac{ABC.a\Phi}{\mathfrak{D}\pi^{II}\cdot\pi^{I}+\pi\cdot\Phi} + \frac{ABC.a\Phi}{\pi^{I} - \pi + \Phi};$$

&c.

ou bien les diſtances de ces points des images reſpectives ſeront:

$$FA = Aa; \quad Gq = \frac{AB.a\Phi}{\pi - \Phi}; \quad Hr = \frac{ABC.a\Phi}{\pi^{I} - \pi + \Phi};$$

$$Ks = \frac{ABCD.a\Phi}{\pi^{II} - \pi^{I} + \pi - \Phi}; \quad Lt = \frac{ABCDE.a\Phi}{\pi^{III} - \pi^{II} + \pi^{I} - \pi + \Phi};$$

$$Mu = \frac{ABCDEF.a\Phi}{\pi^{IV} - \pi^{III} + \pi^{II} - \pi^{I} + \pi - \Phi}.$$

&c.

XXXII. Après l'explication de ces formules générales, paſſons à des nombres déterminés de verres; &, puiſqu'il faut auſſi tenir compte du groſſiſſement, ou de la multiplication de l'angle $OAo = \Phi$, produite par les verres, ſoit m cette multiplication, qui ſe rapporte à la repréſentation directe, de ſorte que ſi la repréſentation eſt renverſée, il faut donner au nombre m une valeur négative. Maintenant nous aurons

I. Pour le Cas de deux verres:

1°. La multiplication donne $\pi - \Phi = -m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{-\pi}{m-1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$Bq = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{B}b\pi}{m\Phi}, \text{ ou } \mathfrak{B}q = \frac{-A\mathfrak{B}a\pi}{m(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}.$$

3°. Pour remédier à l'inconvénient de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = o.$$

II. Pour le cas de trois verres :

1°. La multiplication donne $\pi' - \pi + \Phi = m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{\pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$Cr = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{m\Phi}, \text{ ou } Cr = \frac{AB\mathfrak{C}a\pi'}{m(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}.$$

3°. A cause de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = o.$$

III. Pour le cas de quatre verres :

1°. La multiplication donne $\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = -m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{-\pi'' + \pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$Ds = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{D}d\pi''}{m\Phi}, \text{ ou } Ds = \frac{-ABC\mathfrak{D}a\pi''}{m(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

3°. A cauſe de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0.$$

IV. Pour le cas de cinq verres:

1°. La multiplication donne $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = + m\Phi$, & partant $\Phi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m - 1}$ pour le champ apparent.

2°. La diſtance de l'œil derriere le dernier verre

$$Et = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi}, \text{ ou } Et = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''}{m(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}.$$

3°. A cauſe de la diverſe réfrangibilité des rayons, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

La continuation de ces formules à pluſieurs verres eſt ſi aiſée, qu'il ſeroit ſuperflu de les continuer, d'autant plus que, dans mon Mémoire du XIII Volume, toutes ces formules ſont déjà rapportées à pluſieurs verres, & cela conjointement avec celles que les autres bonnes qualités de ces inſtrumens exigent.

XXXIII. Juſqu'ici j'ai eu égard à l'uſage principal de ces inſtrumens, qui eſt de regarder à travers. Mais, ſi l'on vouloit, dans une chambre obſcure, recevoir la derniere image ſur une ſurface blanche, on n'auroit qu'à la poſer perpendiculaire à l'axe de l'inſtrument entre les limites L & L', afin que la repréſentation devînt d'autant plus diſtincte. Mais, pour la délivrer des couleurs d'iris, il faut que les rayons repréſentent ſur la table les extrêmités l, ayent préciſément la direction Ωl (fig. 1), puiſqu'alors les diverſes couleurs ſe réuniſſent dans

dans une ſeule. Or cela arrive, lorſque le point Ω (fig. 1) ſe confond avec le point ω (fig. 2), puiſqu'alors $\frac{L\mathit{l}}{L\Omega} = \frac{L\mathit{l}}{L\omega} = \frac{ET}{E\omega}$: & partant la ligne $T\omega\Omega\mathit{l}$, qui eſt la direction du rayon, droite. Donc, pour obtenir cet effet, il faut arranger les verres en ſorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi\text{-}\Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'\text{-}\pi\text{+}\Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''\text{-}\pi'\text{+}\pi\text{-}\Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''\text{-}\pi''\text{+}\pi'\text{-}\pi\text{+}\Phi} + \&c. = 0;$$

ce qui eſt le même remede dont il faut ſe ſervir pour délivrer la viſion des bords colorés. Ordinairement ces ſortes de repréſentations qu'on fait dans les chambres obſcures, ne ſont que trop aſſujetties à cette confuſion cauſée par la diverſe réfrangibilité des rayons; & partant le remede que je viens de propoſer contre cet inconvénient, ſera d'une très grande utilité.

XXXIV. Mais il faut bien remarquer ici, que ce remede pour délivrer les inſtrumens dioptriques des inconvéniens de la diverſe réfrangibilité des rayons, ne ſauroit produire ſon effet, que lorſque l'autre eſpece de confuſion, qui tire ſon origine de l'ouverture des verres, eſt réduite à rien, ou diminuée au point de n'être plus ſenſible. La raiſon en eſt bien évidente; car, ſi les rayons qui paſſent par les bords de l'objectif, préſentoient d'autres images que ceux qui paſſent par ſon centre, que j'ai conſidérés ici tout ſeuls, l'effet de la diverſe réfraction en deviendroit ſans doute beaucoup plus grand. Ce n'eſt donc qu'à meſure qu'on remédie à la confuſion de l'ouverture des verres, qu'on réuſſit à faire évanouir celle qui provient de la diverſe réfrangibilité des rayons. Et en effet, pour la plûpart, lorſqu'on ſe plaint des couleurs d'iris, auxquelles une lunette eſt aſſujettie, la raiſon ſe trouve ordinairement dans l'ouverture de l'objectif, laquelle étant rétrécie, ces couleurs évanouiſſent preſque tout à fait; ce qui prouve inconteſtablement, que le défaut réſide plutôt dans la trop grande ouverture de l'objectif, que dans la nature des rayons, dont l'effet

l'effet immédiat n'eſt pas ordinairement beaucoup à craindre. Cependant il ſera toujours bon d'obſerver ſoigneuſement les regles que je viens de preſcrire ici, afin qu'on ſoit d'autant plus ſûr du juſte arrangement des verres, ſurtout lorſqu'il y en a plus de deux; puiſque ſans cette précaution la différence entre les deux lieux pour l'œil, Ω & ω, pourroit devenir aſſez grande pour produire un effet facheux.

Mais les plus grands ſoins doivent être apportés à diminuer la confuſion qui réſulte de l'ouverture des verres, & même à la réduire à rien, s'il eſt poſſible; ce n'eſt que par ce moyen, qu'on pourra achever de porter ces inſtrumens dioptriques au plus haut degré de perfection.

XXXV. Après ces recherches il eſt clair, que c'étoit un préjugé deſtitué de fondement, que de s'imaginer qu'il étoit abſolument impoſſible de prévenir dans les inſtrumens dioptriques les inconvéniens de la diverſe réfrangibilité des rayons, ſurtout quand on demande de très grands groſſiſſemens. Comme plus la diſtance de foyer de l'objectif eſt grande, plus auſſi l'eſpace de diffuſion cauſée par les différens rayons devient grand dans la même raiſon, on n'a pas balancé à en conclure, que plus on veut groſſir les objets, plus auſſi cette confuſion deviendroit conſidérable, & qu'il ſeroit impoſſible d'y remédier par un bon arrangement des verres. Cependant perſonne, que je ſache, n'avoit pris la peine de déterminer par le calcul toutes les images formées par les différens rayons qui paſſent par pluſieurs verres, ce qui auroit pourtant été le ſeul moyen de s'éclaircir ſur cet article. Mais maintenant, après avoir fait ces calculs, nous voyons que pour le même groſſiſſement l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons peut varier à l'infini, & partant devenir tantôt plus grand tantôt plus petit, ſelon le nombre & l'arrangement des verres. Enſuite il eſt non ſeulement poſſible de délivrer la viſion des objets des couleurs d'iris, mais, ce qui eſt le plus remarquable, nous avons auſſi vu, que pour ceux qui ont la vue courte on pourroit même entierement détruire l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons, de ſorte que la derniere image (ou l'ob-

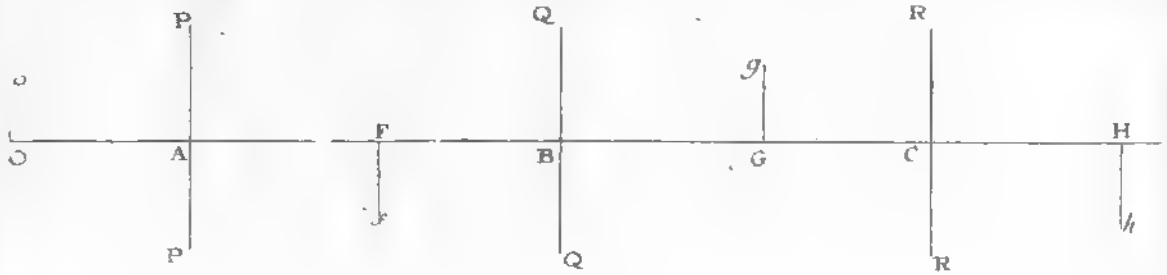

P
Q
R
g
o
O
A
F
B
G
C
H
f
h
P
Q
R

Fig 1

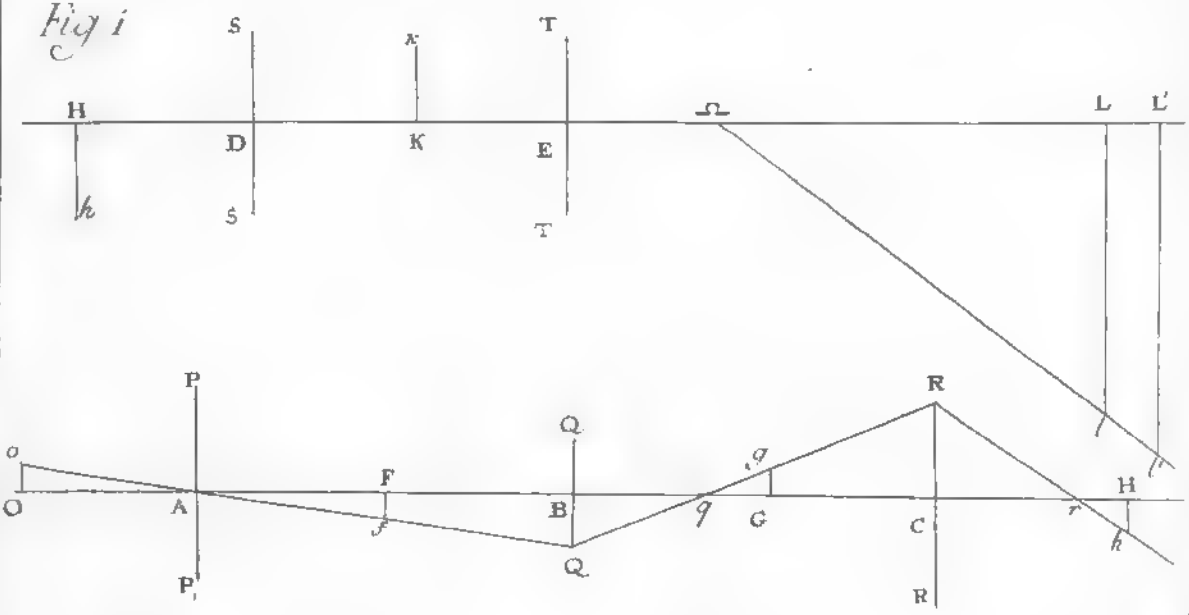
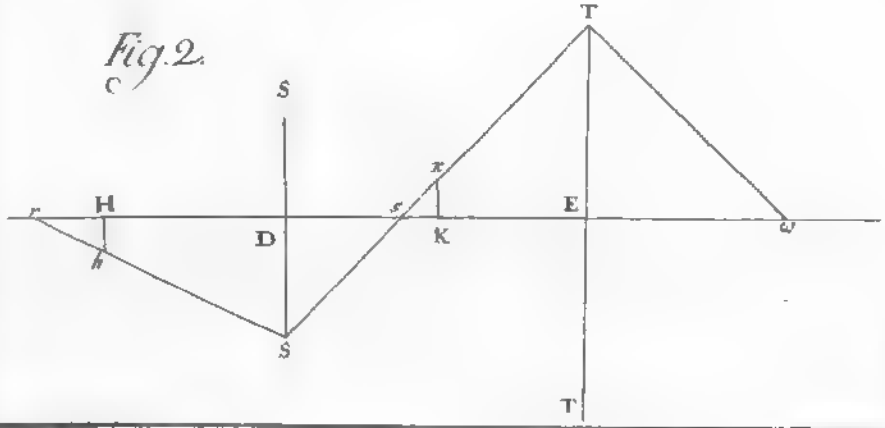

S
x
T
H
D
K
E
L
L'
h
S
T
P
R
Q
o
F
g
H
O
A
B
q
G
C
r
f
h
Q
P
R

Fig 2.


T
S
x
H
E
r
s
D
K
w
h
S
T

l'objet immédiat de la vue) ſeroit auſſi nette, que ſi elle étoit repréſentée par un miroir, & tout cela en n'employant qu'une ſeule eſpece de verre.

XXXVI. Cependant je ne diſconviens pas, qu'en employant différentes eſpeces de verre, on ne puiſſe peut-être trouver des arrangemens plus avantageux, ou au moins plus commodes; mais, puiſque les différentes eſpeces de verre different ſi peu en réfraction, ces avantages ſeront toujours peu conſidérables. Il ne ſera pas même difficile d'appliquer les recherches que je viens de développer, au cas où tous les verres auroient une réfraction particuliere: on n'auroit qu'à attacher à chaque verre une valeur particuliere de la lettre λ, & qu'à l'indiquer ainſi: λ, λ', λ'', λ''' &c.; où il faudroit remarquer que la raiſon de réfraction 1,55 : 1 donneroit $\lambda = 0,01844$, & celle-ci, 1,50 : 1 donneroit $\lambda = 0,01815$. Puiſque toutes les eſpeces de verre ſont compriſes entre ces limites, on voit que les valeurs des lettres λ, λ', λ'' &c. deviendroient trop peu différentes entr'elles, pour qu'on pût s'en promettre des avantages fort conſidérables. Mais, pour s'en aſſurer entierement, il vaudroit bien la peine de développer ces mêmes recherches, dans le cas où la lettre λ auroit pour chaque verre une valeur particuliere; les calculs deviendroient un peu plus ennuyeux, mais peut-être à la fin parviendroit-on à des formules aſſez ſimples.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LES NOUVELLES LUNETTES D'ANGLETERRE DE Mr. DOLLOND,

ET SUR LE PRINCIPE QUI EN EST LE FONDEMENT. (*)

PAR M. L. EULER.

Ces Lunettes produiſent un effet ſi excellent, qu'il ſemble que leur conſtruction remédie parfaitement aux défauts auxquels les autres inſtrumens dioptriques ſont aſſujettis. Ces défauts conſiſtent dans une double confuſion, dont l'une eſt cauſée par la figure ſphérique des verres, ou plutôt par leur ouverture, entant que les rayons qui paſſent par les bords de l'objectif repréſentent les objets dans un autre lieu que ceux qui paſſent par le milieu; l'autre provient de la diverſe nature des rayons, qui, ſelon leurs différentes couleurs, ſouffrent différentes réfractions en paſſant par le verre. Mr. Dollond prétend avoir détruit à la fois cette double confuſion, en compoſant l'objectif de deux verres, formés de deux eſpeces différentes de verre, dont l'une ſe nomme en Anglois *Fintgluſs*, & l'autre *Crownglaſs*. Cet expédient mérite ſans doute toute notre attention, tant par le bon effet qui en eſt produit, que par une circonſtance tout à fait ſinguliere, qui ſemble renverſer les principes de la réfraction, qu'on a regardés juſqu'ici comme très ſolidement établis.

Pour ce qui regarde la premiere confuſion, j'ai ſuffiſamment fait voir, qu'en compoſant l'objectif de deux verres, il eſt poſſible de la

(*) Lu le 16 de Sept. 1762.

la diminuer & même de la réduire à rien, en déterminant d'une certaine maniere les ſphéricités des quatre faces de ces verres: mais, pour l'autre confuſion, il eſt certain qu'on n'y ſauroit remédier qu'en employant deux matieres tranſparentes, qui different aſſez conſidérablement par rapport à la réfraction. J'ai montré autrefois comment on pourroit compoſer de tels objectifs de verre & d'eau, la différence entre la réfraction de ces deux matieres étant la plus grande que la Nature nous offre; cependant elle eſt encore trop petite, pour que la pratique en puiſſe tirer un aſſez grand avantage, vu que la courbure des faces du verre deviendroit ſi conſidérable, qu'il ne ſeroit plus ſuſceptible d'une ouverture ſuffiſante; ce qui m'a obligé de renoncer à cette idée de conſtruire des objectifs délivrés de la confuſion cauſée par la diverſe réfrangibilité des rayons.

Par cette raiſon on doit être d'autant plus ſurpris, que Mr. Dollond ait trouvé moyen de faire de tels objectifs, en n'y employant que deux différentes eſpeces de verre, dont la réfraction differe certainement beaucoup moins, que celle du verre & de l'eau; attendu que Mr. Dollond lui-même fixe la raiſon de réfraction de l'air dans le flintglaſs à 1,583 : 1, & dans le crownglaſs à 1,53 : 1. Mais il prétend que la diſperſion des différens rayons differe très conſidérablement dans ces deux eſpeces de verre, & même en raiſon de 3 à 2; ce qui renverſeroit entierement la théorie que j'ai donnée autrefois ſur la réfraction de différentes matieres tranſparentes, & que je me flattois avoir portée au plus haut degré de certitude. Mais, avant que de rejetter cette théorie, il me ſera permis d'examiner ſoigneuſement toutes les preuves ſur leſquelles Mr. Dollond fonde ſon ſentiment à l'égard de cette exceſſive différence entre ſes deux ſortes de verre. Or toute la controverſe ſe réduit à cette queſtion:

„La raiſon de la réfraction que ſouffrent les rayons moyens en „paſſant d'un milieu dans un autre, étant donnée, on demande la rai„ſon de la réfraction que ſouffriront dans le même paſſage les rayons „rouges & les violets, ou bien les plus & les moins réfrangibles."

Il ſera bon de mettre cette queſtion dans un plus grand jour, avant que d'entreprendre l'examen des preuves que M. Dollond rapporte pour établir ſon ſentiment; & pour une plus grande clarté, je renfermerai mes réflexions dans les articles ſuivans.

1. Conſidérons d'abord la choſe en général; & quand les rayons paſſent d'un milieu A dans un autre milieu B, ſoit $m : 1$ la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons moyens; $r : 1$ la même raiſon pour les rayons rouges ou les moins réfrangibles, & $v : 1$ cette raiſon pour les rayons violets ou les plus réfrangibles. Donc, puiſque la raiſon $r : 1$ approche plus de la raiſon d'égalité, que la raiſon $m : 1$, & que la raiſon $v : 1$ s'en écarte plus, il s'enſuit que, ſi $m > 1$, on aura $r < m$ & $v > m$: or, ſi $m < 1$, on aura $r > m$, & $v < m$. Cependant, comme la différence entre ces trois nombres m, r & v, eſt toujours très petite, on peut regarder m comme le milieu arithmétique entre r & v, de ſorte que $r + v = 2m$. Si l'on vouloit établir les rayons moyens, en ſorte que m fût le moyen proportionel entre r & v, ou bien $mm = rv$, cela reviendroit au même.

2. Pour abréger le diſcours, en partant de ces différentes réfractions, je nommerai ſimplement *Réfraction moyenne*, la raiſon du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction des rayons moyens. De la même maniere, *Réfraction rouge* & *Réfraction violette*, ſignifieront cette raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons rouges & violets. On dira donc que la *réfraction violette* eſt plus grande que la *réfraction rouge*, & que la *réfraction moyenne* tient un milieu entr'elles: où il faut remarquer, que les mots, *plus grand* & *plus petit*, ſe rapportent à un plus grand & plus petit écart de la raiſon d'égalité.

3. Pour rendre cela plus ſenſible, conſidérons le cas où les rayons paſſent de l'air dans le verre, &, ſuivant les déterminations de Newton, nous aurons la réfraction moyenne $= 155 : 100$, la réfrac-

fraction rouge $=$ 154 : 100, & la réfraction violette $=$ 156 : 100, de ſorte que

$$m = \frac{155}{100} = 1{,}55\,;\quad r = \frac{154}{100} = 1{,}54 \;\&\; v = \frac{156}{100} = 1{,}56\,;$$

ce qu'il faut entendre de cette eſpece de verre, à laquelle répond la réfraction moyenne 155 : 100; puiſque Mr. Dollond a découvert des eſpeces très différentes de verre à cet égard. Comme ici $m > 1$, il eſt évident que $r < m$, & $v > m$, ou bien, la raiſon $r : 1$ approche plus de la raiſon d'égalité que la raiſon $v : 1$.

4. Mais, quand les rayons paſſent de ce verre dans l'air, on doit renverſer ces mêmes raiſons, & la réfraction moyenne ſera $=$ 100 : 155, la rouge $=$ 100 : 154 & la violette $=$ 100 : 156, de ſorte que réduiſant à l'unité le dernier terme de ces raiſons, on aura:

$$m = \frac{100}{155}; \qquad r = \frac{100}{154}; \qquad \& \; v = \frac{100}{156};$$

où il y a viſiblement $r > m$ & $v < m$, puiſque $m < 1$. Cependant la raiſon $r : 1$ approche plus de la raiſon d'égalité que la raiſon $v : 1$, & on pourra dire comme auparavant, que la *réfraction rouge* eſt plus petite, & la réfraction violette plus grande, quoique la valeur de r ſoit dans ce cas plus grande que celle de v.

5. Il en eſt de même en général: car ſi, pour le paſſage du milieu A dans le milieu B, on a la réfraction moyenne $= m : 1$, la rouge $= r : 1$ & la violette $= v : 1$, on aura pour le cas renverſé, où les rayons paſſent du milieu B dans le milieu A,

la réfraction moyenne $= \frac{1}{m} : 1$,

la réfraction rouge $= \frac{1}{r} : 1$,

& la réfraction violette $= \frac{1}{v} : 1$;

où la réfraction rouge eſt auſſi bien la plus petite & la réfraction violette la plus grande, que dans le premier cas: puiſque, ſi la raiſon $r : 1$, approche plus de la raiſon d'égalité que la raiſon $v : 1$, la même propriété ſe trouve auſſi dans les raiſons renverſées $\frac{1}{r} : 1$ & $\frac{1}{v} : 1$.

6. Or, que le paſſage du milieu B dans le milieu A renferme toujours une réfraction renverſée de celle qui convient au paſſage du milieu A dans le milieu B, c'eſt un principe fondamental de toute la Dioptrique, auſſi bien que l'invariabilité dans le rapport entre les ſinus d'incidence & de réfraction: & aucun de ceux qui ont traité juſqu'ici cette ſcience, ne s'eſt aviſé de douter de la vérité de ces deux principes. C'eſt auſſi là-deſſus que j'ai établi toute ma Théorie de la Réfraction, & je la regarde encore comme inébranlable, à moins qu'on ne renverſe l'un ou l'autre de ces deux principes, dont j'avoue très volontiers, que je ne puis pas démontrer géométriquement la vérité, vu qu'elle dépend viſiblement de la nature de la lumiere, & de la maniere dont ſe fait la réfraction dans le paſſage par différens milieux réfringens; & je crois qu'il s'en faut beaucoup, que nous ſoyons encore arrivés à cette connoiſſance.

7. Je ſuis auſſi aſſuré que Mr. Dollond ne veut pas conteſter ces principes, quand il ſe flatte avoir détruit par ſes expériences ma théorie de la réfraction, dans laquelle je crois avoir établi le vrai rapport qui doit ſe trouver entre les quantités m, r & v, de ſorte que connoiſſant la réfraction moyenne, on puiſſe toujours aſſigner par-là la réfraction rouge & la violette. Mais, quand même la diverſe réfrangibilité des rayons ſuivroit une loi différente de celle que j'ai établie, ce ſeroit toujours le plus grand paradoxe, que deux eſpeces ſi peu différentes de verre produiſiſſent des effets ſi énormément différens dans la réfraction des rayons diverſement colorés. Et partant, indépendamment

ment d'aucune théorie, les preuves de M. Dollond exigent toujours l'examen le plus rigoureux.

8. La principale preuve eſt fondée ſur l'expérience de deux priſmes formés de deux eſpeces différentes de verre, qu'il a conſtruits & joints de telle ſorte enſemble, qu'ils lui ont préſenté les objets ſans les couleurs d'iris : d'où il a conclu que le verre nommé *Crownglaſs* diſperſe d'un tiers moins les divers rayons, que celui qu'on nomme *Flintglaſs*. Or, pour juger, tant de ces expériences, que de la concluſion que M. Dollond en a tirée, il eſt néceſſaire de conſidérer en général la réfraction que les rayons éprouvent en paſſant par un ou pluſieurs priſmes.

9. Pour introduire plus commodément dans le calcul la diverſe réfraction des rayons, lorſque la réfraction moyenne eſt exprimée par $m : 1$, ou ſimplement par le nombre m, je ſuppoſerai la réfraction rouge $= m - \mathrm{d}m$, & la violette $= m + \mathrm{d}m$, de ſorte que $r = m - \mathrm{d}m$, & $v = m + \mathrm{d}m$; car, puiſque les différences entre ces nombres ſont très petites, il ſera permis de la traiter ſur le pied des différentiels. Selon ma théorie, la valeur de cette différentielle ſeroit $\mathrm{d}m = \frac{1}{6\gamma}\, m/m$; mais je ferai ici abſtraction de toute théorie, & je regarderai cette valeur comme inconnue, dans la vue de la déterminer par les expériences que M. Dollond propoſe.

10. Soit CAD l'angle d'un priſme, que je poſe $= \alpha$, & la matiere du priſme telle, que la réfraction moyenne des rayons qui y entrent de l'air ſoit $= m : 1$, & partant de ceux qui en ſortent dans l'air $= 1 : m$. Conſidérons maintenant un rayon quelconque FQ, comme venant d'une étoile ou d'un point lumineux fort éloigné, qui entre dans le priſme en Q, où ayant pris la direction QR, il ſorte en R dans l'air, de ſorte qu'il faille déterminer la direction RG de ce rayon tranſmis par le priſme. J'ai marqué dans la figure les angles que fait ce rayon avec les deux faces du priſme CA & DA; d'où l'on tire d'abord pour la réfraction moyenne ces deux équations : $\mathrm{cof}\, p = m \,\mathrm{cof}\, q$, & $m \,\mathrm{cof}\,(q - \alpha) = \mathrm{cof}\, r$.

Pl. VIII. Fig. 1. *Sur l'effet d'un ſeul Priſme.*

11.

11. Puiſque $m > 1$, il eſt évident que ni le cof q, ni le cof $(q - \alpha)$, ne ſauroit être plus grand que $\frac{1}{m}$. Soit donc μ l'angle dont le coſinus eſt préciſément $= \frac{1}{m}$, ou cof $\mu = \frac{1}{m}$, & partant il faut qu'il ſoit tant cof $q <$ cof μ que cof $(q - \alpha) <$ cof μ, donc $q > \mu$; & $q - \alpha > \mu$, ou $q > \alpha + \mu$. Mais ſelon les figures tous ces angles ſont aigus; donc, à moins que l'angle $\alpha + \mu$ ne ſoit plus petit qu'un droit, il eſt impoſſible que le rayon FQ ſoit de cette ſorte tranſmis par le priſme, c'eſt à dire, tant que l'angle AQF $= p$ eſt aigu. Mais ſi l'angle p étoit obtus, ces conditions devroient s'entendre des complémens de ces angles à deux droits, & on auroit $180° - q > \mu$, & $180° - q + \alpha > \mu$, donc $q < 180° - \mu$, ce qui remplit auſſi la ſeconde condition: d'où nous avons ces deux limites: $q > \alpha + \mu$, & $q < 180° - \mu$.

12. D'abord on demande ici la quantité de la réfraction, ou combien la direction RG s'écarte de la direction FQ. Or, ſi l'on continuoit le rayon FQ juſqu'au côté AD, il y feroit un angle $p - \alpha$, & partant la quantité de la réfraction eſt meſurée par la différence entre les angles r & $p - \alpha$, ou bien elle ſera $= p - \alpha - r$; c'eſt à dire, en regardant l'objet par le priſme, il paroitra autant écarté de ſon lieu naturel. Or le rapport entre les angles p & r ſe trouve aiſément en éliminant l'angle q; car la premiere égalité donnant cof $q = \frac{1}{m}$ cof p, & partant ſin $q = \frac{1}{m} V(mm - \text{cof } p^2)$, l'on en tire

$$\text{cof}(q-\alpha) = \text{cof}\alpha\,\text{cof}q + \text{ſin}\alpha\,\text{ſ}q = \frac{\text{cof}\alpha\,\text{cof}p + \text{ſ}\alpha\,V(mm - \text{cof}p^2)}{m},$$

donc cof $r =$ cof α cof p + ſin $\alpha\, V(mm -$ cof $p^2)$, ou

cof $p^2 - 2$ cof α cof p cof $r +$ cof $r^2 = mm$ ſin α^2.

13.

13. Mais la principale queſtion roule ici ſur la diſperſion des rayons diverſement colorés; pour cet effet, on n'a qu'à chercher la variation de l'angle r, en faiſant le nombre m variable, pendant que l'angle p demeure le même. La derniere équation eſt très propre à ce deſſein, laquelle nous donne dabord par la différentiation;

$$\mathrm{d}r \cos\alpha \cos p \sin r - \mathrm{d}r \sin r \cos r = m\,\mathrm{d}m \sin\alpha^2,$$

& partant

$$\mathrm{d}r = \frac{m\,\mathrm{d}m \sin\alpha^2}{(\cos\alpha\cos p - \cos r)\sin r} = -\frac{m\,\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin r \,.\, \sqrt{(mm - \cos p^2)}},$$

ou bien $\mathrm{d}r = \dfrac{\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$.

Donc, après avoir trouvé l'angle $\mathrm{DRG} = r$ pour les rayons moyens, on aura la quantité de cet angle

pour les rayons rouges $= r + \dfrac{\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$, &

pour les rayons violets $= r - \dfrac{\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$.

14. La même détermination ſe tire auſſi ſans peine immédiatement de nos deux équations principales $\cos p = m \cos q$ & $m \cos(q - \alpha) = \cos r$, en les différentiant dans la ſuppoſition que les angles q & r avec le nombre m ſont variables, pendant que les angles p & α demeurent conſtans. De là on trouve

$$0 = \mathrm{d}m \cos q - m\,\mathrm{d}q \sin q, \text{ \& } \mathrm{d}m \cos(q - \alpha) - m\,\mathrm{d}q \sin(q - \alpha) = -\mathrm{d}r \sin r;$$

donc, puiſque la premiere donne $m\,\mathrm{d}q = \dfrac{\mathrm{d}m \cos q}{\sin q}$, la ſeconde devient

$$\mathrm{d}m \left(\cos(q - \alpha) - \frac{\cos q \sin(q - \alpha)}{\sin q}\right) = -\mathrm{d}r \sin r.$$

Or, $\sin q \cos(q-\alpha) - \cos q \sin(q-\alpha) = \sin(q-(q-\alpha)) = \sin\alpha$,

donc $\frac{\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q} = -\mathrm{d}r \sin r$, ou bien $\mathrm{d}r = \frac{-\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$;

où $\mathrm{d}r$ marque l'accroiſſement de l'angle r, pendant qu'on met $m+\mathrm{d}m$ au lieu de m: mais, pour les rayons rouges, il faut écrire $m - \mathrm{d}m$, & pour les violets $m + \mathrm{d}m$ au lieu de m.

15, La diſperſion entiere ſera donc exprimée par $\frac{2\,\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$, ou bien une étoile vue par le priſme paroitra allongée par un ſi grand eſpace dans le Ciel, l'un des bouts étant rouge & l'autre violet. On voit que, ſous les mêmes circonſtances du priſme, cette image de l'étoile ſera d'autant plus allongée, plus la particule $2\,\mathrm{d}m$, que marque la différence entre la réfraction rouge & violette, ſera grande. De là on pourra donc auſſi juger réciproquement de la valeur $\mathrm{d}m$ en regardant une étoile par un tel priſme; & meſurant l'eſpace allongé qu'elle paroit occuper dans le Ciel. Ou bien, ce qui revient au même, on laiſſera tomber dans une chambre obſcure l'image de l'étoile, & on meſurera la grandeur du ſpectre, pour en conclure la valeur de la formule $\frac{2\,\mathrm{d}m \sin\alpha}{\sin q \sin r}$, & de là enſuite celle de $\mathrm{d}m$.

16. Or M. Dollond aſſure, que quand on emploie de cette ſorte deux priſmes ſemblables, l'un de flintglaſs, l'autre de crownglaſs, celui-ci produit une beaucoup plus petite diſperſion que le premier, & que la valeur de $\mathrm{d}m$ pour le crownglaſs ne ſera environ que $\frac{2}{3}$ de celle qui répond au flintglaſs. Comme on ne ſauroit douter du ſuccès de cette expérience, la concluſion qu'on en tire ſemble être aſſujettie à quelque doute aſſez important. Le crownglaſs eſt un verre verdâtre aſſez foncé; or on ſait qu'un tel verre ne tranſmet que les rayons qui ſont à peu près de la même nature, & que les autres ſont pour la plupart interceptés: donc, ſi les rayons rouges, & peut-être auſſi les orangés, étoient interceptés par le crownglaſs, l'image colorée perdroit

droit ſans doute beaucoup de ſon étendue, la partie rouge y manquant preſque entierement, ou devenant trop foible pour être apperçue.

17. Il ſeroit donc bien poſſible, que le crownglaſs produisît une image beaucoup moins étendue que ſelon la loi de la réfraction, où l'on ſuppoſe que tous les rayons ſont tranſmis également; ſans que cette loi puiſſe être révoquée en doute. Par ce moyen on pourroit même faire évanouir toute diſperſion; on n'auroit qu'à employer un tel verre coloré, qui ne tranſmît que les rayons de la même couleur. Cet expédient a déjà été propoſé autrefois, de conſtruire les objectifs d'un verre coloré très foncé; mais, comme on perdroit alors tous les autres rayons, la repréſentation deviendroit trop obſcure, & les lunettes n'en ſeroient pas moins défectueuſes. Il me paroit donc encore fort douteux, ſi cette expérience ſuffit pour renverſer aucune hypotheſe ſur la réfraction, quelque défectueuſe qu'elle ſoit d'ailleurs.

18. Or le *flintglaſs* n'ayant aucune couleur, & étant parfaitement tranſparent, produit une image complette, & étendue depuis le rouge le plus haut juſqu'au violet le plus foncé: & cette image ſeroit ſans doute plus longue que celle du crownglaſs, quand même la loi de réfraction ſeroit la même de part & d'autre, puiſque cette loi ne ſe rapporte en aucune façon aux rayons qui ſont interceptés. Il faut donc bien diſtinguer la diffuſion des images, cauſée par la diverſe réfraction des rayons, de celle qui eſt rétrécie par l'interception de quelques rayons, qui formeroient l'une ou l'autre extrémité de l'image.

Sur l'effet de deux Priſmes collés enſemble.

19. Soient maintenant deux priſmes CAB & ABD collés enſemble par le côté AB, ou, ce qui revient au même, dont les faces AB & BA ſoient paralleles entr'elles. Soit l'angle du premier CAB $=\alpha$, & de l'autre ABD $=\delta$: la réfraction moyenne de l'air dans le premier $= m : 1$, & de l'air dans l'autre $= n : 1$. Cela poſé, ſi un rayon FQ paſſe par ces deux priſmes, & qu'on nomme les angles, Pl. VIII. fig. 2.

gles, comme ils ſont marqués dans la figure; on aura pour la réfraction des rayons moyens ces égalités:

$$\text{cof}\, p = m \,\text{cof}\, q;\ m \,\text{cof}\,(q-\alpha) = n \,\text{cof}\, r;\ \&\ n \,\text{cof}\,(r+\mathfrak{E}) = \text{cof}\, s;$$

où je remarque ſeulement que, s'il y a le moindre vuide entre les deux priſmes, le paſſage ne ſauroit ſubſiſter, à moins que les formules m cof $(q - \alpha)$ & n cof r ne ſoient plus petites que l'unité.

20. La quantité de réfraction eſt eſtimée, comme auparavant, par l'angle que feroit le rayon incident FQ, continué avec le rayon rompu SG. Or le rayon FQ prolongé feroit avec la face AB un angle $= p - \alpha$, & le rayon SG avec la même face un angle $= s - \mathfrak{E}$, dont la différence $p - s - \alpha + \mathfrak{E}$ meſure la quantité de réfraction. Donc, s'il arrivoit qu'il fût $p - \alpha = s - \mathfrak{E}$, le rayon SG ſeroit parallele au rayon FQ, & les priſmes ne changeroient rien dans le lieu de l'objet. C'eſt dans ce cas que le grand Newton croyoit que la viſion ſeroit nette & délivrée des couleurs d'iris, mais M. Dollond a trouvé que cela n'arrive pas.

21. Si les deux priſmes ſont faits de la même matiere, de ſorte que $n = m$, alors, à cauſe de $r = q - \alpha$, la réfraction ſera déterminée par ces deux équations:

$$\text{cof}\, p = m \,\text{cof}\, q \quad \&\ \text{cof}\, s = m \,\text{cof}\,(q - \alpha + \mathfrak{E}),$$

d'où l'on trouve aiſément le cas où $p - \alpha = s - \mathfrak{E}$, & les objets paroiſſent dans leurs vrais lieux. Poſons pour cet effet $p - \alpha = s - \mathfrak{E} = \Phi$, de ſorte que $p = \alpha + \Phi$ & $s = \mathfrak{E} + \Phi$; &, puiſque la premiere équation donne

$$\text{cof}\, q = \frac{\text{cof}\, p}{m} \quad \&\ \text{ſin}\, q = \frac{\sqrt{(mm - \text{cof}\, p^2)}}{m},$$

en ſubſtituant ces valeurs dans l'autre équation, on aura

$$\text{cof}\,(\mathfrak{E} + \Phi) = \text{cof}\,(\alpha - \mathfrak{E})\,\text{cof}\,\alpha + \Phi + \text{ſin}\,(\alpha - \mathfrak{E})\sqrt{(mm - \text{cof}\,(\alpha + \Phi)^2)}.$$

Or,

Or, puiſque $\zeta + \Phi = (\alpha + \Phi) - (\alpha - \zeta)$, on a

$$\text{cof}(\zeta + \Phi) = \text{cof}(\alpha - \zeta)\,\text{cof}(\alpha + \Phi) + \text{ſin}(\alpha - \zeta)\,\text{ſin}(\alpha + \Phi);$$

donc $\text{ſin}(\alpha - \zeta)\,\text{ſin}(\alpha + \Phi) = \text{ſin}(\alpha - \zeta)\sqrt{(mm - \text{cof}(\alpha + \Phi)^2)}$, d'où il s'enſuit ou $\alpha - \zeta = o$, ou $mm = 1$.

22. La racine $mm = 1$ étant contraire à la réfraction, il faut abſolument que les deux angles α & ζ ſoient égaux entr'eux, & partant les côtés AC & BD paralleles entr'eux, pour que la réfraction ne change point le lieu des objets. Mais, quand la matiere des deux priſmes eſt différente, il n'eſt pas ſi aiſé de déterminer les cas où les objets ſont repréſentés dans leurs vrais lieux; & je remarque d'abord qu'on ne ſauroit aſſigner une telle proportion entre les angles α & ζ, afin que cette repréſentation trouve lieu pour toûs les objets. Il n'y aura jamais qu'un ſeul angle AQF $= p$, qui donne $p - \alpha = s - \zeta$; & dès qu'on regarde d'autres objets, dont les rayons font avec le priſme un plus grand ou un plus petit angle, leur lieu, vu par les priſmes, ſera différent de celui où ils ſe trouvent véritablement.

23. Pour développer donc les cas de cette apparition, poſons comme auparavant $p - \alpha = s - \zeta = \Phi$, ou bien $p = \alpha + \Phi$, & $s = \zeta + \Phi$, & nous aurons

$$\text{cof}\,q = \frac{\text{cof}(\alpha + \Phi)}{m}; \quad \text{donc ſin}\,q = \frac{\sqrt{(mm - \text{cof}(\alpha + \Phi)^2)}}{m}$$

$$\text{cof}(r + \zeta) = \frac{\text{cof}(\zeta + \Phi)}{n}; \text{ donc ſ}(r + \zeta) = \frac{\sqrt{(nn - \text{cof}(\beta + \Phi)^2)}}{n},$$

$$\& \quad m\,\text{cof}(q - \alpha) = n\,\text{cof}\,r, \text{ ou bien}$$

$$m\,\text{cof}\,\alpha\,\text{cof}\,q + m\,\text{ſin}\,\alpha\,\text{ſ}\,q = n\,\text{cof}\,\zeta\,\text{cof}(r + \zeta) + n\,\text{ſin}\,\zeta\,\text{ſ}(r + \zeta),$$

où ſubſtituant les premieres valeurs on arrive à cette équation:

$$\text{cof}\,\alpha\,\text{cof}(\alpha + \Phi) + \text{ſin}\,\alpha\sqrt{(mm - \text{cof}(\alpha + \Phi)^2)} = \text{cof}\,\zeta\,\text{cof}(\zeta + \Phi) + \text{ſin}\,\zeta\sqrt{(nn - \text{cof}(\zeta + \Phi)^2)},$$

d'où il s'agit de déterminer l'angle φ. Mais il eſt aſſez clair que cet angle ne ſauroit être réel, à moins que le rapport entre les angles α & ζ ne ſoit renfermé entre certaines limites.

24. Je ne vois aucune méthode pour réſoudre commodément cette équation, ſi ce n'eſt en tâtonnant pour chaque cas propoſé des nombres m & n: je remarque ſeulement, que prenant $\zeta = \alpha$, cette équation, ſe réduiſant à celle-ci:

$$V(mm - \text{cof}(\alpha + \varphi)^2) = V(nn - \text{cof}(\alpha + \varphi)^2),$$

ne ſauroit ſubſiſter, à moins qu'il ne fût $n = m$. Donc, lorſque les deux priſmes ſont compoſés de différentes matieres, il faut abſolument que les angles α & ζ ſoient inégaux. Mais il n'eſt pas ſi aiſé de voir lequel de ces deux angles doit être plus grand ou plus petit; cependant il ſemble que, ſi n eſt plus grand que m, l'angle ζ doit être pris plus petit que α: mais il ſe peut bien que cette maxime ne ſoit pas générale, ſurtout puiſque le maintien des objets dans leur vraie ſituation n'a lieu dans chaque cas que pour un ſeul angle φ.

25. Or, pour trouver les diſpoſitions des deux priſmes, afin que les objets, dont les rayons y tombent ſous un angle donné AQF $= p$, ſoient vus dans leur vrai lieu, les deux réfractions m & n étant données, on peut, outre l'angle p, encore prendre à volonté l'angle s, & de là déterminer les deux angles des priſmes α & ζ: ſous cette vue le probleme deviendra aiſé à réſoudre. Car, retenant dans le calcul les angles p & s, on aura $\alpha = p - \varphi$, & $\zeta = s - \varphi$; d'où notre équation prend cette forme:

$$\text{cof}\,p\,\text{cof}(p-\varphi) + \text{ſin}(p-\varphi)\,V(mm - \text{cof}\,p^2) = \text{cof}\,s\,\text{co}$$
$$(s-\varphi) + \text{ſin}(s-\varphi)\,V(nn - \text{cof}\,s^2),$$

& de là, en développant les ſinus & coſinus des angles $p-\varphi$ & $s-\varphi$, la tangente de l'angle φ s'en tire aiſément de cette ſorte:

$$\text{tag}\,\varphi = \frac{\text{cof}\,s^2 - \text{cof}\,p^2 + \text{ſin}\,s\,V(nn - \text{cof}\,s^2) - \text{ſin}\,p\,V(mm - \text{cof}\,p^2)}{\text{ſin}\,p\,\text{cof}\,p - \text{ſin}\,s\,\text{cof}\,s - \text{cof}\,p\,V(mm - \text{cof}\,p^2) + \text{cof}\,s\,V(nn - \text{cof}\,s^2)},$$

&

& enſuite les angles mêmes des deux priſmes:

$$\text{tag } \alpha = \frac{(\sqrt{(nn - \text{cof } s^2)} - \text{ſin } s)\ \text{ſin } (p - s)}{\text{cof } s\ \text{ſin}(p-s) - \sqrt{(mm - \text{cof } p^2)} + \text{cof}(p-s)\sqrt{(nn - \text{cof } s^2)}},$$

&

$$\text{tag } \epsilon = \frac{(\sqrt{(mm - \text{cof } p^2)} - \text{ſin } p)\ \text{ſin } (p - s)}{\text{cof } p\ \text{ſin}(p-s) + \sqrt{(nn - \text{cof } s^2)} - \text{cof}(p-s)\sqrt{(mm - \text{cof } p^2)}},$$

26. Pour la commodité du calcul il ſuffit d'avoir déterminé l'un des angles α & ϵ, puiſque $\alpha - \epsilon = p - s$, d'où l'on voit qu'on ne ſauroit prendre $p = s$, à moins qu'il ne ſoit $n = m$, puiſqu'alors les deux angles α & ϵ évanouiroient. Et de là il eſt auſſi clair que, pour peu que les deux réfractions m & n ſoient différentes, on doit établir entre les angles p & s une différence aſſez conſidérable pour empêcher que les angles α & ϵ ne deviennent trop petits. Outre cela il faut remarquer que, ſi l'un de ces angles devenoit négatif, on devroit alors renverſer le priſme, ou le mettre en ſens contraire à celui où il eſt repréſenté dans la figure.

27. L'autre queſtion ſur ce double priſme regarde la diffuſion de l'image, qu'indiquera le différentiel de l'angle s, en ſuppoſant variables les deux réfractions m & n, l'angle p demeurant conſtant. De là nous trouvons

$$o = \text{d}m\ \text{cof } q - m\,\text{d}q\ \text{ſin } q,\ \text{d}m\ \text{cof}(q-\alpha) - m\,\text{d}q\ \text{ſin}(q-\alpha) = \text{d}n\ \text{cof } r - n\,\text{d}r\ \text{ſin } r,$$

$$\&\quad \text{d}n\ \text{cof}(r + \epsilon) - n\,\text{d}r\ \text{ſin}(r + \epsilon) = -\,\text{d}s\ \text{ſin } s,$$

où la premiere donne $m\,\text{d}q = \frac{\text{d}m\ \text{cof } q}{\text{ſin } q}$, laquelle valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde, produit

$$\text{d}m\ \text{cof}(q-\alpha) - \frac{\text{d}m\ \text{cof } q\ \text{ſ}(q-\alpha)}{\text{ſin } q} = \frac{\text{d}m\ \text{ſ}\alpha}{\text{ſin } q} = \text{d}n\ \text{cof } r - n\,\text{d}r\ \text{ſ}r,$$

donc

donc $n\,dr = \frac{dn\ \text{cof}\ r}{\text{fin}\ r} - \frac{dm\ \text{fin}\ \alpha}{\text{fin}\ q\ \text{fin}\ r}$, d'où la troiſieme équation devient

$$-\frac{dn\ \text{fin}\ \mathfrak{E}}{\text{fin}\ r} + \frac{dm\ \text{fin}\ \alpha\ \text{fin}\ (r+\mathfrak{E})}{\text{fin}\ q\ \text{fin}\ r} = -ds\ \text{fin}\ s;$$

par conſéquent $ds = \frac{-dm\ \text{fin}\ \alpha\ \text{fin}\ (r+\mathfrak{E})}{\text{fin}\ q\ \text{fin}\ r\ \text{fin}\ s} + \frac{dn\ \text{fin}\ \mathfrak{E}}{\text{fin}\ r\ \text{fin}\ s}$.

28. Ici l'angle $s - ds$ répond aux rayons rouges, & l'angle $s + ds$ aux rayons violets, de ſorte que le point lumineux paroitra étendu par un angle, qui eſt

$$\frac{2\,dn\ \text{fin}\ \mathfrak{E}}{\text{fin}\ r\ \text{f}\ s} - \frac{2\,dm\ \text{fin}\ \alpha\ \text{fin}\ (r+\mathfrak{E})}{\text{f}\ q\ \text{f}\ r\ \text{f}\ s}.$$

Cette diffuſion évanouira donc, quand cette égalité aura lieu:

$$\frac{dn\ \text{fin}\ \mathfrak{E}}{\text{fin}\ (r+\mathfrak{E})} = \frac{dm\ \text{fin}\ \alpha}{\text{fin}\ q},$$

& réciproquement, quand cela arrive, on en pourra conclure le rapport entre les différentiels dm & dn. Car on aura

$$dm : dn = \frac{\text{fin}\ q}{\text{fin}\ \alpha} : \frac{\text{f}\ (r+\mathfrak{E})}{\text{f}\,\mathfrak{E}} = \frac{\text{f CQR}}{\text{f QAR}} : \frac{\text{f RSD}}{\text{f RBS}},$$

ou bien $dm : dn = \frac{AR}{QR} : \frac{BR}{RS} = AR \cdot RS : BR \cdot QR.$

29. J'ai déjà remarqué que les rayons ne ſauroient paſſer d'un priſme dans l'autre, à moins que les formules $m\ \text{cof}\ (q-\alpha)$ & $n\ \text{cof}\ r$ ne fuſſent moindres que l'unité. Poſons donc:

$$m\ \text{cof}\ (q-\alpha) = n\ \text{cof}\ r = \text{cof}\ \Phi,$$

& déterminons par ce nouvel angle Φ les angles q & $r + \mathfrak{E}$ de cette ſorte:

$$\text{cof}(q-\alpha) = \frac{\text{cof}\,\Phi}{m}, \text{ donc cof}\,q = \frac{\text{cof}\,\alpha\,\text{cof}\,\Phi - \text{fin}\,\alpha\sqrt{(mm-\text{cof}\,\Phi^2)}}{m},$$

$$\text{fin}(q-\alpha) = \frac{\sqrt{(mm-\text{cof}\,\Phi^2)}}{m}, \text{ fin}\,q = \frac{\text{fin}\,\alpha\,\text{cof}\,\Phi + \text{cof}\,\alpha\sqrt{(mm-\text{cof}\,\Phi^2)}}{m},$$

$$\text{cof}\,r = \frac{\text{cof}\,\Phi}{n}, \text{ donc cof}(r+\mathcal{E}) = \frac{\text{cof}\,\mathcal{E}\,\text{cof}\,\Phi - \text{fin}\,\mathcal{E}\sqrt{(nn-\text{cof}\,\Phi^2)}}{n},$$

$$\text{fin}\,r = \frac{\sqrt{(nn-\text{cof}\,\Phi^2)}}{n}, \text{ fin}(r+\mathcal{E}) = \frac{\text{fin}\,\mathcal{E}\,\text{cof}\,\Phi + \text{cof}\,\mathcal{E}\sqrt{(nn-\text{cof}\,\Phi^2)}}{n};$$

d'où nous trouvons les angles p & s déterminés ainſi:

$$\text{cof}\,p = \text{cof}\,\alpha\,\text{cof}\,\Phi - \text{fin}\,\alpha\sqrt{(mm-\text{cof}\,\Phi^2)}, \quad \& \quad \text{cof}\,s = \text{cof}\,\mathcal{E}\,\text{cof}\,\Phi - \text{fin}\,\mathcal{E}\sqrt{(nn-\text{cof}\,\Phi^2)}.$$

Donc, prenant l'angle Φ à volonté, on connoitra tous les paſſages des rayons par nos deux priſmes.

30. Mais, afin que les couleurs d'iris évanouiſſent, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{n\,dn\,\text{fin}\,\mathcal{E}}{\text{fin}\,\mathcal{E}\,\text{cof}\,\Phi + \text{cof}\,\mathcal{E}\sqrt{(nn-\text{cof}\,\Phi^2)}} = \frac{m\,dm\,\text{fin}\,\alpha}{\text{fin}\,\alpha\,\text{cof}\,\Phi + \text{cof}\,\alpha\sqrt{(mm-\text{cof}\,\Phi^2)}};$$

d'où l'on voit que cette propriété ne ſauroit avoir lieu pour tous les angles Φ; mais ſi elle s'obſerve dans deux priſmes pour un certain angle Φ, ou pour un certain angle d'incidence p, toutes les autres repréſentations, qui ſe font ſous d'autres angles, n'auront plus cette prérogative, & les couleurs d'iris ne manqueront pas d'y paroitre, quoiqu'elles ne ſoient peut-être pas fort ſenſibles. Il ſe trouve donc ici la même circonſtance, que j'ai déjà remarquée dans le cas où les rayons rompus doivent devenir paralleles aux incidens.

31. Il ne ſemble pas que M. Dollond ait fait attention à cette circonſtance, puiſqu'il parle de deux tels priſmes compoſés de différentes eſpeces de verre, qui repréſentent les objets délivrés des couleurs

leurs d'iris, tout comme ſi cette propriété convenoit à tous les angles d'incidence; & des angles α & ζ de ces deux priſmes il conclut que $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha}$, ce qui n'eſt pourtant vrai que lorſque les angles q & $r + \zeta$ ſont égaux. Auſſi M. Clairaut, qui a traité cette même queſtion dans les *Mém. de l'Acad. R. des Sc. de Paris* pour l'an 1756, parvient-il à cette même formule $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha}$, ayant ſuppoſé les angles α & ζ très petits pour ſe ſervir d'approximations, de ſorte qu'il ne la donne que comme approchante de la vérité: mais je ne vois aucune néceſſité de recourir à des approximations, quand on peut parvenir à une ſolution parfaite. C'eſt cependant là-deſſus que M. Dollond fonde principalement ſon ſentiment ſur la réfraction des diverſes eſpeces de verre.

32. Or, non ſeulement la concluſion de M. Dollond me paroit ſuſpecte, mais il me ſemble auſſi que les expériences d'où il l'a tirée, ſont peu exactes. D'abord je remarque, que les petits angles qu'il donne à ſes priſmes ſont peu propres à découvrir le cas où la diverſe réfrangibilité des rayons eſt détruite: car, ayant trouvé $ds = \frac{dn \sin \zeta}{fr\, fs} - \frac{dm \sin \alpha\, f(r + \zeta)}{\sin q \sin r \sin s}$, il eſt clair que, ſi l'on prenoit les angles α & ζ infiniment petits, l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons deviendroit inſenſible, quelque grand qu'il fût d'ailleurs en ſoi-même. Il vaudroit donc bien mieux faire ces angles auſſi grands qu'il ſeroit poſſible.

33. La petiteſſe des angles α & ζ doit donc rendre fort douteuſes les expériences: &, à moins que leur rapport ne s'écarte énormément de la vérité, la diffuſion cauſée dans l'image ſera abſolument inſenſible. On conviendra aiſément qu'une telle diffuſion doit être aſſez conſidérable, avant qu'on la puiſſe diſtinguer par les ſens; de ſorte que tant qu'elle n'excede point certaines limites, les objets nous paroi-

tront

tront auſſi nets, que ſi la diverſe réfrangibilité des rayons étoit parfaitement détruite. Outre cela, puiſque l'un des priſmes étoit de crownglaſs, où les rayons rouges ſont interceptés en grande partie, la diffuſion en étoit encore diminuée davantage, & partant rendue moins ſenſible, ſans qu'on en pût conclure un changement dans la nature de la réfraction.

34. Donc, quand M. Dollond prétend avoir trouvé une telle diſpoſition de deux priſmes, l'un de flintglaſs, l'autre de crownglaſs, à travers leſquels il ait vu les objets ſans aucune confuſion, il s'en faut beaucoup que cette diſpoſition ſoit préciſément celle qui produiroit exactement ce même effet; il ſe pourroit même qu'elle s'en écartât très conſidérablement. Nous en avons déjà une preuve bien remarquable en ce que M. Dollond ne s'eſt pas apperçu, que cette netteté de l'image ne ſauroit convenir qu'à un ſeul angle d'incidence; il faut donc bien que la confuſion produite ſous des angles différens ait été imperceptible. Mais, après ces remarques générales, je m'en vais examiner plus en détail l'expérience de M. Dollond, pour pouvoir mieux juger de la concluſion qu'il en tire.

35. Soit donc le premier priſme A de crownglaſs, & la réfraction moyenne $m = 1,53$; l'autre priſme B de flintglaſs, & la réfraction moyenne $n = 1,583$. Enſuite, les angles α & $\mathfrak{G}$ étoient tels, ſelon M. Dollond, que leurs ſinus tenoient à peu près la raiſon 3 : 2. Je ſuppoſerai donc, puiſque ces angles étoient petits, $\alpha = 29°$ & $\mathfrak{G} = 14°$, où l'on comprend aiſément qu'une différence d'un ou de deux degrés produiroit les mêmes phénomenes. Maintenant, quand il dit que par ces deux priſmes les objets lui ont paru ſans couleur, il faut que cette égalité $\frac{dn \, \text{ſ} \, \mathfrak{G}}{\text{ſ}(r + \mathfrak{G})} = \frac{dm \, \text{ſin} \, \alpha}{\text{ſ} \, q}$ ait eu à peu près lieu pour quelque angle Φ, en prenant $\text{coſ}(q - \alpha) \frac{\text{coſ} \, \Phi}{m}$ & $\text{coſ} \, r = \frac{\text{coſ} \, \Phi}{n}$, puiſqu'il eſt impoſſible qu'elle ait eu lieu pour

tous les angles, comme M. Dollond ſemble l'inſinuer. Je donnerai donc à l'angle Φ quelques diverſes valeurs, pour voir combien le rapport entre dm & dn en ſera changé.

36. Soit d'abord l'angle $\Phi = 90°$; & nous aurons

$q - \alpha = 90°$; $q = 111°$; & $dn \operatorname{tag} \mathfrak{E} = dm \operatorname{tag} \alpha$,

$r = 90°$; $r + \mathfrak{E} = 104°$; donc $\frac{dm}{dn} = \frac{24}{33}\frac{93}{88}\frac{28}{84}$,

& partant $\frac{dm}{dn} < \frac{2}{3}$.

Soit maintenant $\Phi = 0$, & nous aurons

$q - \alpha = 49°,11'$; $q = 70°,11'$; $26733\,dn = 38137\,dm$,

$r = 50°,49'$; $r \pm \mathfrak{E} = 64°,49$; ou $\frac{dm}{dn} = 0,70098$;

cette valeur eſt plus grande que $\frac{2}{3}$.

Soit auſſi $\Phi = 180°$, & nous aurons

$q - \alpha = 130°,49'$; $q = 151°,49'$;
$r = 129,11$; $r + \mathfrak{E} = 143,11$; d'où $\frac{dm}{dn} = 0,53204$,

laquelle valeur ſurpaſſe à peine $\frac{1}{2}$.

37. Voilà donc une aſſez grande incertitude ſur le rapport des variations $\frac{dm}{dn}$, contenue entre les limites 0,532 & 0,701, ſur laquelle il eſt impoſſible de ſe décider, à moins qu'on ne ſache ſous quel angle d'incidence le phénomene en queſtion eſt arrivé. Mais ſi, au jugement des yeux, il eſt arrivé ſous tous les angles, il s'enſuit que cette expérience ne ſuffit pas pour décider, ſi le rapport $\frac{dm}{dn}$ eſt $= \frac{53}{100}$, ou s'il eſt $= \frac{70}{100}$; &, dans une ſi grande incertitude, il eſt très certain que ces ſortes d'expériences ne ſont en aucune maniere pro-

propres à nous éclaircir ſur le véritable rapport entre les valeurs différentielles dm & dn. Cependant, puiſque mon hypotheſe donne ce rapport $\frac{dm}{dn} = \frac{8}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{4}{0}$, il ſemble pourtant que ces expériences y portent quelque atteinte; mais il faudroit toujours des expériences plus déciſives avant que de la rejetter.

38. Le bon effet des objectifs compoſés de ces deux eſpeces de verre prouve encore moins contre la loi de réfraction que j'ai établie; & je crois qu'il en faut chercher la raiſon dans des circonſtances tout à fait différentes. Or d'abord, je remarque que le ſeul verre de crownglaſs y contribue déjà quelque choſe, en interceptant une bonne partie des rayons rouges qui pourroient gâter l'image. M. Dollond lui-même dit avoir obſervé qu'un objectif ſimple, fait de cette eſpece de verre, produit un meilleur effet, qu'un autre ſemblable, fait d'un verre très clair; ce dont la raiſon eſt évidemment celle que je viens d'indiquer, puiſque tous les verres colorés produiſent le même effet.

39. Enſuite, la principale raiſon doit être cherchée en ce que M. Dollond, en proportionnant les deux verres dont ſes objectifs ſont compoſés, a heureuſement détruit la confuſion cauſée par la ſphéricité & l'ouverture du verre: j'ai fait voir ailleurs, que c'eſt ordinairement la ſource des plus grands défauts des lunettes, & dès qu'on y remédie, on diminue auſſi très conſidérablement l'autre défaut, qu'on attribue à la diverſe réfrangibilité des rayons. Il eſt même poſſible de rendre ce défaut inſenſible par un bon arrangement des verres oculaires, comme je l'ai expliqué autrefois fort au long. Ainſi, à mon avis, le plus grand mérite des lunettes de M. Dollond ſe trouve conjointement dans l'objectif compoſé, entant que le défaut de la ſphéricité y eſt corrigé, & dans la diſpoſition des verres oculaires: je crois même que, s'il vouloit compoſer ſes objectifs de deux verres de la même eſpece, il en éprouveroit le même effet.

40. Mais au reſte il ſeroit très facile de s'aſſurer par l'expérience de cette propriété prétendue des nouveaux objectifs. Cela ſe pratiqueroit aiſément dans une chambre obſcure, y ayant fixé dans un volet un tel objectif compoſé; on n'auroit qu'à lui oppoſer hors de la chambre, tantôt un morceau de drap écarlate, tantôt un autre violet, & à meſurer enſuite dans la chambre la diſtance derriere le verre, où l'une & l'autre image ſe repréſenteroit le plus diſtinctement. Pour en juger mieux, on traverſe les objets par un fil noir, dont l'image doit devenir diſtincte. En s'y prenant de cette maniere, je doute fort que les deux diſtances ſe trouvent égales, & ſelon toute apparence la différence ſera auſſi grande que dans les objectifs ordinaires.

41. Je finirai par une remarque, qui n'eſt pas peu importante dans le ſujet préſent. M. Dollond, en faiſant ſes expériences avec les deux priſmes joints enſemble, s'étoit attendu que les couleurs d'iris diſparoitroient là, où les rayons tranſmis ſeroient paralleles aux rayons incidens. Il croyoit que c'étoit une ſuite néceſſaire de l'hypotheſe de Newton, en vertu de laquelle on devroit trouver $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$. Mais on s'appercevra aiſément, que cette conſéquence n'a aucun fondement. La deſtruction des couleurs d'iris exige cette condition $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \mathcal{E} \sin q}{\sin \alpha \sin (r+\mathcal{E})}$: or le paralléliſme des rayons tranſmis avec les incidens demande qu'il ſoit $p - \alpha = s - \mathcal{E}$, ou bien, poſant $p - \alpha = s - \mathcal{E} = \Phi$, il faut qu'il ſoit:

$$\cos \alpha \cos (\alpha + \Phi) + \sin \alpha \sqrt{(mm - \cos (\alpha + \Phi)^2)} = \cos \mathcal{E} \cos (\mathcal{E} + \Phi) + \sin \mathcal{E} \sqrt{(nn - \cos (\mathcal{E} + \Phi)^2)}.$$

Cette équation devroit donc être d'accord avec la précédente, ſi l'on poſoit $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$.

42. Or nous avons vu, qu'en posant $p = \alpha + \Phi$ & $s = \beta + \Phi$, il s'ensuit $\sin q = \frac{\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)}}{m}$, & $\sin(r + \beta) = \frac{\sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)}}{n}$, & substituant ces valeurs, notre équation différentielle devient:

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin\beta \sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)}}{m \sin\alpha \sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)}}.$$

Pour l'autre équation supposons:

$$\cos\alpha \cos(\alpha + \Phi) + \sin\alpha \sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)} = v,$$

de sorte que

$$\cos\beta \cos(\beta + \Phi) + \sin\beta \sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)} = v,$$

& de là nous tirons:

$$\cos(\alpha + \Phi) = v\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{(nm - vv)} = \cos\alpha\cos\Phi - \sin\alpha\sin\Phi,$$
$$\cos(\beta + \Phi) = v\cos\beta + \sin\beta\sqrt{(nn - vv)} = \cos\beta\cos\Phi - \sin\beta\sin\Phi.$$

43. Ces deux formules nous fourniſſent aiſément les angles α & β, dont les tangentes seront exprimées ainsi:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\Phi - v}{\sin\Phi + \sqrt{(mm - vv)}}, \text{ & } \frac{\sin\mathfrak{G}}{\cos\mathfrak{G}} = \frac{\cos\Phi - v}{\sin\Phi + \sqrt{(nn - vv)}};$$

mais les formules irrationelles seront:

$$\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)} = v\sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{(mm - vv)},$$
$$\sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)} = v\sin\beta - \cos\beta\sqrt{(nn - vv)},$$

d'où l'équation différentielle provient:

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin\beta (v \sin\alpha - \cos\alpha \sqrt{(mm - vv)})}{m \sin\alpha (v \sin\beta - \cos\beta \sqrt{(nn - vv)})};$$

où les valeurs trouvées ci-dessus étant substituées donnent

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n}{m} \cdot \frac{mm - v \cos \Phi + \sin \Phi \sqrt{(mm - vv)}}{nn - v \cos \Phi + \sin \Phi \sqrt{(nn - vv)}}.$$

44. Cette équation ne ſe trouve dans aucune liaiſon avec celle-ci: $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$, que Newton a cru être la véritable: & il eſt à préſent très clair que, quand même cette loi ſeroit la véritable, il ne s'enſuivroit nullement que la deſtruction des couleurs d'iris fût toujours combinée avec le cas où les rayons tranſmis ſont paralleles aux incidens. On voit plutôt que ces deux cas n'ont aucune connexion entr'eux, quelle que ſoit la véritable loi de la réfraction des rayons différemment réfrangibles: & la Loi Newtonienne pourroit être vraie, nonobſtant la diverſité de ces deux cas, que M. Dollond ſemble avoir cru néceſſairement liés entr'eux.

SUR LES

AVANTAGES

DES

VERRES OBJECTIFS COMPOSÉS

DE DEUX VERRES SIMPLES.

PAR M. L. EULER.

I.

Quand je conſidere bien la conſtruction des verres objectifs formés de deux eſpeces différentes de verre pour détruire, tant la diſperſion des couleurs, que la confuſion cauſée par l'ouverture, j'en trouve l'exécution aſſujettie à tant de difficultés, qu'on n'y ſauroit preſque jamais réuſſir; & quand même on réuſſiroit, je doute fort que les avantages fuſſent ſi importans, qu'on s'imagine. Je poſe en fait, qu'on ait découvert deux eſpeces de verre, à l'une deſquelles convienne la raiſon de réfraction 31 : 20 & à l'autre 3 : 2, quoique je doute fort que la différence puiſſe aller ſi loin: & la figure ci-jointe repréſente un tel objectif compoſé, dont la diſtance de foyer ſeroit de 100 pouces. Le premier verre AB eſt également convexe des deux côtés, le rayon de la convexité étant d'un pouce & demi; l'autre CD eſt concave des deux côtés, le rayon de ſa face d'avant étant auſſi d'un pouce & demi, & de celle de derriere de $1\frac{7}{15}$ pouce. Le premier AB qu'on doit tourner vers l'objet, eſt fait de l'eſpece de verre qui a la moindre réfraction, & le concave CD de l'autre eſpece à laquelle convient la plus grande réfraction. Pl. VIII. Fig. 3.

2. Le foyer du verre convexe étant employé tout ſeul, ne tomberoit qu'à la diſtance d'1 ½ pouce environ; mais l'autre verre concave, dont la diſtance négative de foyer eſt à peu près la même, l'étend à 100 pouces. Or il faut bien remarquer, que tous les défauts qui pourroient ſe trouver dans ces verres, ſont multipliés dans la même raiſon, & deviennent par conſéquent 75 fois plus ſenſibles. Quoique l'art de polir les verres ſoit porté à un aſſez haut degré de perfection, il eſt pourtant impoſſible d'y éviter tous les défauts, & l'on ſe contente, pourvu que ces erreurs ne ſoient pas trop ſenſibles. Mais, lorſqu'elles ſont rendues 75 fois plus grandes, on comprend aiſément que, quelques petites qu'elles ſoient en elles-mêmes, leur effet doit devenir par cette multiplication tout à fait inſupportable. Auſſi peut-on bien ſoutenir, que même le plus habile artiſte, qui s'y appliqueroit avec tous les ſoins imaginables, ne réuſſiroit peut-être pas une ſeule fois dans cent eſſais & plus; & alors il s'en faudra encore beaucoup que cet ouvrage réponde parfaitement à la Théorie.

3. Mais ſuppoſons que l'Artiſte ait parfaitement bien réuſſi: cependant les avantages ne ſeront pas ſi conſidérables qu'on auroit lieu de s'y attendre. La petiteſſe des ſpheres, d'où les faces de ces verres ſont priſes, permettra à peine une ouverture d'un pouce en diametre, & partant cet objectif ne ſauroit groſſir les objets que 30 fois tout au plus; à cet égard il ne ſeroit donc pas préférable à un objectif ordinaire de 4 pieds de foyer: & il paroit encore fort douteux, ſi l'avantage, que cet objectif eſt délivré de la diſperſion des couleurs, compenſe ſuffiſamment l'augmentation dans la diſtance du foyer. Il eſt bien vrai qu'en augmentant les meſures de ces objectifs, les avantages ſur les ordinaires deviennent plus conſidérables, puiſqu'un tel objectif de 500 pouces de foyer admettroit une ouverture de 5 pouces en diametre, laquelle répond à un objectif ſimple du même foyer. Mais l'exécution rencontrera d'autant plus d'obſtacles, plus la diſtance de foyer doit être grande.

4. Par

4. Par ces raiſons j'oſe aſſurer, que les objectifs de M. Dollond, dont le dernier Volume des Tranſactions parle avec les plus grands éloges, ne ſont pas conſtruits ſelon les regles que je viens d'établir & de démontrer. On y vante en particulier la grande ouverture que ces objectifs admettent, ce qui ne ſauroit convenir à la grande courbure des faces. Au reſte, de la maniere équivoque & myſtérieure dont M. Dollond parle de cette découverte, il ſemble qu'il a établi une beaucoup plus grande inégalité entre la convexité & la concavité de ſes deux verres. Après avoir dit, que les réfractions de ſes deux eſpeces de verre different comme 2 à 3, ce qui ne ſauroit avoir aucun ſens intelligible, il ajoute enſuite, que les foyers de ſes deux verres ſuivent la même proportion; de ſorte que, ſi le foyer du verre convexe étoit à deux pieds, celui du concave ſeroit de trois pieds, & partant le foyer de ces deux verres combinés tomberoit à la diſtance de 6 pieds.

5. De là je tire cette facheuſe conſéquence, que ſi ma Théorie eſt vraie, il eſt abſolument impoſſible que ces objectifs compoſés de M. Dollond ayent été délivrés de la diſperſion des couleurs, comme M. Short le témoigne très poſitivement. Je ne voudrois pas auſſi douter de la juſteſſe des expériences, ſur leſquelles ce grand témoignage eſt fondé, ſi je voyois la moindre poſſibilité de concilier ce prétendu fait avec aucune hypotheſe ſur la réfraction, quelque bizarre qu'on l'imagine: & outre cela, les expériences mêmes de M. Dollond, par leſquelles il a comparé la réfrangibilité & la diſperſion des couleurs cauſée par ſes deux eſpeces de verre, ne contiennent rien qui ne ſoit très bien d'accord avec ma Théorie. Cette conſidération m'a bien embarraſſé, & il m'eſt auſſi difficile de révoquer en doute des témoignages ſi ſolennels, que d'abandonner une Théorie, qui me paroit parfaitement bien fondée, pour embraſſer un ſentiment auſſi contraire à toutes les loix établies dans la Nature, qu'il eſt bizarre & révoltant. Dans cette ſituation, on ne me blâmera pas d'avoir fait tant d'efforts, peut-être inutiles, pour concilier tout ce qu'on nous annonce ſur les objectifs de M. Dollond, avec les principes qui me paroiſſent très ſolidement établis.

6. D'abord je tombe d'accord ſur un article, qui me paroit le plus eſſentiel, & je crois que les deux verres que M. Dollond a joints enſemble, ont été ſi heureuſement travaillés, qu'ils n'ont produit aucune confuſion rélative à l'ouverture des verres, de ſorte qu'ils en ont pu recevoir une auſſi grande, que leur grandeur le permettoit. Or la confuſion cauſée par une trop grande ouverture eſt un défaut ſi conſidérable dans les objectifs ordinaires, qu'elle entraine toujours la diſperſion des couleurs. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à donner une trop grande ouverture à un objectif ordinaire d'une lunette, & l'on remarquera toujours, qu'avec la confuſion qui en réſulte proprement, le défaut des couleurs devient auſſi inſupportable, pendant qu'on n'avoit pas lieu de s'en plaindre, tant que l'ouverture étoit aſſez petite. Auſſi voyons-nous que les Aſtronomes, quand ils ſont incommodés par la diſperſion des couleurs, rétréciſſent l'ouverture de leurs objectifs avec un très bon ſuccès.

7. Cependant je ne nie pas que les deux défauts des objectifs ordinaires, ſavoir la confuſion de l'image & la diſperſion des couleurs, ne different très eſſentiellement; mais lorſque les rayons qui paſſent par les extrémités d'un objectif, repréſentent les images dans un autre lieu, que ceux qui paſſent par le milieu, la diverſe réfrangibilité des rayons dont les deux images ſont affectées, devient d'autant plus inſupportable. Tant que les images formées par les rayons qui paſſent par le milieu & les extrémités du verre, tombent à peu près au même lieu, l'oculaire a la propriété de redreſſer le défaut de la diverſe réfrangibilité des rayons, en les ramenant à la même direction. Or ce remede ne ſauroit plus avoir lieu, quand à cauſe d'une trop grande ouverture les images des objets ſont étendues par un trop grand eſpace, puiſqu'alors les diverſes couleurs deviennent trop divergentes, pour que l'oculaire les puiſſe ranger ſur une même direction.

8. Donc, dès qu'on eſt en état de procurer aux objectifs ce degré de perfection, que tous les rayons tranſmis par leur ouverture ſont réunis aux mêmes points, un tel objectif eſt non ſeulement déli-

vré

vré du défaut de la confuſion rélative à l'ouverture, mais auſſi la diſperſion des couleurs n'y ſera preſque plus ſenſible. Par cette raiſon, je ne doute nullement, que ce ne ſoit le cas des objectifs, que M. Dollond vient d'exécuter avec un ſi bon ſuccès; & je crois que les deux verres qu'il joint enſemble, ont cette propriété, que la confuſion de l'image en eſt parfaitement anéantie. Il ſuffiſoit de réuſſir à cet égard pour réduire preſque à rien auſſi la diſperſion des diverſes couleurs, ſans que les deux verres remédient actuellement à la diverſe réfrangibilité des rayons. La diverſité du verre qu'il y emploie, peut bien diminuer tant ſoit peu la diverſe réfrangibilité; mais je crois que s'il faiſoit ſes deux verres de la même matiere, il en retireroit preſque les mêmes avantages.

9, Je mets donc le grand mérite de cette importante découverte de M. Dollond uniquement dans l'adreſſe avec laquelle il a ſu travailler deux verres en ſorte, que l'un détruiſît exactement la confuſion que l'autre produiroit par ſon ouverture, ſans que la diverſe réfrangibilité y entre en conſidération. Je crois même que cette découverte eſt beaucoup plus importante, que ſi l'on réuſſiſſoit un jour à compoſer des objectifs de deux différentes eſpeces de verre, qui fuſſent entierement exempts de l'un & de l'autre défaut. La grande courbure qu'on ſeroit obligé de donner aux faces de ces verres, mettroit toujours des bornes trop étroites à leur ouverture: & ceux de M. Dollond mériteroient toujours la préférence. Donc, tant s'en faut que je vouluſſe les dépouiller des grands éloges, qu'on en a fait, que je les regarde plutôt comme la plus excellente découverte qu'on puiſſe faire dans la Dioptrique.

10. J'abandonnerai donc ici l'idée que j'ai eue autrefois de remédier à la différente réfrangibilité des rayons, en employant diverſes matieres réfringentes; & je bornerai à préſent mes recherches à réduire à rien la ſeule confuſion cauſée par l'ouverture des verres, puiſque la diſperſion des couleurs devient en même tems aſſez inſenſible. Or je remarque qu'on peut arriver à ce but, en n'employant

qu'une ſeule eſpece de verre. & qu'il eſt toujours poſſible de conſtruire deux verres en ſorte, qu'étant joints ils anéantiſſent tout à fait la confuſion que cauſeroit d'ailleurs leur ouverture. Par ce moyen on obtiendra des objectifs auſſi excellens qu'on puiſſe ſouhaiter, où même le défaut de la diſperſion des couleurs n'eſt point à craindre; & comme il y a une infinité de manieres de former de tels verres objectifs, on aura la commodité d'en choiſir pour chaque cas celle qu'on jugera la plus convenable: on eſt auſſi le maître d'éviter les grandes courbures autant qu'on veut, pour rendre ces verres ſuſceptibles de la plus grande ouverture.

11. Je ne m'arrêterai pas au calcul aſſez ennuyeux, par lequel on détermine la diffuſion de l'image cauſée par l'ouverture, ayant déjà autrefois développé cette analyſe; & partant je me contenterai d'en rapporter la formule qui conduit à la ſolution de la queſtion que j'ai en vue. Je conſidere donc en général deux verres quelconques, AB & CD, que je regarde comme convexes des deux côtés, & je poſe les rayons des faces $AaB = a$; $AbB = b$; $CcD = c$; $CdD = d$. Soit enſuite la raiſon de réfraction de l'air dans le verre comme $m : 1$, qu'on ſuppoſe communément comme 31 à 20, de ſorte que $m = \frac{31}{20}$. Ces deux verres étant joints enſemble, que leur foyer commun tombe en K, de ſorte que la diſtance derriere les verres ſoit $dK = k$, que je regarde comme donnée; & il s'agit de déterminer l'eſpece de ces deux verres, ou bien les rayons a, b, c, d en ſorte, que tous les rayons ſe réuniſſent au même point K, quelque grande que ſoit l'ouverture; je ne parle que des rayons d'une certaine eſpece, ſans avoir égard à la diverſe réfraction des rayons colorés.

Pl. VIII. Fig. 4.

12. Pour cet effet, je forme d'abord les deux quantités $p = \frac{1}{\lambda}(\lambda - 1)k$ & $q = -(\lambda - 1)k$, où λ marque un nombre pris à volonté, & de là j'exprime les quatre rayons en ſorte qu'il ſoit:

$a =$

$$a = \frac{m-1}{\mu} p;\ b = \frac{m-1}{1-\mu} p;\ c = \frac{m-1}{\nu} q;\ d = \frac{m-1}{1-\nu} q,$$

où les nombres μ & ν doivent être déterminés par les formules ſuivantes:

$$\mu = \frac{m(2m+1)+my}{2(m+2)} \quad \nu = \frac{m(2m+1)-4\lambda(mm-1)+mz}{2(m+2)},$$

dont les nombres y & z doivent être pris en ſorte qu'ils ſatisfaſſent à cette équation:

$$zz = (4m-1)(\lambda^3-1) + 4(m-1)^2\lambda(\lambda-1) + \lambda^3 yy.$$

Ici il eſt évident, que les deux nombres λ & y peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils fourniſſent des valeurs réelles pour z: d'où réſulte une variété infinie dans les verres, qui ſeront tous également propres à notre deſſein.

13. A l'égard du nombre y, je remarque d'abord, qu'il eſt bon de le prendre en ſorte qu'il devienne $\mu = \frac{1}{2}$, afin que les deux faces du premier verre AB obtiennent la même figure; ce qui en facilite non ſeulement l'exécution, mais leurs faces deviendront auſſi peu courbées qu'il eſt poſſible; ce qui eſt un grand avantage pour procurer une plus grande ouverture. Poſons donc $\mu = \frac{1}{2}$ pour avoir $a = b = 2(m-1)p$, & puiſque $m+2 = 2mm+m+my$, nous aurons $y = \frac{-2(mm-1)}{m}$.

14. Suppoſons maintenant $m = 1\frac{1}{20} = 1,55$, & ayant pris $p = \frac{1}{\lambda}(\lambda-1)k$, & $q = -(\lambda-1)k$, nous aurons d'abord pour les rayons des faces:

$$a = b = 1\frac{1}{20}p;\quad c = \frac{0,55}{\nu}q \quad \& \quad d = \frac{0,55}{1-\nu}q.$$

En-

Enſuite on trouve :

$$\nu = \underset{9,9518573}{0,895070} - \underset{9,8977046}{0,790141\lambda} + \underset{9,3390734}{0,218310\,z},$$

& pour la valeur de z cette équation :

$$zz = 8,474933\,\lambda^3 + 1,21\,\lambda^2 - 1,21\,\lambda - 5,2;$$

où je remarque que le nombre λ doit être pris plus grand que 0,855, pour ne pas tomber dans le cas où z deviendroit imaginaire. Dans les autres cas on trouve toujours deux valeurs pour z, l'une affirmative, l'autre négative, dont il convient de prendre celle-ci, qui donne pour ν une valeur plus approchante de $\frac{1}{2}$, afin que les faces du verre de derriere ne deviennent pas trop courbes.

15. Pour mieux connoître toutes ces eſpeces de verres objectifs compoſés, je développerai les cas ſuivans :

λ	zz	$0,895070 - 0,790141\lambda$	$0,218310\,z$	ν
0,9	0,869327	+0,183943	0,203547	0,387490
1,0	3,274933	+0,104929	0,395070	0,499999
1,1	6,213236	+0,025915	0,544167	0,570082
1,2	9,735084	−0,053099	0,681150	0,628051
1,3	13,891326	−0,132113	0,813664	0,681551
1,4	18,732812	−0,211127	0,944876	0,733749
1,5	24,310391	−0,290141	1,076390	0,786249
1,6	30,674913	−0,369155	1,209108	0,839953
1,7	37,877228	−0,448169	1,343577	0,895408
1,8	45,968185	−0,527183	1,480137	0,952954
1,9	54,998634	−0,606197	1,619010	1,012813
2,0	65,019424	−0,685211	1,760334	1,075123
2,1	76,081405	−0,764225	1,904200	1,139975

2,2

2,2	88,235427	−0,843239	2,050666	1,207429
2,3	101,532339	−0,922253	2,199761	1,277508
2,4	116,022991	−1,001267	2,351502	1,350235
2,5	131,758232	−1,080281	2,505891	1,425610
2,6	148,788912	−1,159295	2,662923	1,503628
2,7	167,165880	−1,238309	2,822586	1,584277
2,8	186,939986	−1,317323	2,984863	1,667540
2,9	208,162080	−1,396337	3,149737	1,753400
3,0	232,432698	−1,475351	3,328300	1,852949

16. Ayant trouvé ces nombres v, j'en ai tiré les déterminations ſuivantes pour les rayons des quatre faces de nos deux verres.

λ	$a = b$	c	d
0,9	$-0,122222k$	$+0,141939k$	$+0,089794k$
1,0	$0,000000k$	$0,000000k$	$0,000000k$
1,1	$+0,100000k$	$-0,096455k$	$-0,127931k$
1,2	$+0,183333k$	$-0,175145k$	$-0,295732k$
1,3	$+0,253846k$	$-0,242095k$	$-0,518136k$
1,4	$+0,314286k$	$-0,299830k$	$-0,826294k$
1,5	$+0,366666k$	$-0,349762k$	$-1,286544k$
1,6	$+0,412500k$	$-0,392879k$	$-2,061895k$
1,7	$+0,452941k$	$-0,429972k$	$-3,680970k$
1,8	$+0,488888k$	$-0,461722k$	$-9,352550k$

Je ne continue pas cette table, parce que les valeurs du rayon d deviendroient trop grandes, & que le verre de derriere ſe changeroit en ménifque; or on ſait que l'uſage des ménifques, auſſi bien que leur exécution, eſt aſſujettie à de grandes difficultés.

17. Nonobſtant cela, nous avons un aſſez grand nombre d'eſpeces différentes de tels objectifs compoſés, qui ſont tous également doués de cette excellente propriété, que, quelque grande que

ſoit leur ouverture, il n'en réſulte aucune confuſion. La diverſité de ces eſpeces dépend du rapport entre les rayons des quatre faces; donc, pour la mieux mettre devant les yeux, poſons pour le premier verre AB les rayons $a = b = 1$, & ceux de l'autre verre ſeront:

c	d
−0,964552	−1,279314
−0,955336	−1,613124
−0,953707	−2,041144
−0,954005	−2,629118
−0,953896	−3,508756
−0,952434	−4,998532
−0,949288	−8,126817
−0,944432	−19,130213

d'où l'on voit que, combinant avec un verre également convexe des deux côtés, dont le rayon ſoit $= 1$, un verre concave des deux côtés, dont le rayon de l'une de ſes faces eſt $= 0{,}954$, on ſatisfera à la condition requiſe, pourvu que le rayon de l'autre face concave ſe trouve entre les limites 2 & $3\frac{1}{2}$; ce qui eſt un cas très avantageux pour la pratique.

18. Il s'agit donc de choiſir, parmi ces eſpeces, la plus convenable pour la pratique; & d'abord il faut donner l'excluſion à celles qui renferment de trop petits rayons, pour ne pas tomber dans l'embaras mentionné ci-deſſus, où les moindres défauts dans la figure ſont de la plus grande conſéquence; outre que ces verres n'admettent qu'une ouverture fort bornée. Par cette raiſon, je rejetterai les eſpeces où λ eſt plus petit que 1,4, &, puiſque cette eſpece a cet avantage, comme nous venons de voir, que la premiere face du ſecond verre ne ſubit preſque aucun changement, quoiqu'on change la valeur du nombre λ, cette eſpece eſt ſans doute la plus propre pour la pratique. Enſuite, cette eſpece eſt ſuſceptible d'une aſſez grande ouverture, quand même on n'y admettroit que des arcs de 20 degrés; alors le diametre de l'ouverture pourroit être pris la dixieme partie de la diſtance de foyer k, de ſorte qu'un tel verre de 10 pieds de foyer pourroit avoir l'ouverture d'un pied, laquelle ſuffit pour groſſir les objets 400 fois en diametre, moyennant un oculaire de $\frac{1}{40}$ pieds, ou de $\frac{3}{10}$ pouce.

19. Or de trop petits oculaires ſont auſſi ſujets à des incommodités, ſurtout dans les grandes multiplications. Donc, ſi dans le

cas

cas précédent on ne vouloit employer qu'un oculaire d'un demi-pouce environ de foyer, pour groſſir ſeulement 200 fois, une ouverture de 6 pouces ſeroit ſuffiſante; &, puiſqu'elle n'embraſſeroit que des arcs de 10°, on auroit encore moins à craindre quelque confuſion. Car il faut ſe ſouvenir, que le calcul par lequel j'ai déterminé la confuſion, eſt fondé ſur une approximation qui s'écarte d'autant moins de la vérité, plus les arcs contenus dans l'ouverture ſont petits; & c'eſt auſſi ſans doute une grande raiſon pourquoi il eſt preſque impoſſible de réuſſir dans les verres que j'avois propoſés autrefois. Cependant, dans le cas préſent, il n'y a aucun doute qu'on ne pût bien admettre une plus grande ouverture que de 6 pouces, & alors on profiteroit d'autant plus dans la clarté, ce qui eſt encore un très grand avantage.

20. Après ces recherches, la conjecture que j'ai hazardée ci-deſſus ſur la nouvelle conſtruction des objectifs de M. Dollond me paroit portée au plus haut degré de certitude. On n'a qu'à bien conſidérer toutes les circonſtances qu'il allegue, pour ſe convaincre que ſes deux verres ſont conſtruits ſur une des eſpeces que je viens d'expoſer, & en particulier ſur celle qui répond au nombre $\lambda = 1,5$. D'abord il s'explique aſſez clairement, ſur ce que le premier verre tourné vers l'objet étoit convexe & l'autre concave; & enſuite, par un raiſonnement fort obſcur & apparemment peu fondé, il nous découvre, que le rapport entre les diſtances de foyer du verre convexe & concave étoit comme 2 à 3: or la valeur de $\lambda = 1,5$ donne le même rapport. Enfin, quand il dit, que ce n'eſt qu'après pluſieurs eſſais qu'il a découvert l'eſpece du verre concave qui détruit toute confuſion, on comprend aiſément, comment un grand nombre d'expériences l'a pu conduire à la juſte proportion entre les deux faces du verre concave.

21. Cependant, puiſque la réfraction du verre concave étoit un peu plus grande que celle du convexe, la proportion entre les rayons des faces aura été un peu différente de celle de mes formules, & les rayons des concavités auront été tant ſoit peu plus grands. Mais

j'oſe aſſurer hardiment que la diverſité du verre n'a rien contribué à la perfection de ces objectifs, & qu'il auroit également réuſſi en n'employant que la même eſpece de verre. La diminution dans la diſperſion des couleurs, que cette diverſité du verre peut produire en poſant $\lambda = 1,5$, eſt trop petite, pour qu'elle puiſſe devenir ſenſible: puiſque, pour faire évanouir cette diſperſion, il faudroit que la valeur de λ fût plus petite que 1,02, comme il eſt aiſé de le démontrer: & de là il s'enſuit que, dans les verres de M. Dollond, la diſperſion des couleurs ne ſauroit être diminuée que de la douzieme partie tout au plus, quelque grande que ſoit la différence entre les réfractions de ſes deux eſpeces de verre.

22. On ne ſauroit donc accorder aux objectifs de M. Dollond qu'une eſpece de perfection, qui conſiſte dans la deſtruction de la confuſion cauſée par l'ouverture du verre, pendant que l'autre défaut des objectifs ordinaires, ſavoir la diſperſion des couleurs, y demeure preſque dans ſon entier. Pour l'autorité de M. Short, qui aſſure que ces objectifs ne cauſent aucune diſperſion des couleurs, tant s'en faut qu'elle me ſoit ſuſpecte, que je la regarde plutôt comme une preuve inconteſtable du ſentiment que j'ai avancé ci-deſſus: qui porte, que la diſperſion des couleurs n'eſt à craindre, que lorſqu'elle eſt accompagnée de la confuſion qui eſt cauſée par l'ouverture des verres. Dès qu'on réuſſit à faire évanouir cette confuſion, la diverſe réfrangibilité des rayons ne trouble preſque plus la repréſentation des objets: non qu'elle ſoit détruite en effet; mais l'oculaire, en rangeant les divers rayons ſur la même direction, nous en cache la diverſité.

23. Je ſuis ſi convaincu de la vérité de ce ſentiment, que j'oſe provoquer à l'expérience pour prouver, que les objectifs de M. Dollond ſont auſſi peu exemts des effets de la diverſe réfrangibilité des rayons, que les ordinaires. On n'a qu'à examiner dans une chambre obſcure la diſtance du foyer, qui eſt formé par les rayons rouges & violets, & on y remarquera preſque la même différence que Newton a obſervée dans les verres ordinaires. Mais, en employant un tel objectif

jectif dans une lunette, c'eſt à l'oculaire qu'on eſt redevable de ce que cette diſperſion devient inſenſible. Après ces réflexions, il eſt d'autant plus remarquable que M. Dollond air été conduit à une découverte ſi importante par des raiſonnemens tout à fait contraires à la nature des choſes. Les expériences préalables qu'il a faites, avec des coins formés de différentes eſpeces de verre, n'y pouvoient avoir aucune influence, quoiqu'elles fuſſent très curieuſes, & qu'elles prouvent ſuffiſamment la diverſe réfraction des différentes eſpeces du verre.

24. L'excellent effet que produiſent les verres objectifs de M. Dollond, m'eſt donc auſſi un ſûr garant, que les objectifs que je viens de décrire ſeront doués de la même qualité, & qu'étant délivrés du défaut de la confuſion, ils nous procurent auſſi l'avantage, que la diſperſion des couleurs ne nous incommodera plus, quand on les joindra avec un bon oculaire. Je crois même que c'eſt le ſeul moyen de porter les lunettes au plus haut degré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles, & qu'il faut renoncer à la conſtruction d'objectifs tels qu'ils redreſſent la diverſe réfrangibilité des rayons de lumiere, puiſque d'autres inconvéniens très importans n'en ſeroient point ſéparables. Je finirai donc ces recherches par quelques devis de telles Lunettes parfaites, tant pour diriger les Artiſtes dans leur conſtruction, que pour faire ſentir les avantages qu'on en peut attendre.

I Devis.

D'un objectif de 5 pouces de foyer.

Le premier verre AB tourné vers les objets ſera également convexe des deux côtés, le rayon étant $1_{\frac{7}{10}}^{\frac{5}{10}}$ pouce. L'autre verre CD ſera concave des deux côtés, mais inégalement, Fig. 5.

le rayon étant de la face { de devant $1_{\frac{8}{10}}^{\frac{5}{10}}$ pouce, de derriere $4_{\frac{3}{10}}^{\frac{1}{10}}$ pouces.

Il ſemble que cet objectif admettra bien une ouverture de $\frac{5}{10}$ pouce, & partant il pourra être employé à groſſir 20 fois les objets en diametre:

pour cet effet il faudra prendre un oculaire d'un quart de pouce de foyer. Un oculaire concave de ce foyer produira le même effet, & préſentera les objets debout. Une telle petite lunette aura toujours ſon mérite; mais l'avantage ſera d'autant plus grand, plus on augmentera la diſtance de foyer.

II Devis,
d'un objectif de 10 *pouces de foyer.*

Prenant le premier verre AB également convexe des deux côtés, le rayon de chaque convexité doit être de $3\frac{1}{10}\frac{4}{5}$ pouces. Pour l'autre verre CD, inégalement concave des deux côtés, on mettra

le rayon de la face { de devant 3 pouces exact:
de derriere $8\frac{2}{10}\frac{8}{5}$ pouces.

Un peu plus qu'un pouce d'ouverture pourra très bien avoir lieu dans cet objectif, & par ce moyen on obtiendra un groſſiſſement de 30 fois en diametre, en employant un oculaire d'un tiers de pouce de foyer. Il y a toute apparence qu'une telle lunette découvrira aſſez diſtinctement les Satellites de Jupiter.

III Devis,
d'un objectif de 20 *pouces de foyer.*

Pour le premier verre AB, également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face doit être pris de $6\frac{2}{10}\frac{8}{5}$ pouces. Or, pour l'autre verre CD concave des deux côtés, on doit prendre

le rayon de ſa face { de devant de 6 pouces,
de derriere de $16\frac{8}{10}\frac{3}{5}$ pouces.

A ces verres on pourra très bien donner une ouverture de deux pouces & au delà; cependant je ne les voudrois employer que pour un groſſiſſement de 50 fois en diametre, pour obtenir d'autant plus de clarté. Un oculaire de $\frac{2}{5}$ pouce de foyer ſera propre à ce deſſein. Les Satellites de Jupiter doivent paroître très diſtinctement à travers une telle Lunette.

IV

IV Devis,
d'un objectif de 50 pouces de foyer.

Le premier verre AB étant également convexe de ſes deux côtés, le rayon doit être de $15\frac{7}{100}$ pouces.

Pour l'autre verre CD, concave des deux côtés, on doit prendre

le rayon de ſa face { de devant $14\frac{8}{100}$ pouces. / de derriere $41\frac{3}{100}$ pouces.

Trois pouces d'ouverture ne ſeront certainement pas trop pour cet objectif, qui pourroit peut-être bien en ſouffrir une de 5 pouces: & partant il ſera très propre à groſſir les objets 100 fois, en le combinant avec un oculaire d'un demi-pouce de foyer. Une telle lunette de 4 pieds & un quart environ, produira donc un meilleur effet qu'une ordinaire de 30 pieds.

V Devis,
d'un objectif de 100 pouces de foyer.

Le rayon de l'une & de l'autre face convexe du premier verre AB doit être pris de $31\frac{43}{100}$ pouces.

L'autre verre concave des deux côtés doit être conſtruit de ſorte que le rayon de ſa face { de devant $29\frac{8}{100}$ pouces, / de derriere $82\frac{63}{100}$ pouces.

Ce ſera peu de choſe que de donner à ces verres une ouverture de 6 pouces, & de les employer pour groſſir 200 fois, en les joignant avec un oculaire d'un demi-pouce. Or, quand même on voudroit prendre un oculaire de trois quarts de pouce, peut-être que cette lunette produiroit un meilleur effet que même les plus longues dont les Aſtronomes ſe ſont ſervis juſqu'ici.

VI Devis,
d'un objectif de 200 pouces de foyer.

Le premier verre AB ſera formé de ſes deux côtés également convexe, en prenant le rayon de $62\frac{86}{100}$ pouces.

L'au-

L'autre verre CD, concave des deux côtés, aura les meſures ſuivantes: il faut prendre le rayon de ſa face { de devant $59\frac{87}{100}$ pouces, de derriere $165\frac{25}{100}$ pouces.

Qu'on faſſe ces deux verres ſi grands, qu'ils ſoient ſuſceptibles d'une ouverture de 10 pouces, pour les employer à produire un groſſiſſement de 300 fois en diametre, à quoi un oculaire de $\frac{2}{3}$ pouce eſt propre. Il ſemble qu'on puiſſe bien aſſurer qu'une telle Lunette, ſoigneuſement exécutée, devroit ſurpaſſer tout ce qu'on a découvert juſqu'ici par le moyen des plus longues Lunettes. Il paroit encore douteux, ſi jamais une lunette a groſſi 300 fois, ſans parler de la clarté & du degré de diſtinction, en quoi celle-ci ſera de beaucoup préférable.

Si l'on vouloit doubler ces dernieres meſures pour former un objectif de 400 pouces de foyer, & ménager une ouverture de 15 pouces en diametre, un oculaire d'un pouce de foyer groſſiroit 400 fois les objets. Une telle Lunette ne ſeroit que de 34 pieds, & partant encore aſſez commode à manier, pendant que les très longues lunettes ordinaires ſont preſque inutiles à cet égard.

RE-

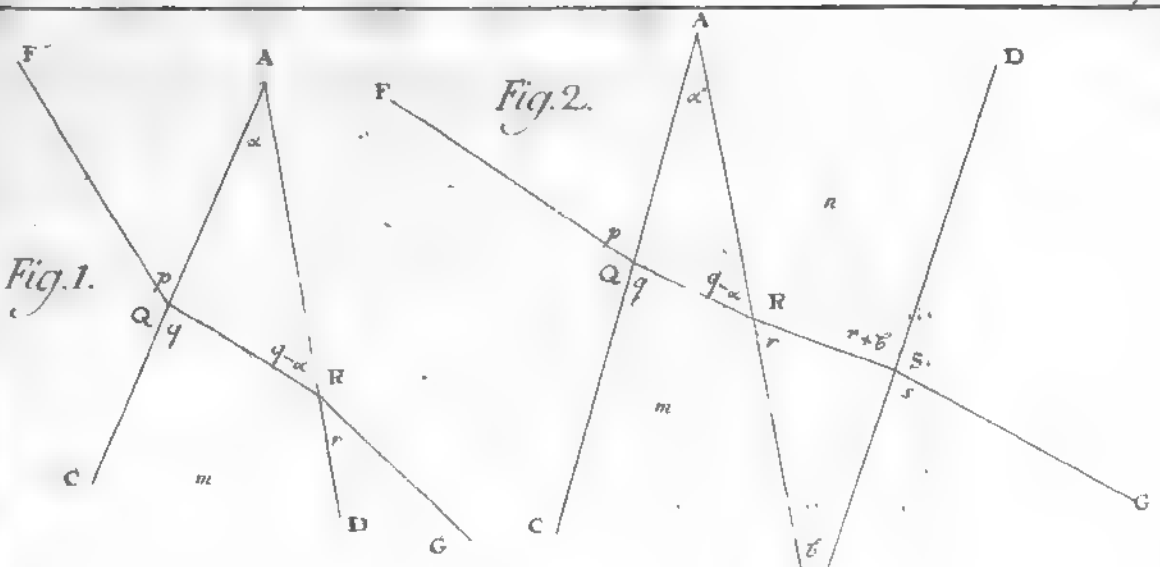


Fig. 1.
F
A
α
p
Q
q
q−α
R
r
C
m
D
G

Fig. 2.
A
D
F
α
n
p
Q
q
q−α
R
r
r+b
S
s
m
C
G
b
B

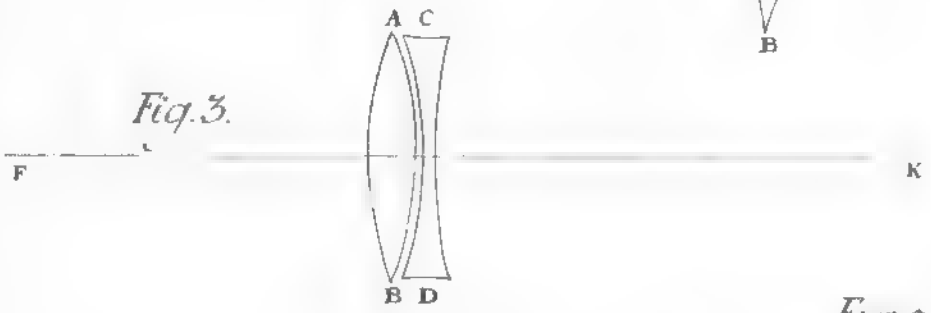


Fig. 3.
A C
F
K
B D

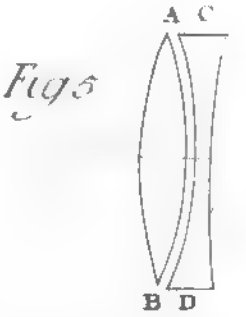


Fig. 5
A C
B D

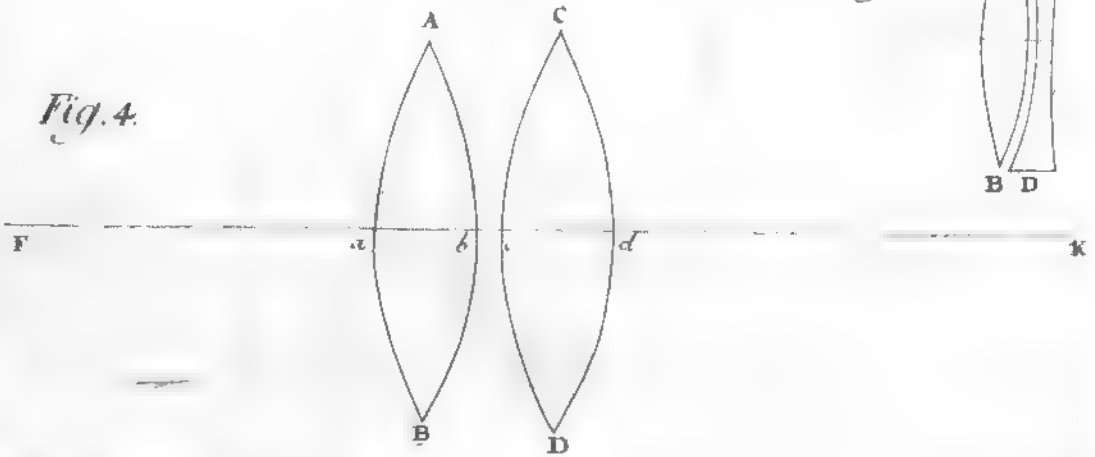


Fig. 4.
A
C
F
a
b
d
K
B
D

REMARQUES
SUR
L'EFFET DU FROTTEMENT
DANS L'ÉQUILIBRE. (*)

PAR M. L. EULER.

1.

Il ſemble d'abord, que le frottement ne regarde en aucune maniere l'état d'équilibre des corps, & que ſon effet eſt néceſſairement attaché au mouvement. Auſſi voyons-nous que les Auteurs, tant qu'ils expliquent les loix de l'équilibre, ne font aucune mention du frottement, & qu'ils n'en tiennent compte que lorſqu'ils traitent du mouvement. Cependant, pour qu'un corps ſoit mis en mouvement, il ne ſuffit pas que les forces dont il eſt ſollicité ne ſoient plus en équilibre, mais il faut que l'excès ſoit capable de vaincre le frottement. Donc un corps demeure en repos ou en équilibre, non ſeulement tant que les forces dont il eſt ſollicité ſe tiennent en équilibre, mais auſſi quand l'équilibre des forces eſt troublé, pourvu que l'excès ne ſoit pas aſſez grand pour vaincre le frottement. D'où il eſt évident, que le frottement influe beaucoup ſur l'équilibre des corps, entant que l'état d'équilibre ne differe pas de l'état de repos; & qu'on dit, qu'un corps ſe trouve en équilibre, tant qu'il demeure en repos.

2. Conſidérons le cas où le poids P repoſe ſur le plan incliné AB, étant retiré ſelon la direction DE parallele au plan par une force ſuffiſante; & l'on prouve, que cette force DE doit être au poids P, com- Planche IX. Fig. 1.

(*) Lu le 16 Mars 1758.

comme la hauteur AC eſt à la longueur AB du plan. S'il n'y avoit point de frottement, ce ſeroit ſans doute l'unique cas de l'équilibre, en ſorte que, ſi la force DE étoit moindre que $\frac{AC}{AB}$. P, le poids P deſcendroit ſur le plan; & ſi elle étoit plus grande, le poids monteroit vers A. Mais, à cauſe du frottement, le poids P demeurera en repos, quoique la force DE ſoit ou plus grande ou plus petite que $\frac{AC}{AB}$. P, pourvu que la différence ſoit plus petite qu'il ne faudroit pour vaincre le frottement. Donc, ſi nous poſons le frottement $= F$, tant que la force DE ſubſiſte entreces deux limites $\frac{AC}{AB} . P + F$ & $\frac{AC}{AB} . P - F$, le poids P demeurera toujours en repos.

3. Or l'expérience nous a donné à connoitre, que le frottement tient toujours un certain rapport à la preſſion du corps contre le plan, qui eſt pour la plûpart comme 1 à 3. Donc, puiſque la preſſion du poids P ſur le plan incliné eſt $= \frac{BC}{AB} . P$, en prenant pour le dit rapport en général comme λ à 1, on aura le frottement $F = \lambda P . \frac{BC}{AB}$, où il y a à peu près $\lambda = \frac{1}{3}$. Et partant, le poids P demeurera en repos, tant que la force DE ſubſiſte entre ces deux limites $\frac{AC + \lambda . BC}{AB} P$ & $\frac{AC - \lambda . BC}{AB} P$. Le frottement eſt donc cauſe, que l'état d'équilibre admet une grande étendue par rapport à la force DE: d'où l'on peut dire que la force requiſe DE pour maintenir le corps P en équilibre, eſt indéterminée.

4. S'il s'agit ſeulement d'empêcher que le corps P ne gliſſe en bas, il ſuffit d'employer une force DE, qui ne ſoit pas moindre que $\frac{AC - \lambda BC}{AB} P$. Donc, ſi AC eſt égal à $\lambda . BC$, ou moindre, le corps

corps n'a pas beſoin de ſoutien, & il demeurera de ſoi-même en ſon lieu: mais, ſi $AC > \lambda \cdot BC$, le corps doit être retenu, & s'il étoit attaché en E par le fil DE, ce fil éprouveroit un effort égal à $\frac{AC - \lambda \cdot BC}{AB} \cdot P$, qui eſt la plus petite force capable d'arrêter le corps. Car, quoiqu'une plus grande force l'arrête également, il eſt naturel que le fil DE ne ſoutienne que la plus petite; puiſque, s'il eſt aſſez fort pour réſiſter à cette plus petite force, il n'y a pas à craindre qu'il ſoit rompu. D'où l'on voit que, s'il faut déterminer la force dont le fil DE eſt tendu par le poids P, quoique cette queſtion appartienne à la doctrine de l'équilibre, on ne la ſauroit réſoudre ſans avoir égard au frottement.

5. Mais je me propoſe d'examiner ici un cas plus curieux: je ſuppoſe le poids P attaché à une corde, qui ſoit appliquée autour d'un corps fixe ALMNB d'une figure quelconque, où il s'agit de déterminer la force dont l'autre bout de la corde BD doit être tiré, afin que le poids P ſoit maintenu en repos. Or d'abord, s'il n'y avoit point de frottement, & que la corde pût librement gliſſer autour du corps ALMNB, il eſt évident que la force dont on doit tirer le bout de la corde BD, devroit être égale au poids P, de ſorte que, ſi cette force étoit moindre, le poids P deſcendroit en bas, & ſi elle étoit plus grande, le poids en ſeroit élevé. Mais le frottement changera la queſtion; & pour empêcher que le corps P ne deſcende, une plus petite force à appliquer en D ſuffira; or il faudra y en appliquer une plus grande qu'au cas précédent, quand on veut faire monter le poids P. Toute autre force contenue entre ces deux limites, maintiendra le poids en repos. Fig. 2.

6. Pour connoître ces limites, cherchons la plus petite force à appliquer en D, qui puiſſe encore arrêter le poids P en repos, de ſorte que, ſi elle étoit tant ſoit peu plus petite, le poids P deſcendroit actuellement. Il faut donc que cette force ſoit égale à l'excès du poids P ſur tous les obſtacles du frottement, qui s'oppoſeroient à la deſcente

actuelle du poids. Or le frottement dépend en chaque point M, où la corde eſt appliquée au corps fixe, de la preſſion dont la corde y eſt apprimée, en ſorte que, ſi la preſſion en M étoit $= \Pi$, le frottement y ſeroit équivalent à une force $= \lambda\Pi$, dont la corde ſeroit tirée en arriere vers N ſelon ſa propre direction. Mais on ne ſauroit déterminer la preſſion ſans ſuppoſer connues toutes ces forces du frottement; & partant tout revient à la ſolution de ce probleme, que je m'en vais développer.

Fig. 3. 7. Partageons toute la corde en élémens infiniment petits & égaux entr'eux, dont deux quelconques ſoient mM & $M\mu$, qu'on nomme $mM = M\mu = ds$. Soit la preſſion en M, où je conſidere comme réunie toute la force dont l'élément mM eſt apprimé, $= R\,ds$; & le frottement cauſé par cet élément ſera $= \lambda R\,ds$, qu'il faut conſidérer comme une force appliquée en M ſuivant la direction $M\mu$, oppoſée à Mm, puiſqu'on peut négliger l'angle que ces deux élémens font enſemble. Cette force diminuera la tenſion de la corde, de ſorte qu'en poſant la tenſion de l'élément $Mm = T$, celle de l'élément $M\mu$ ſera $= T - \lambda R\,ds$; or celle-ci étant $= T + dT$, nous aurons $dT = -\lambda R\,ds$, & partant $T = \text{Conſt.} - \lambda \int R\,ds$. Pour définir cette conſtante, on n'a qu'à conſidérer, qu'au commencement en A, où l'intégrale $\int R\,ds$ évanouit, la tenſion doit être égale au poids P, d'où l'on obtient cette valeur déterminée $T = P - \lambda \int R\,ds$.

8. Concevons en M appliquée une force Mr, égale & oppoſée à la preſſion de l'élément Mm, de ſorte que cette force ſoit $Mr = R\,ds$, & il faut qu'elle ſoit en équilibre avec les autres forces qui agiſſent ſur le point M. Or, à cauſe de la tenſion, le point M eſt tiré ſelon Mm par la force $= T$, & ſelon $M\mu$ par la force $T + dT - \lambda R\,ds = T$. Ces deux forces étant donc égales, & la force Mr perpendiculaire, ſi nous poſons le rayon de courbure en $M = r$, l'équilibre exige cette proportion: $R\,ds : T = ds : r$, de ſorte que $T = Rr$. Or nous venons de trouver $T = P - \lambda \int R\,ds$, d'où nous tirons par la différentiation $R\,dr + r\,dR = -\lambda R\,ds$, & de

là

là $\frac{dR}{R} = -\frac{dr}{r} - \frac{\lambda ds}{r}$: donc $lR = C - lr - \lambda f\frac{ds}{r}$. Soit e le nombre, dont le logarithme eſt $= 1$, pour avoir $Rr = T = e^{C - \lambda f ds : r} = Pe^{-\lambda f ds : r}$ en déterminant la conſtante de telle ſorte, que la tenſion en A devienne égale au poids P.

9. Ici il faut remarquer que $f\frac{ds}{r}$ exprime l'amplitude de l'arc AM, ou bien l'angle MRA, que fait la perpendiculaire MR à la corde en M avec la droite AR, qui eſt perpendiculaire au commencement A de la corde. Poſons donc cet angle $ARM = \phi$, qu'il faut exprimer par l'arc d'un cercle, dont le rayon eſt $= 1$, qui en eſt la meſure: & la tenſion de la corde en M ſera $= Pe^{-\lambda\phi}$; la preſſion y étant $= Pd\phi e^{-\lambda\phi} = Rds = T\frac{ds}{r}$. Par conſéquent, ſi nous nommons l'amplitude de la corde entiere ALMNB $= \gamma$, la tenſion à l'autre bout B ſera $= Pe^{-\lambda\gamma}$, & une telle force appliquée en D ſera ſuffiſante pour maintenir le poids P en équilibre; en ſorte que, ſi cette force étoit moindre, le corps P deſcendroit actuellement. Cependant une force plus grande appliquée en D ne fera que maintenir le poids P en repos, juſqu'à ce qu'elle ſurpaſſe la quantité $Pe^{\lambda\gamma}$, où elle fera monter le poids P; donc le poids P demeurera en repos, tant que la force appliquée en D eſt entre les limites $Pe^{-\lambda\gamma}$ & $Pe^{\lambda\gamma}$. Fig. 1.

10. De là on voit que la figure du corps ALMNB n'entre en conſidération, que par ſon amplitude, ou l'angle que font entr'elles les perpendiculaires AC & BC, tirées aux extrémités A & B. Donc, ſi les deux bouts de la corde en A & B deviennent paralleles, la corde faiſant un demi-tour ſur le corps fixe, quelle que ſoit ſa figure, de ſorte qu'au lieu de la force appliquée en D, on puiſſe concevoir un poids Q, ces deux poids pourront être en équilibre, quoiqu'ils ſoient inégaux entr'eux. Puiſque l'amplitude dans ce cas eſt de 180°, dont Fig. 4.

la meſure eſt la demi-circonférence d'un cercle π, le rayon étant $= 1$, l'équilibre aura lieu, tant que le poids Q n'eſt pas ou plus petit que $Pe^{-\lambda\pi}$, ou plus grand que $Pe^{\lambda\pi}$. Si nous ſuppoſons $\lambda = \frac{1}{3}$, à cauſe de $\pi = 3,14159$, ces deux limites ſeront pour le poids Q:

la moindre $= 0,35092\,P$, la plus grande $= 2,84965\,P$.

11. Dans ce cas donc, le plus petit poids Q qui ſoit capable de ſoutenir le poids P, n'eſt qu'environ un tiers du poids P, ou à peu près $= \frac{2}{7}$ P: & partant, ſi la corde étoit attachée en Q à un clou, ce clou ne ſoutiendroit qu'environ le tiers du poids P. C'eſt le frottement de la corde ſur le demi-tour ALMNB, qui cauſe cette diminution conſidérable, puiſque ſans le frottement le poids Q devroit être égal au poids P. Or, ſi une ſi petite force eſt ſuffiſante pour empêcher la deſcente du poids P, il en faut employer une d'autant plus grande pour faire monter le poids P: car, pour cet effet, il faut que le poids Q ſoit plus grand que $2,84965\,P$, ou à peu près que $\frac{2}{7}$ P: s'il n'y avoit point de frottement, il ſuffiroit que le poids Q ſurpaſsât le poids P. Donc, s'il s'agit ſeulement d'arrêter un grand poids, le frottement eſt d'un grand ſecours, en diminuant la force requiſe à ce deſſein: mais, d'un autre côté, l'élévation du poids P exige une force d'autant plus grande.

Fig. 5. 12. De là on peut conclure, combien la force requiſe pour arrêter un poids donné, peut être diminuée par le frottement, quand la corde fait pluſieurs tours autour d'un tambour fixe, qu'on peut regarder comme un cylindre, puiſque la figure n'y contribue rien. Conſidérons au lieu de cette force un poids Q attaché à l'autre bout de la corde, dont la direction étant verticale, la corde occupera ſur le tambour, ou un demi-tour, comme dans le cas expoſé, où nous avions $\gamma = \pi$: ou elle occupera un tour & demi, ce qui donne $\gamma = 3\pi$; ou deux tours & demi, ce qui donne $\gamma = 5\pi$; ou trois tours & demi, ce qui donne $\gamma = 7\pi$, & ainſi de ſuite. Dans ces cas, le plus petit poids Q capable d'arrêter le poids P, ſera pour le premier

Q=

$Q = e^{-1\lambda\pi}P$; pour le ſecond $Q = e^{-3\lambda\pi}P$; pour le troiſieme $Q = e^{-5\lambda\pi}P$; pour le quatrieme $Q = e^{-7\lambda\pi}P$, & ainſi de ſuite.

13. Suppoſons, comme il arrive ordinairement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & nous aurons pour chaque nombre de tours & demi-tours comme la table ſuivante fait voir.

Lorſque la corde fait	la force requiſe pour maintenir le poids P.	Lorſque la corde fait	la force requiſe pour maintenir le poids P.
$\frac{1}{2}$ tour	0,350920 P	1 tour	0,123145 P
$1\frac{1}{2}$ tour	0,043214 P	2 tours	0,015165 P
$2\frac{1}{2}$ tours	0,005322 P	3 tours	0,001867 P
$3\frac{1}{2}$ tours	0,000655 P	4 tours	0,000230 P
$4\frac{1}{2}$ tours	0,000081 P	5 tours	0,000028 P
$5\frac{1}{2}$ tours	0,000010 P	6 tours	0,000003 P.

La figure repréſente le cas de quatre tours & demi; donc, ſi le poids P étoit de 1000 livres, pour empêcher ſa deſcente, il ſuffiroit d'employer en Q un poids de $\frac{81}{1000}$, ou d'une douzieme partie d'une livre: & s'il y avoit un tour de plus, la centieme partie d'une livre ſeroit ſuffiſante.

14. Cette diminution dépend principalement de la valeur du nombre λ, que j'ai ſuppoſé, conformément à pluſieurs expériences, $= \frac{1}{3}$; ſi ce nombre étoit $= \frac{1}{4}$, comme il arrive quelquefois quand les ſurfaces ſont aſſez bien polies, cette diminution deviendroit conſidérablement plus petite. Pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, le poids Q devroit être $= 0{,}000854\,P$, & partant $10\frac{1}{2}$ fois plus grand que dans le cas $\lambda = \frac{1}{3}$. Réciproquement donc, ayant trouvé par l'expérience le poids Q, on pourra déterminer très exactement par là le nombre λ. Suppoſons que, pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, on ait trouvé le poids $Q = 0{,}00025\,P$, ou $Q = \frac{1}{4000}P$; & puiſque $\frac{1}{4000} = e^{-9\lambda\pi}1$ ou $e^{9\lambda\pi} =$

$= 4000$, on aura $9\lambda\pi = \frac{l\,4000}{le}$, ou bien $\lambda = \frac{3,6020600}{0,4342945 \cdot 9\pi}$ $= 0,29334$, ce qui ſeroit à peu près $\lambda = \frac{3}{10}$.

15. Cependant on ne ſauroit trop compter ſur cette concluſion, puiſque j'ai négligé dans le calcul le propre poids de la corde, qui peut cauſer un changement ſenſible dans la tenſion; qu'il vaudra la peine d'examiner. Soit dont la corde partout également épaiſſe, & que le poids, dont la longueur eſt $= c$, ſoit $= C$: de là le poids d'un élément ds, ſera $= \frac{C\,ds}{c}$. Poſant comme ci-deſſus l'amplitude de l'arc $ALM = \Phi$, le poids de l'élément Mm donnera une preſſion $= \frac{C\,ds}{c} \sin \Phi$, & une force ſelon la direction de la corde $= \frac{C\,ds}{c} \cos \Phi$, dont le frottement doit être diminué. Soit $R\,ds$ la partie de la preſſion, qui eſt encore inconnue, & la preſſion entiere de l'élément Mm ſera $= R\,ds + \frac{C\,ds}{c} \sin \Phi$, d'où réſulte la force du frottement, qui agit ſelon la direction $M\mu = \lambda R\,ds + \frac{\lambda C\,ds}{c} \sin \Phi$, d'où il faut retrancher la force $\frac{C\,ds}{c} \cos \Phi$; de ſorte que la force qui tire ſelon $M\mu$ eſt $= \lambda R\,ds + \frac{\lambda C\,ds}{c} \sin \Phi - \frac{C\,ds}{c} \cos \Phi$.

Fig. 2. & 3.

16. Soit maintenant la tenſion de la corde dans l'élément $Mm = T$, & dans l'élément ſuivant $M\mu = T + dT$, & de là on aura $dT = -\lambda R\,ds - \frac{\lambda C\,ds}{c} \sin \Phi + \frac{C\,ds}{c} \cos \Phi$. Or la condition de l'équilibre fournit comme ci-deſſus cette équation, en poſant le rayon de courbure en $M = r$, de ſorte que $\frac{ds}{r} = d\Phi$;

$T =$

$$T = Rr + \frac{Cr}{c} \text{ sin } \Phi, \text{ ou } R + \frac{C}{c} \text{ sin } \Phi = \frac{T}{r},$$

d'où nous tirons cette équation

$$dT = -\frac{\lambda T ds}{r} + \frac{C ds}{c} \text{ cof } \Phi, \text{ ou } dT + \lambda T d\Phi = \frac{C ds}{c} \text{ cof } \Phi,$$

qui étant multipliée par $e^{\lambda\Phi}$ & intégrée donne:

$$e^{\lambda\Phi} T = \frac{C}{c} \int e^{\lambda\Phi} ds \text{ cof } \Phi, \text{ & partant}$$

$$T = \frac{C}{c} e^{-\lambda\Phi} \int e^{\lambda\Phi} ds \text{ cof } \Phi,$$

où il faut prendre l'intégrale de telle ſorte que, poſant l'amplitude $\Phi = o$, la tenſion en A devienne $= P$, en négligeant le poids du bout de la corde AP, ou en le comprenant dans le poids P.

17. Ici il eſt évident que la tenſion de la corde T dépend non ſeulement de l'amplitude Φ, mais auſſi de la figure du tambour. Suppoſons cette figure cylindrique, dont le rayon ſoit $= a$, & puiſque l'arc AM $= s$ devient $a\Phi$, on aura $ds = a d\Phi$, & partant pour les tambours cylindriques la tenſion T, qui répond à l'amplitude Φ, ſera exprimée par cette équation:

$$T = \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\Phi} \int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi.$$

Or, ayant $\int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi = e^{\lambda\Phi} \text{ sin } \Phi - \lambda \int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ sin } \Phi$, & $\int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ sin } \Phi = -e^{\lambda\Phi} \text{ cof } \Phi + \lambda \int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi$, nous en tirons $\int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi = e^{\lambda\Phi} \text{ sin } \Phi + \lambda e^{\lambda\Phi} \text{ cof } \Phi - \lambda\lambda \int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi + \text{conſt.}$ & partant

$$\int e^{\lambda\Phi} d\Phi \text{ cof } \Phi = \text{conſt.} + \frac{e^{\lambda\Phi} (\text{sin } \Phi + \lambda \text{ cof } \Phi)}{1 + \lambda\lambda}.$$

18. Après avoir trouvé cette intégrale, nous acquerrons la tenſion cherchée:

$$T = \text{conſt.}\ \frac{Ca}{c}e^{-\lambda\Phi} + \frac{Ca\,(\sin\Phi + \lambda\cos\Phi)}{(1+\lambda\lambda)\,c},$$

où, poſant $\Phi = o$, nous aurons pour la détermination de la conſtante:

$$P = \text{conſt.}\ \frac{Ca}{c} + \frac{\lambda Ca}{(1+\lambda\lambda)\,c},$$

dont la valeur étant ſubſtituée fournit

$$T = Pe^{-\lambda\Phi} - \frac{\lambda Cae^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)c} + \frac{Ca\,(\sin\Phi + \lambda\cos\Phi)}{(1+\lambda\lambda)\,c}.$$

Si le poids de la corde évanouit, de ſorte que $C = o$, on aura comme ci-deſſus $T = Pe^{-\lambda\Phi}$; mais le poids de la corde change de telle ſorte la tenſion, qu'elle devient

$$T = Pe^{-\lambda\Phi} + \frac{Ca}{(1+\lambda\lambda)\,c}(\sin\Phi + \lambda\cos\Phi - \lambda e^{-\lambda\Phi}).$$

19. Si l'on multiplie cette valeur de T par $\frac{ds}{r} = d\Phi$, à cauſe de $r = a$, on aura la preſſion de la corde dans ſon élément $Mm = ds = a\,d\Phi$, où il faut remarquer que notre calcul ne ſauroit ſubſiſter, à moins que cette preſſion ne ſoit poſitive; car, ſi elle devenoit quelque part négative, rien n'empêcheroit que la corde n'abandonnât là le tambour: auſſi le frottement ne ſauroit alors devenir négatif, comme le calcul le ſuppoſeroit. Ou bien il faudroit concevoir qu'il y eût autour du tambour un cylindre creux, ou un tuyau, qui tînt attachée partout la corde au tambour, ou qui empêchât qu'elle ne s'en détache. Or la preſſion ne devient négative qu'à moins que la tenſion T ne le devienne: & partant les cas que nous devons exclure de notre calcul, ne ſe trouvent que là où l'expreſſion de T obtient une valeur négative. Mais, avant que cela arrive, il faut que la valeur de T éva-

évanouiſſe, & partant c'eſt depuis cet endroit que nous devons abandonner le calcul.

20. Suppoſons $\lambda = \frac{1}{3}$, & conſidérons le cas où la corde fait un demi-tour ſur le tambour. Puiſqu'alors $\Phi = 180° = \pi$, & partant $\sin \Phi = 0$, $\cos \Phi = -1$, & $e^{-\lambda\Phi} = 0,35092$, la tenſion à l'autre bout B, ou le poids Q, ſera Fig. 4.

$$Q = 0,35092\,P - 0,405276 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Le poids de la corde diminue donc le poids Q, requis pour arrêter le poids P; & la force Q évanouiroit tout à fait, ſi la corde étoit ſi peſante, qu'il fût $C = \frac{13}{15} \cdot \frac{cP}{a}$; ou bien, ſi un morceau de la corde, dont la longueur ſeroit égale au rayon du tambour a, avoit un poids qui fût au poids P comme 13 à 15; dans ce cas, la corde ALMNB ſimplement couchée ſur le tambour, ſans qu'on lui applique en B aucune force, arrêteroit le poids P; & ſi la corde étoit plus peſante, le poids P ſeroit d'autant mieux arrêté, & on le pourroit encore augmenter. Mais, ſi la corde eſt moins peſante, il faut toujours appliquer en B un contrepoids Q, qui ne ſoit pas plus petit que celui que je viens de déterminer.

21. Que dans la même hypotheſe $\lambda = \frac{1}{3}$, la corde rempliſſe ſur le tambour un tour & demi, de ſorte que $\Phi = 3\pi$, & nous aurons $\sin \Phi = 0$ & $\cos \Phi = -1$, enſuite $e^{-\lambda\Phi} = 0,043214$, d'où la grandeur du contrepoids Q devient:

$$Q = 0,043214\,P - 0,3129642 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Donc, tandis que $C < \frac{4}{13} \cdot \frac{Pc}{a}$, ou que le poids d'un morceau de la corde égal au rayon du tambour, eſt plus petit que $\frac{4}{13}P$, il faut appliquer un contrepoids Q. Mais, ſi ce morceau de la corde peſe $\frac{4}{13}P$,

$\frac{4}{5}$ P, ou davantage encore, la ſeule corde, ſans qu'on ait beſoin de la charger d'un contrepoids, arrêtera le poids P; & il ſeroit ſuperflu de lui donner une plus grande longueur, vu que l'excès ſur un tour & demi ne demeureroit plus attaché au tambour. On peut remarquer ici qu'une corde beaucoup plus mince que dans le cas précédent, eſt capable de ſoutenir le poids P ſans un contrepoids, & cela dans la raiſon de $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ à $\frac{4}{5}$ ou de 44 à 7.

22. Quand la corde remplit ſur le tambour deux tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,005322$, le plus petit contrepoids Q ſe trouve

$$Q = 0,005322\,P - 0,3015966 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour trois tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000655$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000655\,P - 0,3001965 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour quatre tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000081$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000081\,P - 3,0000243 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour cinq tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000010$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000010\,P - 0,3000030 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour ſix tours & demi on trouve

$$Q = 0,00000122\,P - 0,300000366 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour

Pour ſept tours & demi on trouve

$$Q = 0{,}000000151\,P - 0{,}3000000453 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

23. En général, ſi la corde remplit ſur le tambour n tours & demi, à cauſe de $\Phi = (2n + 1)\pi$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = e^{-\lambda(2n+1)\pi} P - \frac{\lambda(1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi})}{1 + \lambda\lambda} \cdot \frac{Ca}{c},$$

qui ſera donc d'autant plus diminué, que le tambour eſt gros. Si l'on veut que le contrepoids évanouiſſe, on aura cette équation:

$$(1 + \lambda\lambda) c\, e^{-\lambda(2n+1)\pi} P = \lambda a (1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi}) C,$$

d'où, ſi l'on connoit le nombre λ & les quantités a, c, C, P, on déterminera le nombre des tours n de cette ſorte:

$$e^{-\lambda(2n+1)\pi} = \frac{\lambda a C}{(1 + \lambda\lambda) cP - \lambda a C}, \quad \text{ou bien}$$

$$2n + 1 = \frac{l((1 + \lambda\lambda)\, cP - \lambda a C) - l\lambda a C}{\lambda\pi le}.$$

Soit c la longueur de la corde, qui peſe autant que le poids P, qu'il faut ſoutenir, ſans avoir beſoin de contrepoids, & on aura

$$2n + 1 = l\frac{(1+\lambda\lambda)c - \lambda a}{\lambda a} : \lambda\pi le \text{ ou } \pi le = 1{,}3643766.$$

24. Pour donner un exemple, ſuppoſons qu'on employe une telle corde, dont 2000 pieds peſent autant que le poids à ſoutenir, & que le diametre du tambour ſoit un pied, ou $a = \frac{1}{2}$: ſoit de plus le nombre qui réſulte du frottement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & on aura

$$2n + 1 = \frac{l\,1333\frac{1}{3}}{0{,}4547922} = \frac{4{,}1248953}{0{,}4547922} = 9 \text{ aſſez exactement,}$$

donc $n = 4$: de ſorte que dans ce cas quatre tours & demi ſont ſuffiſans pour ſoutenir le poids. Si le frottement, étoit moindre & qu'il fût $\lambda = \frac{1}{4}$, on trouveroit

$$2n + 1 = \frac{l\,16999}{0,3410941} = \frac{4,2304234}{0,3410941} = 12\tfrac{1}{2}.$$

Ici au lieu de $12\frac{1}{2}$ il faut prendre 13, & $n = 6$; de ſorte que ce moindre frottement exige ſix tours & demi. Puiſque a eſt ordinairement fort petit par rapport à c, on voit qu'il eſt aſſez exactement

$$2n + 1 = l\frac{(1+\lambda\lambda)c}{\lambda a} : \lambda\pi l\,e \text{ ou } e^{\lambda(2n+1)\pi} = \frac{(1+\lambda\lambda)c}{\lambda a}.$$

Du reſte il eſt évident, qu'un fort modique nombre de tours eſt toujours ſuffiſant pour ſoutenir les plus grands poids, ſans avoir beſoin d'un contrepoids.

PRE-

PREMIER MÉMOIRE SUR LA RÉFRACTION DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

1.

Il y a déjà quelque tems que mon Pere propoſa une nouvelle méthode de déterminer la quantité de réfraction des fluides tranſparens par des expériences très aiſées, & à bien des égards préférables à celles dont Newton & Deſcartes ſe ſont ſervis pour déterminer la réfraction de l'eau de pluie & de l'eſprit de vin. Cette méthode ſe trouve dans le XII Volume de l'Hiſtoire de notre Académie; mais perſonne, que je ſache, n'en a encore profité. La voici en peu de mots.

2. On fait travailler deux ménifques à faces connues, de maniere qu'ils quadrent & ſe ferment parfaitement l'un l'autre. Enſuite, rempliſſant la cavité qu'il y a entr'eux, du fluide dont on veut déterminer la raiſon de réfraction, on en obſerve la diſtance de l'image diſtincte, rélativement à celle de l'objet. Alors, connoiſſant la raiſon de réfraction du verre dont les ménifques ſont travaillés, avec les rayons des quatre faces de ces deux ménifques, & la diſtance de l'image obſervée par rapport à celle de l'objet, on ſera en état d'en conclure, par les principes de la Dioptrique, la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide renfermé.

3. Une

(*) Lu le 1er d'Octobre 1761.

3. Une occaſion m'a fourni de ſemblables ménifques, ayant fait travailler, par ordre de l'Académie, dans un deſſein tout à fait différent, deux paires de ménifques, ſavoir ſelon des devis calculés en ſorte que, rempliſſant d'eau de pluie la cavité qu'ils forment, elles ayent tous les avantages des verres objectifs parfaits. Or, comme ces objectifs compoſés de verre & d'eau de pluie n'ont pas parfaitement répondu à l'effet auquel on s'étoit attendu ſuivant la théorie, j'ai cru ne les pouvoir pas mieux employer qu'à de nouvelles expériences, ſi aiſées pour découvrir la raiſon de réfraction de toutes ſortes de liqueurs tranſparentes.

4. Mais, avant que d'expoſer ces expériences mêmes, il convient de donner une explication du calcul qu'il faut faire pour connoître par là la réfraction du fluide qu'on ſe propoſe d'examiner. Or, ſans m'engager dans le détail de tous les principes de l'Optique, je tirerai les élémens de ce calcul du Mémoire que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie le 9 d'Avril de cette année, *ſur la perfection des verres objectifs.*

Planche IX. Fig. 6. *Expoſition des caracteres algébriques.*

5. La premiere figure repréſente la coupe d'un tel objectif en général, compoſé de deux ménifques, dont la cavité eſt remplie d'un fluide quelconque:

L'objet eſt en F & ſon image ſe forme en K;
EAE*e*B*e*E eſt le ménifque de devant, regardant l'objet;
a le rayon de ſa face extérieure EAE;
b le rayon de ſa face intérieure *e*B*e*;
*e*B*e*C*e* la maſſe du fluide enfermé;
E*e*C*e*EDE le ménifque de derriere tourné vers l'image;
c le rayon de ſa face intérieure *e*C*e*;
d le rayon de ſa face extérieure EDE.

Enſuite, qu'on appelle

f la diſtance de l'objet FA,
k la diſtance de l'image DK,

de

de ſorte que, ſi $f \infty$, la lettre k marque la diſtance de ce verre compoſé.

Soit maintenant la raiſon de réfraction

de *l'air* dans le *verre* comme m à 1, & celle
du *verre* dans le *fluide enfermé* comme n à 1, &
la raiſon de réfraction
de *l'air* dans ce *fluide* ſera comme mn à 1.

Enfin, poſons pour abréger

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{p} \quad \& \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{q}.$$

6. Cela poſé, les principes de Dioptrique donnent entre ces quantités p, q, f, k, m & n, le rapport ſuivant:

$$\frac{1}{k} = (m-1)\frac{1}{p} - (m-mn)\frac{1}{q} - \frac{1}{f} \text{ (*), d'où l'on conclud}$$

$$mn = 1 - q\,(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + q\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right);$$

où il faut remarquer que j'ai non ſeulement négligé l'épaiſſeur du verre, mais que j'y ai encore ſuppoſé que l'objet ſe trouve à peu près dans l'axe du verre.

En cas qu'on ſe ſerve d'un objet extrêmement éloigné, de ſorte que $f = \infty$, l'équation trouvée ſe changera en celle-ci:

$$mn = 1 - q\,(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{q}{k},$$

où k marque la diſtance de foyer.

7. Il eſt donc clair, que toutes les fois qu'on connoit les rayons des quatre faces a, b, c, d, avec la réfraction du verre m, cette méthode de déterminer la raiſon de réfraction des fluides n'a aucune difficulté. On n'a qu'à calculer les valeurs de

$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d}$ & $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; enſuite on en tirera celles de q & de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, qui ſoit $= A$. Alors on remplira la cavité entre les deux ménifques du fluide dont on veut chercher la réfraction, & après en avoir obſervé la diſtance de l'image k, celle de l'objet étant $= f$, on calculera pour la réfraction du fluide enfermé la valeur de

$$mn = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme mn à 1.

Cette méthode eſt très ſimple; mais elle dépend de la connoiſſance, tant de la ſtructure des ménifques, que de la réfraction du verre, & il eſt même évident qu'elle en exige une très exacte connoiſſance, vu qu'une légere erreur pourroit ſouvent en cauſer une très conſidérable dans la concluſion.

8. Mais, outre qu'on peut rarement s'en fier à la meſure des rayons ſuivant leſquels les Artiſtes forment les faces des ménifques, la réfraction du verre même qu'on y emploie, n'eſt pas aſſez bien connue: il s'en faut beaucoup qu'elle ſoit la même dans toutes les eſpeces de verre, & on en trouvera à peine deux morceaux, qui ayent préciſément la même réfraction. Il y a des eſpeces de verre dont la raiſon de réfraction dans l'air eſt à peine comme 1 à 1,50; il y en a dont la raiſon de réfraction dans l'air eſt preſque 1 à 1,55, & la réfraction de la plûpart des verres ſemble être contenue entre les limites 1,50 & 1,55.

9. Cette conſidération ſemble rabattre une grande partie de l'avantage qu'on s'étoit d'abord promis de ces nouvelles expériences; en effet, ne ſachant ni les rayons des quatre faces des ménifques, ni même la réfraction du verre à quelques centiemes parties près, comment

ment pourroit-on prétendre en conclure assez exactement la réfraction des fluides dont on s'est servi dans ces expériences. Cependant il y a des moyens pour s'assurer, tant de la figure des ménisques, que de la véritable réfraction du verre dont ils sont travaillés, & il me conviendra de les indiquer avant toute chose.

10. D'abord, pour la véritable connoissance de la réfraction du verre, lorsqu'on est bien sûr de l'exactitude de l'Artiste, on y parviendra le plus aisément par cet expédient: on fera travailler de la même espece de verre dont les ménisques sont formés, une, ou bien quelques lentilles également convexes des deux côtés, dont les rayons soient bien connus, & alors les foyers de ces verres nous en feront connoitre la véritable réfraction.

11. Car la raison de réfraction de l'air dans le verre étant posée comme m à 1, si nous supposons que le rayon des faces d'une lentille également convexe des deux côtés, soit $= a$, en observant sa distance de foyer, ou bien la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet f, les préceptes connus de la Dioptrique nous fournissent cette solution:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{f} = \frac{2\,(m-1)}{a}, \quad \text{\& de là}$$

$$m = 1 + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right).$$

Donc, au cas que la distance de l'objet f soit infinie, k désignant alors la distance de foyer de la lentille, on aura pour la réfraction du verre

$$m = 1 + \frac{a}{2k}.$$

12. De là nous voyons que, si l'on trouvoit $k = a$, on auroit $m = 1\frac{1}{2}$ où 1,50; de sorte que la valeur de m ne surpasse les limites 1,50, qu'entant que la distance de foyer k est plus petite que le rayon de la lentille a. Par exemple, pour une lentille dont le rayon

des faces eſt de 3 pieds ou 36 pouces, ſi l'on obſervoit que la diſtance de foyer n'en fût que de 34 pouces, on en concluroit d'abord la valeur de $m = 1 + \frac{36}{2.34} = 1,529$, & la raiſon de réfraction de l'air dans le verre de la lentille ſeroit comme

$$1,529 \quad \text{à} \quad 1.$$

13. Je viens au ſecond point, & je vais indiquer par quel moyen on pourroit s'aſſurer de la véritable figure des ménifques? D'abord je remarque que, comme l'expreſſion trouvée pour la réfraction du fluide enfermé ne dépend proprement que de la valeur des deux quantités q & $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, que nous avons poſée $= A$, pourvu que nous puſſions par quelque moyen nous aſſurer de leurs vraies valeurs, nous nous paſſerions entierement, tant d'une exacte connoiſſance de la réfraction du verre, que même de celle des quatre rayons des faces.

Je ne m'arrêterai donc pas à chercher par quels moyens on pourroit parvenir à une parfaite connoiſſance de la figure des ménifques mêmes; je me bornerai plutôt à indiquer quelques moyens plus ſimples pour déterminer les vraies valeurs des expreſſions

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \quad \& \; q.$$

14. Pour une exacte connoiſſance de la premiere expreſſion

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),$$

on y parviendroit le plus facilement en laiſſant la cavité entre les deux ménifques vuide, & en en obſervant la diſtance de l'image k par rapport à celle de l'objet f; car alors mn, qui exprime la raiſon de réfrac-

tion

tion de l'air dans le fluide enfermé, devenant $= 1$, l'équation générale du §. 7eme ſe changeroit en celle-ci:

$$1 = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& on en tireroit d'abord

$$A = \frac{1}{k} + \frac{1}{f}\Big).$$

15. Mais, comme pour la plûpart la diſtance de foyer de deux ménisques, dont la cavité n'eſt remplie que d'air, eſt négative, cette méthode ſera ſouvent aſſujettie à de nouvelles difficultés. Je conſeillerai alors de recourir au moyen ſuivant, qui toujours ſera praticable, que la diſtance de foyer des ménisques vuides ſoit négative ou non.

On prend une lentille ordinaire quelconque, dont on ait exactement obſervé la diſtance de foyer, qui ſoit $= r$; on la met enſuite entre les deux ménisques, & on meſure de cette triple lentille la diſtance de foyer que je nommerai $= k$. Alors, en y appliquant la formule du §. 7eme, à cauſe de $mn = 1$; $f = \infty$ & $\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{r}$, elle ſe changera en celle-ci:

$$1 = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right),$$

& on en tirera d'abord la valeur de

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{r},$$

ou bien, ſuppoſé que k déſigne la diſtance de l'image d'un objet dont la diſtance aux ménisques ſoit $= f$, on auroit

$$A = \frac{1}{k} + \frac{1}{f} - \frac{1}{r}.$$

Et pour s'assurer encore mieux de la vraie valeur de cette formule, on n'a qu'à enfermer entre les deux ménisques successivement plusieurs lentilles différentes par rapport à leur distance de foyer, & en conclure de la même maniere autant de valeurs pour la formule $A = (m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$: car, comme à cause des légeres erreurs inévitables dans les mesures des distances de foyer, toutes ces valeurs seront un peu différentes entr'elles, on en choisira une moyenne valeur, qui au moins sera très approchante de la véritable.

16. Qu'il me soit permis de remarquer ici en passant que cette même méthode pour s'assurer de la vraie valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, fournit en même tems un nouveau moyen pour déterminer la réfraction du verre, les rayons des faces des ménisques étant parfaitement connus. Car, ayant trouvé par la méthode indiquée la vraie valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, qui soit $= A$, qu'on calcule ensuite par les quatre rayons des faces la valeur de

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \text{ on aura}$$

$$(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = (m-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = A,$$

& partant $m - 1 = \dfrac{A}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$.

Or la réfraction de l'air dans le verre est comme $m : 1$.

17.

17. Ayant donc déterminé la valeur de

$$(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = A,$$

on aura, pour la réfraction d'un fluide quelconque,

$$mn = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{f}\right) \quad \S. 7.$$

où il nous manque encore la valeur de la lettre q, qui étant $= \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dépend uniquement de la figure des ménisques, que nous ſuppoſons inconnue. Il nous faudra donc tâcher de déterminer cette lettre q par d'autres moyens.

18. D'abord il ſe préſente la maniere ſuivante: comme la lettre q dépend proprement de la figure de la cavité entre les deux ménisques, on n'a qu'à meſurer, tant le diametre de la cavité ee, que ſa profondeur même BC; alors, à cauſe de $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, pourvu que les arcs eBe & eCe ſoient très petits, comme on les fait ordinairement, on obtiendroit aſſez exactement $q = \frac{8BC}{ee}$. Mais, quelques ſoins qu'on puiſſe ſe donner, on ne ſauroit ſe promettre une préciſion ſuffiſante en prenant ces meſures, & la moindre erreur influeroit trop ſur la quantité q même.

Il faut donc tâcher de trouver une autre méthode plus ſûre pour déterminer la véritable valeur de la lettre q.

19. Pour cet effet je remarque que, de la même maniere que l'on conclud la réfraction d'un fluide tranſparent, la valeur de q étant connue (§. 17), on pourroit auſſi réciproquement déterminer la valeur de q, ſi l'on ſavoit au juſte la réfraction d'un certain fluide. Car alors

mn étant connu, ſi l'on remplit la cavité entre les ménisques de ce fluide dont on connoit la réfraction, & qu'on en obſerve la diſtance de l'image k par rapport à celle de l'objet f, l'équation du §. 17 nous donnera $q = \frac{mn - 1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A}$.

20. Il faudra donc commencer par choiſir un certain fluide, par exemple, *l'eau de pluie*, & en déterminer de la maniere ordinaire la raiſon de réfraction dans l'air, ce qui donne la valeur de mn: enſuite on en cherchera, par le moyen que je viens de conſeiller, la valeur de q. Alors ayant exactement déterminé pour une paire de ménisques, tant la valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = A$, ſelon la méthode du §. 15, que celle de $q = \frac{mn - 1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} = A}$, qui ſoit $= B$, on aura un inſtrument propre à connoitre au plus juſte la raiſon de réfraction de tous les fluides, pourvu qu'on en puiſſe avoir une quantité ſuffiſante pour remplir la cavité des ménisques; ſavoir, en obſervant pour chaque fluide la diſtance de l'image k par rapport à celle de l'objet f. On en calculera la réfraction par cette équation:

$$mn = 1 - AB + B\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{f}\right).$$

21. Si nous ſuppoſons, ſelon Newton, la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie comme 1,3358 à 1, & que nous en rempliſſions la cavité entre les ménisques; une exacte meſure de la diſtance de l'image k, que cette lentille compoſée donne par rapport à celle de l'objet f, nous fournira pour la lettre q cette valeur:

$q =$

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A}.$$

Comme il paroit très probable que la réfraction de l'eau de pluie eſt auſſi invariable que ce fluide eſt unique dans ſon eſpece, nous pourrons nous diſpenſer de répéter l'expérience ordinaire pour nous aſſurer de la réfraction de l'eau de pluie, en en retenant la proportion trouvée par Newton, pour la détermination de la lettre q. Or la raiſon pourquoi je préfere la proportion de Newton à celle de Deſcartes qui eſt un peu plus petite (*), ne doit ſurprendre perſonne, ayant tout lieu de ſuppoſer que Newton, qui a fait ſes expériences après Deſcartes, s'eſt attaché à une plus grande exactitude.

22. Le grand Newton ayant encore déterminé la raiſon de réfraction de l'air dans l'eſprit de vin comme 1,3698 à 1, ſi l'on ſavoit la véritable eſſence de cet eſprit de vin dont Newton s'eſt ſervi, ou bien ſi cette liqueur étoit auſſi unique dans ſon eſpece que l'eau de pluie l'eſt dans la ſienne, on pourroit encore ſe ſervir de cette proportion pour la détermination de la lettre q, qui ſera alors

$$q = \frac{0,3698}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A},$$

& cette valeur, pourvu qu'on ait été bien exact dans la meſure des diſtances k & f, ne doit point différer de celle qu'on a trouvée pour q par le moyen de l'eau de pluie.

23. Mais alors, ayant deux fluides dont on connoit la réfraction, on pourroit ſe paſſer entierement de la méthode indiquée au §. 15

(*) Deſcartes a trouvé la raiſon de réfraction de l'air dans de l'eau de pluie comme 1,3315 à 1.

15 pour la détermination de l'expreſſion $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, que nous avons nommée A. Car, en meſurant tant pour l'eau de pluie que pour l'eſprit de vin les diſtances k & f, k' & f', nous obtiendrions d'abord une double valeur pour q, ſavoir

$$\text{pour l'eau de pluie} \quad q = \frac{0,3358}{\frac{1}{k}-\frac{1}{f}-A}, \quad \&$$

$$\text{pour l'eſprit de vin} \quad q = \frac{0,3698}{\frac{1}{k'}-\frac{1}{f'}-A};$$

d'où, en poſant ces deux valeurs égales entr'elles, on tireroit la valeur de

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = \frac{0,3698}{0,0340}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{f}\right) - \frac{0,3358}{0,0340}\left(\frac{1}{k'}-\frac{1}{f'}\right).$$

24. Or, quoique la réfraction de l'eſprit de vin paroiſſe très variable, ſelon la diverſe force de cette liqueur, & qu'elle le ſoit effectivement, de ſorte qu'on ne ſauroit ſe ſervir de la proportion de 1, 3698 à 1, trouvée par Newton: la méthode indiquée au §. précédent, pour déterminer les valeurs de q & de $A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, ſera toujours très bonne, & même, comme on s'en convaincra dans la ſuite, préférable à celles que j'ai conſeillées au §§. 15 & 19, lorſqu'on voudra ſe donner la peine de déterminer auparavant par les expériences ordinaires la réfraction d'une certaine eſpece d'eſprit de vin & d'eau de pluie, ou bien de deux autres fluides quelconques, mais différens à l'égard de leur réfraction. Alors, rempliſſant la cavité

té des ménisques successivement de ces mêmes fluides dont on auroit trouvé la réfraction, il n'y auroit plus aucun doute qu'on n'en pût tirer les valeurs des élémens q & $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, le plus exactement qu'il soit possible.

25. Après ces remarques générales, je crois pouvoir passer aux expériences mêmes. Je commencerai par donner une description exacte des ménisques dont je me suis servi: ensuite je tâcherai de déterminer par les moyens indiqués dans ce Mémoire les justes valeurs des élémens $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ & q, & enfin je conclurai par les distances des images observées la raison de réfraction de tous les fluides, que des occasions différentes m'ont fournie jusqu'ici.

Description des Ménisques.

26. Je me suis servi de deux paires de ménisques, que je marquerai pour les mieux faire distinguer par les lettres A & B. Elles ont été travaillées par le plus habile Artiste que nous ayons, & les devis en sont déduits de mon Mémoire sur la perfection des verres objectifs. Ces deux paires ont presque la même forme, de sorte que la seconde figure peut représenter la coupe de l'une & de l'autre paire. Planche I Fig. 7. Le premier ménisque EE tourné vers l'objet est une lentille concave des deux côtés, & l'autre E′E′ regardant l'image une lentille concave vers l'objet & convexe du côté de l'image.

Description de la paire A.

27. La premiere paire de ménisques, que j'ai marquée de la lettre A, est travaillée selon un devis tiré du 25eme paragraphe du dit Mémoire, & il devoit être pour le ménisque de devant:

le rayon de sa face concave de dehors	8, 72 pouces,
le rayon de sa face concave de dedans	2, 44 pouces,

& pour le ménisque de derriere:

le rayon de sa face concave de dedans 2, 13 pouces,
le rayon de sa face convexe de dehors 2, 01 pouces,

où je dois remarquer que douze de ces pouces font un pied de Rhin.

Or, l'Artiste n'ayant pas eu égard à l'épaisseur du taffetas dont les bassins étoient revêtus, lorsqu'il polissoit ces ménisques, & cette épaisseur pouvant bien selon l'estime monter à $\frac{2}{100}$ parties d'un pouce, les rayons de concavité devoient être jugés de $\frac{2}{100}$ plus grands, & celui de convexité d'autant plus petit qu'il ne falloit.

Aussi l'a-t-on d'abord remarqué dans la distance du foyer du second ménisque, qui, au lieu d'être de 64, 93 pouces, n'étoit que de 48 pouces.

Je fis alors, pour garder la proportion des mesures du devis, changer le ménisque de derriere en sorte que le rayon de sa face convexe fût de 2,05 pouces, en laissant le rayon de sa face concave de 2,15 pouces.

Tout ceci bien considéré, nous aurons pour les rayons des quatre faces des ménisques

$$a = -8{,}74;\quad b = 2{,}46;\quad c = 2{,}15\quad \&\ d = 2{,}05;$$

de là
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = 0{,}37339$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0{,}87162$$
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -0{,}49823$$
$$\&\qquad q = 1{,}14465.$$

Pour ce qui regarde la réfraction du verre, l'Artiste ne se souvenoit plus de quelle espece de verre il s'étoit servi en travaillant cette paire de ménisques.

La

La réfraction du verre m étant donc encore inconnue, nous aurons pour la raiſon de réfraction d'un fluide quelconque, à cauſe de

$$(m-1)\,q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = -(m-1)\,.\,0,57162,$$

$$mn = 1 + 0,57162\,.\,(m-1) + 1,14465\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{f}\right).$$

Je tâcherai de déterminer cette valeur de m, lorſque je chercherai par les moyens indiqués les valeurs des expreſſions $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ & q.

Mais je vais auparavant faire auſſi la deſcription de la ſeconde paire de ménifques.

Deſcription de la paire B.

28. La ſeconde paire de ménifques, que j'ai marquée B, eſt travaillée avec plus de ſoin que la premiere. Le devis en eſt tiré de la IIIème Hypotheſe, ſuivant le §. 28 du même Mémoire, & les meſures en ſont comme il ſuit:

Pour le ménifque de devant,

le rayon de ſa face extérieure concave 7, 57 pouces,
le rayon de ſa face intérieure concave 2, 42 pouces.

Pour le ménifque de derriere,

le rayon de ſa face intérieure concave - 2, 01 pouces,
le rayon de ſa face extérieure convexe - 2, 00 pouces.

Comme on avoit cette fois-ci eu égard à l'épaiſſeur du taffetas, ces meſures, ſi l'on veut s'en fier à l'exactitude de l'Artiſte, ſeront juſtes, & on aura pour les rayons des quatre faces

$$a = -7,57;\quad b = 2,42;\quad c = 2,01;\quad d = 2,00;$$

de là $\frac{1}{p} = 0,36790$

$$\frac{1}{q} = \underline{0,91073}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -0,54283 \quad \& \quad q = 1,09802.$$

Quant à la réfraction du verre dont ces ménisques ſont travaillés, je m'en informai ſimplement chez l'Artiſte, & il m'aſſura que, lorſqu'il avoit exactement poli une lentille ordinaire dans un baſſin de trois pieds ou de 36 pouces de rayon, la diſtance de foyer de cette lentille étoit de $1\frac{1}{4}$ pouce moindre que le rayon du baſſin, c'eſt à dire, qu'elle étoit de 34 pouces & $\frac{3}{4}$.

En appliquant ceci à ce que j'ai dit au §. 11, on aura $n = 36$; $k = 34\frac{3}{4} = 34,75$ & $f = \infty$; donc $m = 1 + \frac{a}{2k} = 1,5179$; de ſorte que la raiſon de réfraction de l'air dans le verre de ces ménisques eſt comme 1, 5179 à 1.

Poſant donc $m = 1,5179$

on aura $l\,(m-1) = 9,7142459$

$$l - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 9,7346638$$

$$lq = \underline{0,0406104}$$

$$l - (m-1)\,q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 9,4895201$$

& partant $(m-1)\,q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = -0,30869;$

or $q = 1,09802;$

donc, rempliſſant la cavité entre ces deux ménisques d'un fluide quelconque, & meſurant ſa diſtance de l'image diſtincte k, celle de l'objet étant $= f$, on calculera

$$mn = 1,30869 + 1,09802 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme mn à 1.

Ou bien, lorſque $f = \infty$, & que k déſigne la diſtance de foyer des ménifques remplis du fluide dont on veut connoître la réfraction, on aura ſimplement

$$mn = 1,30869 + \frac{1,09802}{k},$$

29. Or, comme il ne ſeroit point à propos de ſe fier trop à l'exactitude de l'Artiſte, quelque habile qu'il fût, un examen tel que je l'ai propoſé aux §§. 15, 19 ſera toujours très convenable. Je vai donc comparer pour l'une & l'autre paire les valeurs de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, trouvées par les meſures preſcrites du devis, avec celles qu'on obtient par les moyens indiqués ci-deſſus.

Examen de la figure des ménifques marqués de la lettre A.

30. Je commencerai par déterminer la valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, ſelon la méthode enſeignée au §. 15. Après avoir mis entre les deux ménifques ſucceſſivement pluſieurs lentilles différentes à l'égard de leur diſtance de foyer, j'en obſervai la commune diſtance de foyer comme il ſuit par cette table.

Diſ-

Diſtance de foyer de la lentille, ou la lettre r en pouces.	Diſtance de foyer des deux ménifques avec la lentille, ou la lettre k en pouces.
1,70	3, 12
1,81	3, 50
2,12	5, 00
2,44	7, 12
3,12	16, 00
3,31	25, 00;

d'où, à cauſe de $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$,

il réſultera les ſix valeurs ſuivantes:

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,2861=0,2668=0,2717=0,2695=0,2580=0,2621,$$

dont la différence ne ſauroit en partie être ajugée qu'à l'épaiſſeur de ces trois lentilles jointes enſemble, qui a été négligée dans le calcul; en partie cette différence pourroit encore être l'effet de ce qu'on n'a point pu, pour chaque obſervation, ranger les trois verres en ſorte que leurs axes tombaſſent tous exactement dans une méme ligne droite.

Or, en prenant entre ces ſix valeurs un milieu, ou aura aſſez exactement

$$(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-0,2690.$$

Cette détermination nous ſervira d'abord pour connoitre la quantité de la réfraction du verre dont ces ménifques ſont travaillés; car, ayant trouvé ci-deſſus §. 27 par les meſures du devis

$$(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-0,49823\cdot(m-1),$$

en égalant ces deux valeurs, on obtiendra

$m-$

$$m - 1 = \frac{0,26900}{0,49823} = 0,5399,$$

de ſorte que nous ayons la raiſon de réfraction de l'air dans le verre des ménifques comme 1,5399 à 1.

Cette raiſon ne ſera cependant juſte qu'entant que la figure des ménifques eſt exactement telle que le porte le devis.

Je viens à la détermination, ou plutôt à la correction de la quantité q, que nous avons trouvée par les meſures du devis $= 1,14465$. Je ſuppoſe pour cet effet que la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie ſoit conſtamment comme 1,3358 à 1.

Après avoir, ſelon les préceptes du §. 19 & ſuivans, rempli la cavité des ménifques de l'eau de pluie, j'en ai obſervé la diſtance de l'image diſtincte d'un objet extrêmement éloigné de 31,94 pouces.

Ayant donc dans ce cas $f = \infty$ & $k = 31,94$, on obtiendra la valeur de la lettre

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{31,94} - \frac{1}{\infty} + 0,2690} = 1,1182,$$

qui eſt de $\frac{2}{100}\frac{6}{00}\frac{4}{00}$ plus petite que celle que nous avons calculée par les meſures du devis.

Maintenant, ſachant tant la valeur de $(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) =$ $-0,2690$ que celle de $q = 1,1182$, nous ſommes en état de déterminer la réfraction de toutes ſortes de fluides: ſavoir en rempliſſant la cavité entre ces deux ménifques, que nous avons marqués de la lettre A, d'un fluide quelconque, la diſtance de l'image diſtincte k par rapport à celle de l'objet f nous fournira

$$mn = 1,3008 + 1,1182\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme mn à 1.

Mais, ſi l'objet eſt extrêmement éloigné, de ſorte qu'on puiſſe hardiment mettre $f = \infty$, on aura plus brièvement

$$mn = 1,3008 + \frac{1,1182}{k}.$$

Or, en laiſſant, comme nous l'avons calculé au §. 27, $q = 1,14465$, nous obtiendrions pour la réfraction du fluide enfermé

$$mn = 1,3086 + 1,1446 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

ce qui donneroit, en poſant $f = \infty$ & $k = 31,94$, comme je l'ai obſervé pour l'eau de pluie,

$$mn = 1,3445,$$

& partant une réfraction de $\frac{87}{1000}$ plus grande que celle qui a été trouvée par Newton.

Examen de la figure de l'autre paire des ménifques marquée B.

31. D'abord, pour ce qui regarde l'expreſſion $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, après avoir mis entre les deux ménifques diverſes lentilles ordinaires de foyer connu, j'obſervai

pour

pour la diſtance de foyer de la lentille ſimple r en pouces:	la diſtance de foyer de cette même lentille enfermée entre les deux ménifques, ou k en pouces:
1,31	2,31
1,62	3,37
1,75	3,87
1,81	3,87
2,44	8,37
2,75	13,00
3,12	19,37;

d'où, à cauſe de $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$, on obtiendra les ſept valeurs ſuivantes:

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,3305=0,3206=0,3130=0,2941=0,2904=0,2867=0,2505;$$

& partant, en prenant un milieu entre toutes ces valeurs différentes, nous concluons

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,2979,$$

qui eſt un peu plus grande que la valeur déduite des meſures du devis, ſavoir $-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,28113.$

Enſuite, pour ce qui eſt de la valeur de la lettre q, j'ai, pour la corriger comme ci-deſſus, rempli la cavité entre les ménifques d'eau de pluie, & j'ai trouvé que la diſtance de foyer en étoit de 40,06 pouces. En ſuppoſant donc pour l'eau de pluie la réfraction $mn=1,3358$, à cauſe de $f=\infty$ & $k=40,06$, on trouvera, par le §. 21,

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{40,06} - \frac{1}{\infty} + 0,2979} = 1,0401;$$

ce qui differe aſſés conſidérablement de la valeur calculée par les meſures du devis $q = 1,09802$.

Nous concluons donc, pour la paire B des ménifques, que, lorſqu'on en remplit la cavité d'un fluide quelconque, & qu'on en obſerve la diſtance de l'image k par rapport à celle de l'objet qui ſoit $= f$, la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme mn à 1; la valeur de mn étant calculée par cette équation:

$$mn = 1,3098 + 1,0401 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

ou plus brièvement, lorſque la diſtance de l'objet f eſt très grande, de ſorte qu'on puiſſe hardiment poſer $\frac{1}{f} = 0$:

$$mn = 1,3098 + \frac{1,0401}{k}.$$

Comme nous avons trouvé par les meſures du devis

$$mn = 1,30869 + 1,09802 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \quad \S. 28,$$

ſi nous y poſons $k = 40,06$, comme on l'a obſervé en rempliſſant la cavité des ménifques de l'eau de pluie, f étant $= \infty$, nous obtiendrons pour la réfraction de l'eau de pluie

$$mn = 1,33609,$$

qui, malgré la grande différence que nous venons de trouver entre la valeur calculée & obſervée des élémens $(m - 1).\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q,

Fig. 1.

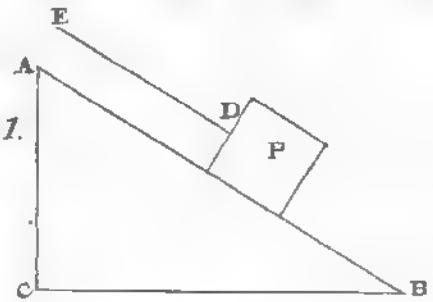


Fig. 2.

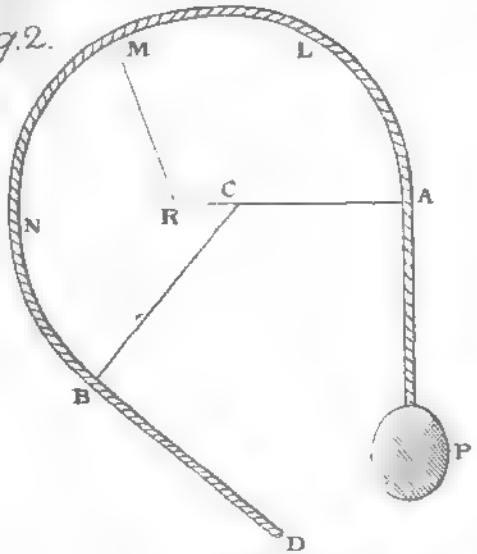


Fig. 3.

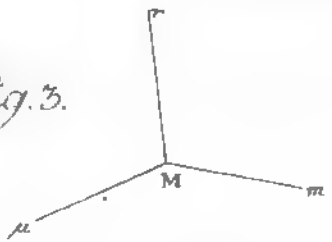


Fig. 4.

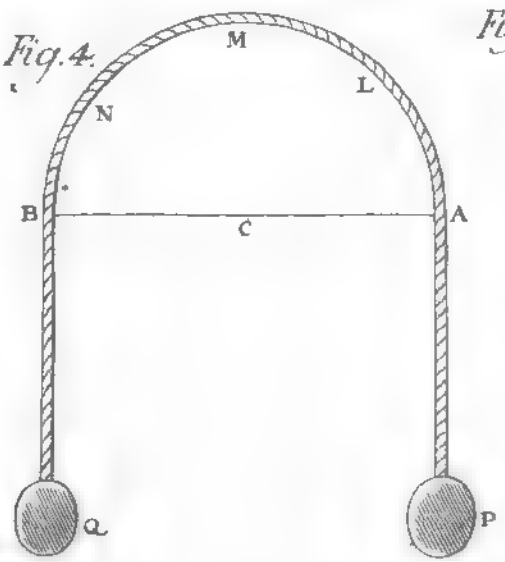


Fig. 5.

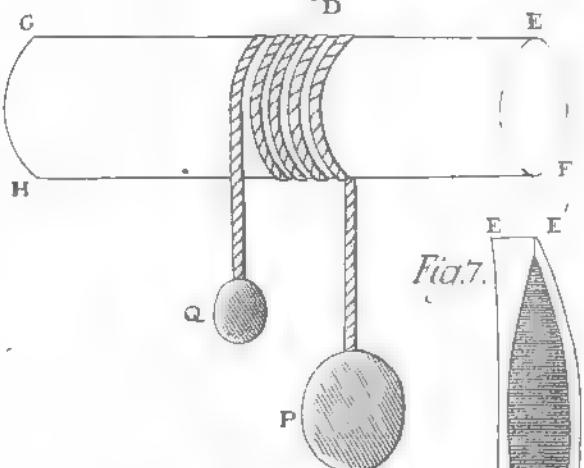
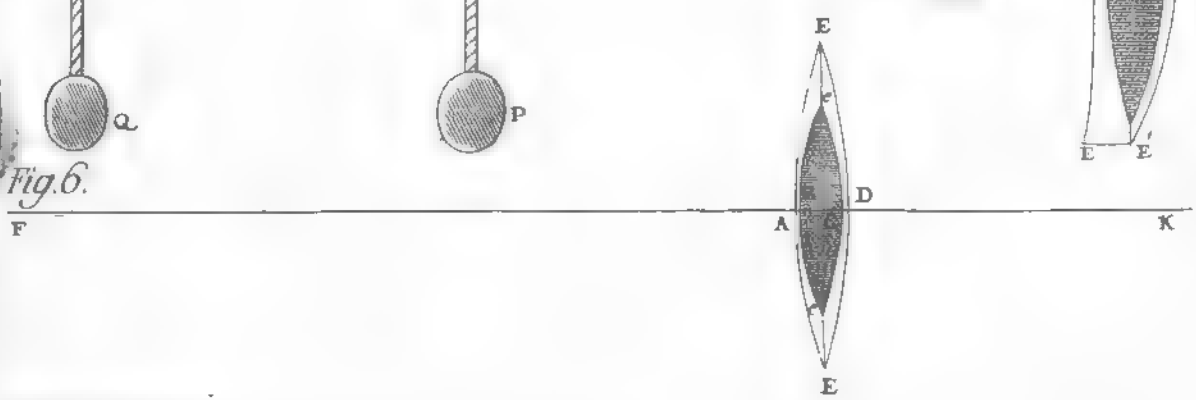


Fig. 7.

Fig. 6.



ne differe que très peu de la raiſon de réfraction obſervée par Newton.

Après toutes ces déterminations, dont le but principal étoit de connoitre le plus exactement qu'il eſt poſſible les deux expreſſions $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, qui dépendent tant de la figure que de la réfraction du verre des ménifques, il ne me reſte plus qu'à produire les expériences mêmes, pour en conclure la réfraction des différens fluides dont je m'y ſuis ſervi.

SECOND MÉMOIRE.

EXPÉRIENCES

SUR

LA QUANTITÉ DE RÉFRACTION

DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Comme les opérations dans toutes ces expériences ſont les mêmes, & qu'elles ne conſiſtent qu'à remplir la cavité des ménifques du fluide dont on veut connoitre la réfraction, & à en obſerver la diſtance de foyer, ou celle de l'image diſtincte rélativement à la diſtance de l'objet; je vais une fois pour toutes donner une idée de la maniere dont je m'y ſuis pris.

Je commençois toujours par bien nettoyer les ménifques & filtrer le fluide dont je voulois connoitre la réfraction.

Enſuite, verſant ce fluide dans une taſſe de porcelaine, je n'avois qu'à y tremper les deux ménifques & à les y fermer; alors la cohéſion du fluide empêchant ſuffiſamment les ménifques de ſe ſéparer, après les avoir retirés, j'en eſſuyois encore le dehors, de ſorte que le tout reſſembloit parfaitement à un ſimple verre de lunette.

Pour meſurer la diſtance de foyer de ce verre compoſé, lorſque cette diſtance ſurpaſſoit celle d'un pied, je m'en ſervois comme d'un verre objectif ordinaire, c'eſt à dire, je le plaçois à un bout d'un tuyau

(*) Lu le 1er d'Octobre 1761.

tuyau de lunette, qu'on peut allonger & raccourcir à ſon gré; & j'y joignois à l'autre bout une ſimple lentille oculaire de $1\frac{9}{16}$ ou de 1,56 pouces de foyer.

Enſuite, après avoir couché cette lunette ſur un inſtrument, je mirois la pointe d'une tour très éloignée, & j'obſervois pour la repréſentation la plus diſtincte de cet objet la longueur de la lunette, ou plutôt la diſtance du verre objectif à l'oculaire.

Alors, connoiſſant la diſtance de foyer de l'oculaire, qui dans toutes ces expériences a conſtamment été de 1,56 pouces, en retranchant cette diſtance de toute la longueur de la lunette, il eſt clair que le reſte doit néceſſairement être la diſtance de foyer de l'objectif, & partant ce que nous avons appellé *k*.

Or, lorſque la diſtance de foyer de la lentille compoſée étoit plus petite qu'un pied, je me ſervois d'un expédient plus court, & je faiſois ſimplement tomber l'image d'une fenêtre ſur la muraille oppoſée; enſuite, lorſque cette image me paroiſſoit la plus diſtincte, j'en meſurois la diſtance au milieu du verre objectif; ce qui me donnoit la valeur de la lettre *k*.

En retranchant cette diſtance *k* de la longueur de la chambre, ou plutôt de la diſtance de la fenêtre à la muraille, qui dans toutes ces expériences a été de 506 pouces, le reſte en étoit la diſtance de la fenêtre au milieu du verre, c'eſt à dire la diſtance de l'objet, ou bien ce que nous avons nommé *f*.

Enfin, il me convient de remarquer que j'ai meſuré toutes ces diſtances avec une meſure de deux pieds de Rhin diviſés en 24 pouces, chaque pouce étant de plus ſubdiviſé en huit parties égales; & afin que ces huitiemes parties d'un pouce n'embaraſſent point le calcul, je les ai enſuite réduites à des centiemes.

D'ailleurs, les faces des ménifques ayant été travaillées de même ſelon la meſure du Rhin, j'avois l'avantage de n'être pas obligé de faire une réduction qui n'eût ſervi qu'à augmenter inutilement la peine.

I. Ex-

I. Expériences faites avec la premiere paire de ménisques, marquée A.

Le fluide enfermé étant	j'observois la longueur de la lunette de	d'où retranchant 1,56 pouces, on a la distance de foyer, ou la lettre *k*.	
de l'eau distillée	33,50 pouces	31,94 pouces	La distance de l'objet est infinie, ou $f = \infty$.
de l'eau de pluie	33,50	31,94	
de l'eau de puits	32,75	31,19	
du vin de France	27,00	25,44	
de l'eau de vie de France	20,75	19,19	
d'une autre espece plus forte	19,50	17,94	
de l'esprit de vin rectifié	18,50	16,94	
de l'esprit de vin rectifié au plus haut degré	18,00	16,44	
du blanc d'oeuf	18,50	16,94	
du vinaigre distillé	27,62	26,06	
une solution de gomme d'Arabie	26,25	24,69	
une solution de sucre blanc	26,75	25,19	
une solution de sel de salines	25,75	24,19	
une solution de sel d'urine	30,25	28,69	
de l'huile de Provence	— —	7,18 la distance de l'objet $f = 499$,	
de l'huile de térébentine	— —	6,50 la distance de l'objet $f = 500$.	

Remarques.

1. A l'égard des trois solutions des sels dont je me suis servi dans ces expériences, la proportion en étoit de deux scrupules de sel dans une once d'eau distillée.

2. Le sel de salines & celui d'urine étoient affinés par une double cristallisation.

Maintenant, ayant trouvé au §. 26 que, lorsqu'on remplit la cavité de la premiere paire des ménisques d'un fluide quelconque, & qu'on en observe la distance de l'image *k* respectivement à celle de l'objet *f*, la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme

$$mn = 1,3008 + 1,1182 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1,$$

en

en calculant pour chaque fluide dont je me ſuis ſervi dans ces expériences la valeur de $1,1182\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{f}\right)$, & en y ajoutant conſtamment le nombre 1,3008, nous en concluons la raiſon de réfraction, comme il ſuit dans cette Table.

Table de Réfractions.

La raiſon de réfraction de l'air dans	eſt comme	
l'eau diſtillée	1,3358	
l'eau de pluie	1,3358	
l'eau de puits	1,3366	
le vin de France	1,3447	
l'eau de vie de France	1,3590	
une autre eſpece plus forte	1,3631	
l'eſprit de vin rectifié	1,3668	à l'unité
l'eſprit de vin très rectifié	1,3688	
le blanc d'oeuf	1,3668	
le vinaigre diſtillé	1,3437	
une ſolution de gomme d'Arabie	1,3461	
une ſolution de ſucre blanc	1,3452	
une ſolution de Sel de ſalines	1,3470	
une ſolution de Sel d'urine	1,3397	
l'huile de Provence	1,4587	
l'huile de térébentine	1,4750	

II Expériences faites avec la ſeconde paire de ménisques, marquée B.

Après avoir rempli la cavité des ménisques	j'observois la longueur de la lunette de	d'où la distance de foyer, ou k	
d'eau distillée	41,62 pouces	40,06 pouces	La distance de l'objet f est infinie.
d'eau de pluie	41,62	40,06	
d'eau de puits	41,25	39,69	
de vin de France	31,25	29 69	
d'eau de vie de France	23,50	21,94	
d'une autre espece plus forte	22,75	21,19	
d'esprit de vin rectifie	20,50	18,94	
d'esprit de vin très rectifié	19,87	18,31	
de thé	39,37	37,81	
d'une solution du Sel mirabilis Glauberi	33,75	32,19	
d'une solution du Sel digestif Sylvii	31,75	30,19	
d'une solution de Sel ammoniac affiné	29,25	27,69	
d'une solution de vitriol de fer	37,12	35,56	
d'alcali minerale saturatum	23,50	21,94	
d'esprit de nitre acide	— — —	12,50 la distance de l'objet f = 494 pouces,	
d'huile de tartre per deliquium	— — —	14,12 la distance de l'objet f = 492 pouces,	
d'huile de Provence	— — —	7,50 la distance de l'objet f = 498 pouces,	
d'huile de térébentine	— — —	6,75 la distance de l'objet f = 499 pouces.	

Remarques.

1. Je me suis servi pour les trois premieres solutions de la même proportion que pour celles des expériences précédentes; savoir, j'ai constamment fait dissoudre une partie de sel dans douze parties d'eau distillée. Mais, pour que la solution du vitriol conservât encore quelque transparence, il m'a fallu prendre une double portion d'eau, de sorte qu'il y eût une partie du sel dissous dans 24 parties d'eau.

2. *L'alcali minerale saturatum*, *l'oleum Tartari per deliquium* & *le spiritus nitri acidi* m'ont été fournis par Mr. le Directeur *Marggraff*, de même que toutes les différentes especes de sel dont je me suis servi dans ces expériences, de sorte qu'on peut être bien sûr à l'égard de leur véritable essence.

3. Je

3. Je dois enfin remarquer que le vin de France, la premiere eſpece d'eau de vie, les deux eſpeces d'eſprit de vin & les huiles ont été dans ces expériences, auſſi bien que dans les précédentes, de la même ſorte.

Maintenant, en appliquant à ces expériences ce que nous venons de trouver pour la paire B des ménifques vers la fin du §. 31, il en réſultera la table ſuivante.

Table de Réfractions.

La raiſon de réfraction de l'air dans	eſt comme	
l'eau diſtillée - - -	1,3358	
l'eau de pluie - - -	1,3358	
l'eau de puits - - -	1,3360	
le vin de France - -	1,3448	
l'eau de vie de France - -	1,3572	
une eſpece plus forte -	1,3588	
l'eſprit de vin rectifié - -	1,3647	
l'eſprit de vin très rectifié -	1,3666	
le thé - - - -	1,3373	à l'unité.
la ſolution du Sel mirabilis Glauberi -	1,3421	
la ſolution du Sel digeſtif Sylvii -	1,3443	
la ſolution du Sel ammoniac affiné -	1,3473	
la ſolution du vitriol de fer -	1,3391	
l'alcali minerale ſaturatum - -	1,3572	
l'eſprit de nitre acide - -	1,3952	
l'huile de tartre per deliquium -	1,3857	
l'huile de Provence - -	1,4406	
l'huile de térébentine - -	1,4660.	

Concluſions.

1. Si nous comparons cette Table avec la précédente, nous obſerverons d'abord que la raiſon de réfraction de l'eau de puits, du vin de France, de l'eau de vie de France, de l'eſprit de vin rectifié, de

l'huile de Provence & de celle de térébentine, a été trouvée plus petite ici que par les expériences précédentes, faites avec la paire A des ménisques.

2. D'où nous concluons que les vraies valeurs des élémens $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, doivent encore différer de celles que nous avons trouvées aux §§. 30 & 31 : ce qui ne doit surprendre personne, puisque de la maniere que nous avons déterminé la valeur de la premiere expression $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ il est évident que, quoiqu'on prenne un milieu entre 6 ou 7 valeurs aussi différentes que nous les avons trouvées, ce milieu pourra encore très considérablement différer de la véritable valeur. Ensuite, pour ce qui regarde la valeur de la lettre q, comme nous l'avons déterminée en supposant la raison de réfraction de cette eau de pluie dont nous avons rempli les ménisques, égale à celle que Newton a trouvée, si cette supposition est vicieuse, la valeur de q que nous avons trouvée le sera de même.

3. Or, quoique par cette raison nous ne puissions rien conclure sur la vraie quantité de réfraction de tous ces fluides dont je me suis servi dans ces expériences, nous en pourrons toujours tirer de très belles conséquences sur le rapport que les raisons de réfraction de divers fluides tiennent entr'eux.

4. D'abord il est très évident que la quantité de réfraction de l'eau de pluie est la même que celle de l'eau distillée.

5. Ensuite, on voit par toutes ces expériences qu'il n'y a point de fluide, & probablement point de corps transparens non plus, dont la réfraction soit moindre que celle de l'eau de pluie, ou bien que celle de l'eau distillée. Il paroit surprenant qu'il n'y ait entre l'air & l'eau de pluie aucun milieu à l'égard de la raison de réfraction.

6. Après

6. Après l'eau de pluie, ſemblent ſuivre immédiatement les eaux de puits; mais la réfraction admettra probablement autant de différences, qu'il y a de puits différens: on pourra cependant conclure que la raiſon de réfraction de l'air dans de l'eau de puits eſt contenue entre les limites 1,336 à 1 & 1,337 à 1.

7. J'ai rangé dans ces Tables toutes les liqueurs fortes enſemble, & il en paroit très vraiſemblable que, plus une liqueur eſt forte, plus ſa réfraction doit être grande, de ſorte pourtant que la raiſon de réfraction de l'air dans une liqueur forte ne ſoit jamais moindre que 1, 34, & jamais plus grande que 1,37. Or Newton ayant trouvé que la raiſon de réfraction de l'air dans l'eſprit de vin étoit comme 1,3698 à 1, nous concluons que cet eſprit de vin dont Newton s'eſt ſervi dans ſon expérience doit avoir été rectifié au plus haut degré.

8. Le thé ne change que très peu l'eau à l'égard de la réfraction, dont la raiſon dans l'air pourra tout au plus être diminuée de 2 milliemes parties.

9. On voit encore qu'il n'y a probablement aucune eſpece de ſel, qui étant diſſoute dans l'eau n'en augmente la réfraction, les unes plus que les autres.

10. Les ſolutions de ſel d'urine & de vitriol ont les moindres réfractions, celles des ſels de ſaline & d'ammoniac les plus grandes: la raiſon de réfraction de l'air dans les ſolutions de ſel, ſi l'on conſerve la proportion mentionnée d'une partie de ſel dans douze parties d'eau, ſera contenue entre les limites comme 1,34 à 1 & 1,35 à 1.

11. Le vinaigre diſtillé & la ſolution de la gomme d'Arabie ont à peu près la même réfraction qu'un vin de France ordinaire, tel que celui dont je me ſuis ſervi dans mes expériences: & la réfraction du blanc d'oeuf eſt la même que celle de l'eſprit de vin rectifié.

12. L'alcali minerale ſaturatum paroit avoir la même réfraction qu'une eau de vie bien forte.

13. Suivent encore deux préparations chymiques, l'*eſprit de nitre acide* & l'*huile de tartre per deliquium*, qui à l'égard de leur réfraction ſemblent tenir un milieu entre les liqueurs fortes & les huiles.

14. Quant aux huiles, on voit très clairement que leur réfraction approche le plus de celle du verre; ſurtout l'huile de térébentine, qui, de tous les fluides dont je me ſuis ſervi dans mes expériences, a la plus grande réfraction.

Je dois avertir que je ne ſavois point, en compoſant ce Mémoire, que Newton avoit non ſeulement déterminé la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie & l'eſprit de vin, mais qu'il avoit auſſi déterminé celle de l'huile de Provence, & l'avoit trouvée comme 22 à 15, ou bien comme 1,4666 à 1, proportion qui s'accorde aſſez bien avec celle de l'huile de Provence, que nous avons trouvée par les premieres expériences. Je ne ſavois pas non plus que l'eſprit de vin dont Newton s'eſt ſervi pour faire l'expérience eût été de l'eſpece la plus rectifiée; j'en aurois pu faire un grand uſage en appliquant encore une ſeconde correction aux valeurs des quantités $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ & q, ſelon la méthode que j'ai enſeignée aux §§. 23, 24, tant pour l'une que pour l'autre paire des ménifques. Alors la premiere Table auroit aſſurément mieux accordé avec celle qui a été trouvée par les dernieres expériences.

TROISIEME MÉMOIRE
SUR
LA RÉFRACTION
DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie contenoit des eſſais pour déterminer la réfraction de pluſieurs liqueurs tranſparentes, que l'occaſion m'avoit fournie alors.

Je me ſervois pour cet effet d'une méthode tout à fait nouvelle, propoſée par mon Pere & inſérée dans le XIIeme Volume de l'Hiſtoire de notre Académie.

Comme cette méthode exige qu'on ait une ou bien quelques paires de ménifques dont les bords s'uniſſent parfaitement l'un à l'autre, & qu'une occaſion accidentelle m'en avoit fourni deux, il ne me reſtoit plus que de connoitre pour l'une & l'autre paire la valeur de deux quantités algébriques qui dépendent, tant de la réfraction du verre dont les ménifques ont été travaillés, que de leur figure.

Je me ſervois bien de divers moyens pour trouver ces deux valeurs requiſes; mais, comme tous ces moyens étoient inſuffiſans pour les connoitre avec aſſés de préciſion, les raiſons de réfraction des fluides dont je me ſuis depuis ſervi dans les expériences, étoient peu exactes & ne s'accordoient pas aſſés entr'elles; ſavoir les raiſons de réfraction des fluides, trouvées par le moyen de la premiere paire de ménifques,

(*) Lu le 21 Janvier 1762.

ques, différoient conſidérablement de celles qu'a données l'autre paire pour les mêmes fluides.

Je remarquois alors que, ſi l'on ſavoit déjà au juſte la réfraction de deux fluides différens, on pourroit réciproquement déterminer par là la vraie valeur de ces deux quantités algébriques.

J'y développois bien cette méthode, qui ſans contredit paroit la meilleure & la plus ſûre; mais je n'en pouvois pas profiter. J'ignorois qu'on avoit déjà déterminé la réfraction d'autres fluides que de l'eau de pluie & de l'eſprit de vin, & je ne pouvois pas faire uſage de ce dernier, par ce que ſa véritable eſpece m'étoit entierement inconnue.

Ayant appris depuis que, non ſeulement Hawksbée dans ſes Expériences Phyſico-méchaniques, mais déjà le grand Newton lui-même dans ſon Optique, ont donné la raiſon de réfraction d'un grand nombre de corps tranſparens, tant ſolides que fluides, je me vois en état d'apporter une correction ſuffiſante à mes déterminations précédentes: & ce ſera le but du préſent Mémoire.

Je tâcherai en premier lieu de corriger les valeurs de ces deux quantités algébriques, & j'en déterminerai enſuite avec plus d'exactitude la raiſon de réfraction de toutes les liqueurs dont je me ſuis ſervi dans les expériences précédentes.

La premiere Table ci-jointe repréſente la raiſon de réfraction de pluſieurs corps, tant ſolides que fluides, telle que Newton l'a inſérée dans ſon Optique; & la ſeconde Table donne la raiſon de réfraction de tous les corps que Hawksbée a déterminée & qu'on trouve dans ſes Expériences Phyſico-méchaniques.

J'ai réduit toutes ces raiſons à des parties décimales, en ſuppoſant toujours que le rayon ſe rompe en entrant de l'air dans l'autre milieu.

En comparant la premiere Table avec la ſeconde, on remarquera d'abord que Hawksbée fait la réfraction de l'eſprit de vin conſidérablement plus grande que Newton; quoique celui-ci ſe ſoit ſervi de l'eſpece la plus forte: je ne ſais à quoi on pourra attribuer cette différence,

rence, mais au moins, ſi l'on compare la Table de Hawksbée avec mes expériences précédentes, il eſt très probable que ce Phyſicien n'a pas été trop exact dans ſes expériences. Je vais le prouver tout à l'heure.

Hawksbée fait la réfraction du blanc-d'oeuf plus petite que celle de l'eau de vie de France: or, quelque grande ou quelque petite que ſoit cette réfraction du blanc d'oeuf, mes expériences précédentes, faites avec la premiere paire de ménifques, prouvent qu'elle doit préciſément être égale à la réfraction de l'eſprit de vin rectifié; il n'y a même aucun doute, la longueur de la lunette ayant été obſervée de part & d'autre la même: j'ai d'ailleurs pluſieurs fois répété cette même expérience, & j'ai toujours trouvé le même réſultat.

De plus, Hawksbée a trouvé la réfraction du vinaigre diſtillé égale à celle de l'eſprit de vin; ce qui eſt encore contraire aux expériences que j'ai faites avec la ſeconde paire de ménifques, & qui la font beaucoup plus petite, & ſeulement égale à la réfraction du vin de France.

J'excepte l'eſprit de nitre, pour lequel la Table de Hawksbée s'accorde aſſes bien avec la mienne.

Revenons maintenant à notre ſujet, & tâchons de corriger, par le moyen de ces deux tables, la valeur des deux quantités algébriques dont j'ai fait mention au commencement de ce Mémoire.

Soient A & B ces deux quantités algébriques, qui dépendent uniquement de la figure des ménifques & de la réfraction du verre dont ils ſont travaillés.

Soit enſuite la raiſon de réfraction de l'air dans un certain fluide comme n à 1; & nous ſavons par le Mémoire précédent que, ſi l'on remplit la cavité de deux ménifques de ce fluide, & qu'on en meſure depuis la diſtance de l'image, k, celle de l'objet étant $= f$, la réfraction du fluide ſera exprimée en ſorte qu'il ſoit:

$$n = A + B\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right);$$

d'où il eſt clair que, ſi l'on ſait pour deux fluides quelconques leur réfraction n, avec les diſtances de l'image & de l'objet, on en pourra réciproquement trouver les valeurs de A & de B.

Commençons donc par la premiere paire de nos ménisques, pour laquelle nous avons trouvé au Mémoire précédent $A = 1,3008$; $B = 1,1182$; de ſorte qu'il y ait pour la réfraction d'un fluide quelconque

$$n = 1,3008 + 1,1182\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right).$$

Maintenant, pour corriger ces nombres, choiſiſſons d'abord parmi les fluides de la Ire Table l'eau de pluie & l'eſprit de vin très rectifié, & nous voyons que Newton a trouvé la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie comme 1,3358 à 1, & dans l'eſprit de vin très rectifié comme 1,3698 à 1.

Or on ſait par les expériences précédentes, faites avec la premiere paire de ménisques, que ſi l'on en remplit la cavité d'eau de pluie, la diſtance de foyer en eſt obſervée de 31,94 pouces, & ſi l'on en remplit la cavité d'eſprit de vin très rectifié, la diſtance de foyer en eſt de 16,44 pouces.

Poſant donc pour n, k & f les valeurs de 1,3358, 31,94 & ∞ obſervées pour l'eau de pluie, nous obtiendrons cette équation

$$1,3358 = A + \frac{B}{31,94}.$$

Et ſi nous mettons pour n, k, & f les valeurs 1,3698; 16,44 & ∞ obſervées pour l'eſprit de vin très rectifié, il en réſultera cette équation

$$1,3698 = A + \frac{B}{16,44};$$

d'où l'on tirera

$B =$

$$B = \frac{1,3698 - 1,3358}{\frac{1}{16,44} - \frac{1}{31,94}} = 1,1516,$$

$$A = 1,3358 - \frac{B}{31,94} = 1,2997.$$

Mais, ſi nous choiſiſſons de la même table de Newton l'huile d'olive, nous aurons $n = 1,4666$, & par les expériences précédentes $k = 7,18$ & $f = 499$; d'où

$$1,4666 = A + B\left(\frac{1}{7,18} + \frac{1}{499}\right) = A + 0,1413B,$$

qui, étant combinée avec la premiere équation trouvée pour l'eau de pluie,

$$1,3358 = A + \frac{B}{31,94} = A + 0,0313B,$$

donnera

$$B = \frac{1,4666 - 1,3358}{0,1413 - 0,0313} = 1,1890,$$

$$A = 1,3358 - 0,0313B = 1,2986.$$

Enfin, ſi nous choiſiſſons l'huile de térébentine, dont Hawksbée a trouvé la raiſon de réfraction dans l'air comme 1 à 1,4833, à cauſe de $n = 1,4833$, & ſuivant nos expériences, $k = 6,50$; $f = 500$, nous aurons

$$1,4833 = A + B\left(\frac{1}{6,50} + \frac{1}{500}\right) = A + 0,1558B,$$

laquelle équation étant encore combinée avec celle qu'on a trouvée pour l'eau de pluie

$$1,3358 = A + 0,0313B,$$

donnera

$$B = \frac{1,4833 - 1,3358}{0,1558 - 0,0313} = 1,1847,$$

$$A = 1,3358 - 0,0313B = 1,2988.$$

Comme toutes ces valeurs, & en particulier celles qu'on a trouvées par le moyen des huiles, s'accordent aſſés bien enſemble, nous les connoitrons aſſés exactement en prenant le milieu. Les trois valeurs trouvées pour B donneront donc d'abord

$$B = 1,1751.$$

Or, pour le nombre A, ſi nous voulons conſerver la quantité de réfraction de l'eau de pluie trouvée par Newton, nous aurons

$$A = 1,3358 - 0,0313B, \text{ \& partant}$$

$$A = 1,2991.$$

Nous concluons donc pour la premiere paire de ménifques, que ſi l'on en remplit la cavité d'un certain fluide, & qu'on en obſerve enſuite la diſtance de l'image k d'un objet éloigné à la diſtance f, la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme

$$1,2991 + 1,1751 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1.$$

Par là la Table de réfraction conſtruite à la fin de mon dernier Mémoire par la premiere paire des ménifques, ſera corrigée de la façon que repréſente la troiſieme des Tables ci-jointes.

Il me reſte encore de déterminer les valeurs des nombres A & B pour la ſeconde paire de ménifques.

La maniere la plus aiſée ſera de faire ces déterminations ſur la même Table corrigée que nous venons de donner, par le moyen de la premiere paire.

Choiſiſſons donc les deux fluides extremes, c'eſt à dire l'eau de pluie comme celui de la moindre, & l'huile de térébentine comme celui de la plus grande réfraction, & nous aurons

I. pour

I. pour l'eau de pluie

$$n = 1,3358; \quad k = 40,06; \quad f = \infty,$$

II. pour l'huile de térébentine

$$n = 1,4822; \quad k = 6,75; \quad f = 499; \quad \text{donc}$$

$$1,3358 = A + \frac{B}{40,06} = A + 0,02496\,B,$$

$$1,4822 = A + B\left(\frac{1}{6,75} + \frac{1}{499}\right) = A + 0,15015\,B;$$

$$\text{d'où} \quad B = \frac{1,4822 - 1,3358}{0,15015 - 0,02496} = 1,1694,$$

$$A = 1,3358 - 0,02496\,B = 1,3066.$$

De là nous concluons que, ſi l'on remplit la cavité entre les deux ménisques de la ſeconde paire, d'un fluide quelconque, & qu'on en meſure enſuite la diſtance de l'image k d'un objet éloigné à la diſtance f du verre, la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme

$$1,3066 + 1,1694\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1.$$

Enfin, en corrigeant par le moyen de cette formule la réfraction des fluides trouvée à la ſuite de mes expériences précédentes, cela a donné la quatrieme des Tables ſuivantes.

QUATRIEME MÉMOIRE.

EXPÉRIENCES

SUR LA RÉFRACTION DE QUELQUES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Expériences faites avec la paire B *de ménisques.*

Aprés avoir rempli la cavité des ménisques,	j'ai observé la longueur de la lunette de	d'où retranchant 1.56 pouces, qui est la distance de foyer de l'oculaire, on aura *k* la distance de foyer de l'objectif.	
	en pouces.		
d'eau de puits	42,50	40,94	pouces.
d'une solution de nitre ▽ℨj ☌ depur. gr. XII	38,75	37,19	
dito ▽ℨj ☌ depur. gr. XXIV	36.75	35,19	
dito ▽ℨj ☌ depur. gr. XLVIII	32,00	30,44	
dito ▽ℨj ☌ depur. ℨij	26,25	24,69	
d'une infusion de persil	42,50	40,94	
d'une infusion de feuilles de pêcher	41,00	39,44	
d'une infusion de safran	41,50	39,94	
d'une infusion de coquilles de noix	42,00	40,44	
d'eau de Zelter	42,25	40,69	
d'eau d'Eger	37,62	36,06	
de liqueur anodine	21,56	20,00	
d'esprit de camphre	18,50	16,94	
d'esprit de savon de Saxe	13,00	11,44	

la distance de l'objet étant infinie.

En

(*) Lu le 21 de Janvier 1762.

En faiſant ces expériences, je m'étois propoſé un double deſſein. Je voulois en premier lieu examiner, comment la réfraction d'une ſolution de ſel change en y augmentant peu à peu la doſe de ſel: je me ſuis ſervi pour cet effet du nitre affiné au plus haut degré en le diſſolvant dans de l'eau de puits.

Je voulois enſuite voir quel effet produiſent dans la réfraction les infuſions de diverſes herbes; je verſai dans cette intention de l'eau bouillante ſur du perſil, des feuilles de pêcher; du ſafran & des coquilles de noix; & après les avoir ſuffiſamment fait tirer, je les laiſſai refroidir.

Si l'on compare ces expériences avec celles que j'ai faites ci-deſſus avec la même paire de ménisques, on ne ſera pas médiocrement ſurpris, que pour l'eau de puits, la longueur de la lunette ait été obſervée conſidérablement plus grande ici que dans l'expérience précédente.

C'eſt pourquoi il me convient de remarquer que ces expériences ont été faites dans un tems extrêmement chaud, ſavoir le 16 d'Aout de l'année 1761, vers midi, où le Thermometre montroit 31 degrés de Réaumur au deſſus du point de la congélation; au lieu que les expériences précédentes ont été faites dans un tems très tempéré, ſavoir le 6 d'Avril de la même année, la hauteur du Thermometre ayant été alors tout au plus de 12 degrés.

L'on pourroit ſoupçonner que le changement que nous venons d'obſerver dans la longueur de la lunette pour l'eau de puits, ne ſauroit être que l'effet de la chaleur: ce n'eſt encore là qu'un ſoupçon; je tâcherai dans un autre Mémoire non ſeulement de le confirmer par des preuves inconteſtables, mais encore, de déterminer autant qu'il me ſera poſſible par des expériences la quantité de l'accroiſſement que prend la réfraction des fluides dans divers degrés de chaleur.

Faiſons pour le préſent abſtraction de la chaleur, & déterminons pour tous ces fluides les raiſons de réfraction.

Or.

Or, ayant trouvé par mes recherches précédentes que, ſi l'on remplit la cavité des ménifques marqués par la lettre B d'un fluide quelconque, & qu'on en obſerve enſuite la diſtance de foyer k, la réfraction de ce fluide ſera telle que le ſinus d'incidence ſoit au ſinus de réfraction comme

$$1,3066 + \frac{1,1694}{k} \text{ à } 1,$$

en ſuppoſant que le rayon ſe rompe en paſſant de l'air dans ce fluide.

Donc, ſi l'on ſubſtitue à k ſucceſſivement tous les nombres que nous venons d'obſerver pour tous les fluides marqués dans les expériences préſentes, nous en calculerons aiſément la raiſon de réfraction, comme on le peut voir par la cinquieme Table.

Donc, pour ce qui regarde les différentes ſolutions de nitre, on voit que la 41 partie du nitre augmente la réfraction de l'eau

de	0,0029
la 21 partie de	0,0047
la 11 partie de	0,0099
& la 5 partie de	0,0189;

d'où l'on peut conclure que l'accroiſſement de la réfraction d'une ſolution eſt à peu près proportionelle à la quantité du ſel diſſous: ici cet accroiſſement fait environ la dixieme partie de la quantité du nitre qui eſt diſſous.

On voit enſuite que la réfraction des infuſions eſt peu différente de celle de l'eau pure, ſurtout la réfraction de l'infuſion de perſil, qui paroit lui être égale: & pour l'infuſion de feuilles de pêcher, la réfraction en eſt encore la plus grande.

Les

Les deux eſpeces d'eaux minérales, dont je me ſuis ſervi dans ces expériences, ont de même une réfraction à peu près égale à celle de l'eau de puits.

Enfin la liqueur anodine, l'eſprit de camphre & celui de ſavon de Saxe ont une réfraction très grande, ſurtout le dernier, dont la réfraction approche beaucoup de celle des huiles.

TABLES
DE
RÉFRACTION DE PLUSIEURS MILIEUX
TRANSPARENS. (*)

I. Table de Réfraction de quelques milieux tranſparens, ſelon Newton.

Voyez ſon Optique L. II. P. III. Prop. 10.

Le rayon paſſant de l'air dans	le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction comme	
Le Pſeudo-Topaze jaune	1,6429	
l'ether ou l'air raréfié	0,9997	
le verre d'antimoine	1,8889	
le ſelénite	1,4878	à l'unité
le verre ordinaire	1,5500	
le cryſtal de roche	1,5620	
le cryſtal d'Islande	1,6666	
le ſel de roche	1,5455	
l'alun	1,4577	
le borax	1,4667	
le ſalpetre	1,5238	
le vitriol	1,5000	
l'huile de vitriol	1,4285	
l'eau de pluie	1,3358	
la gomme d'Arabie	1,4771	
l'eſprit de vin très rectifié	1,3698	à l'unité
le camphre	1,5000	
l'huile d'olive	1,4666	
l'huile de lin	1,4814	
l'eſprit de térébentine	1,5625	
l'ambre jaune	1,5556	
le diamant	2,4390	

II. Ta-

(*) Préſenté à l'Académie le 21 de Janvier 1762.

II. Table de Réfraction de pluſieurs fluides, trouvée par Hawksbée.

Voyez ſes Expériences Phyſico-méchaniques.

Le rayon paſſant de l'air dans	Le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction comme
l'eau	1,3359
l'eſprit de miel	1,3359
l'eſprit du ſel ammoniac	1,3377
l'eſprit acide d'ambre	1,3377
l'eſprit de corne de cerf	1,3390
l'urine humaine	1,3419
le blanc d'oeuf	1,3511
la gelée de corne de cerf	1,3541
l'eau de vie de France	1,3626
l'eſprit de vin	1,3721
le vinaigre diſtillé	1,3721
la gomme ammoniac	1,3723
l'eau régale	1,3898
l'eau régale compoſée d'eau forte & de l'X	1,3964
l'eau forte	1,4044
l'eſprit de nitre	1,4076
l'humeur criſtalline	1,4635
le beurre d'antimoine	1,6831

à l'unité à l'unité

II. Table de Réfraction de pluſieurs fluides, trouvée par Hawksbée.

Le rayon paſſant de l'air dans	Le ſinus d'incidence ſera à celui de rétraction comme	
l'huile de vitriol	1,4262	
l'huile de cire	1,4524	
l'huile de lavande	1,4690	
l'huile de romarin	1,4719	
l'huile d'origan	1,4770	à l'unité
l'huile de genevre	1,4799	
l'huile d'orange	1,4833	
l'huile de térébentine	1,4833	
l'huile de ſaviner	1,4857	
l'huile de fleur de muſcade	1,4878	
l'huile de menthe	1,4911	
l'huile d'ambre	1,5010	
l'huile de cumin	1,5088	
l'huile de fenouil	1,5114	
l'huile de girofle	1,5136	à l'unité
l'huile d'anis	1,5191	
l'huile de canelle	1,5340	
l'huile de ſaſſafras	1,5443	

III. Table de Réfraction de quelques fluides, trouvée par le moyen de la premiere paire de ménisques.

Le rayon paſſant de l'air dans	Le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction comme	
l'eau diſtillée	1,3358	
l'eau de pluie	1,3358	
l'eau de puits	1,3366	
le vin de France	1,3453	
l'eau de vie de France	1,3603	
une eſpece plus forte	1,3646	
l'eſprit de vin rectifié	1,3685	à l'unité
l'eſprit de vin très rectifié	1,3706	
le blanc d'oeuf	1,3685	
le vinaigre diſtillé	1,3442	
une ſolution de gomme d'Arabie	1,3467	
une ſolution de ſucre blanc ▽ pl ℥j ff ℈ij	1,3457	
une ſolution de ſel de ſalines ▽ pl ℥j ⊖ ℈j	1,3477	à l'unité
une ſolution de ſel d'urine ▽ pl ℥j ⊖⊡ ℈ij	1,3400	
l'huile de Provence	1,4651	
l'huile de térébentine	1,4822	

NB. Le ſel de ſalines & le ſel d'urine ont été affinés par la double cryſtalliſation.

IV. Table de Réfrection de quelques fluides, trouvée par le moyen de la ſeconde paire de ménifques.

Le rayon paſſant de l'air dans		Le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction comme	
l'eau diſtillée		1,3358	
l'eau de pluie		1,3358	
l'eau de puits		1,3362	
le vin de France		1,3458	
l'eau de vie de France		1,3600	
une eſpece plus forte		1,3618	
l'eſprit de vin rectifié		1,3683	
l'eſprit de vin très rectifié		1,3705	
le thé		1,3376	
l'alcali minerale ſaturatum		1,3600	
l'eſprit de nitre acide		1,4025	
une ſolution du ſel mirabilis Glauberi	▽ ℥j ⊖Gl. ℈ij	1,3430	
une ſolution du ſel digeſtif Sylvii	▽ ℥j ⊖Sgl. ℈ij	1,3454	
une ſolution de ſel ammoniac	▽ ℥j ✶ ℈ij	1,3488	
une ſolution de vitriol de fer	▽ ℥j ☉₂ ♂ ℈j	1,3395	
l'huile de tartre per deliquium		1,3917	
l'huile de Provence		1,4648	
l'huile de térébentine		1,4822	

à l'unité à l'unité

V. Table de Réfraction de quelques fluides,
trouvée par le moyen de la ſeconde paire de ménisques
le 16. d'Aout 1761,

la hauteur du thermometre ayant été à 31 degrés de Réaumur au deſſus du point de congélation.

Le rayon paſſant de l'air dans	Le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction comme	
l'eau de puits	1,3351	
quatre ſolutions différentes de nitre		à l'unité
▽ℨj ☉ depuratiſſ. gr. XII	1,3380	
▽ℨj ☉ depuratiſſ. gr. XXIV	1,3398	
▽ℨj ☉ depuratiſſ. gr. XXXXVIII	1,3450	
▽ℨj ☉ depuratiſſ. ℨij	1,3540	
quatre infuſions différentes		
de perſil	1,3351	
de coquilles de noix	1,3355	
de ſafran	1,3359	à l'unité
de feuilles de pêcher	1,3363	
l'eau de Zelter	1,3353	
l'eau d'Iger	1,3358	
la liqueur anodine	1,3650	
l'eſprit de camphre	1,3757	
l'eſprit de ſavon de Saxe	1,4088	

CIN-

CINQUIEME MÉMOIRE.

DE L'INFLUENCE DE LA CHALEUR SUR LA RÉFRACTION DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Le grand Newton a déjà ſoupçonné que les divers degrés de chaleur pouvoient bien avoir quelque influence ſur la force réfractive des corps tranſparens: mais la méthode dont il ſe ſervoit pour déterminer en général la réfraction que ſouffre un rayon de lumiere en paſſant d'un milieu dans un autre, étoit tout à fait inſuffiſante pour s'en convaincre.

Mes dernieres expériences ſur la réfraction des fluides au contraire non ſeulement confirment cette opinion de Newton, mais elles font encore voir que la méthode de mon Pere, dont je me ſuis ſervi pour les faire, a entr'autres cet avantage, qu'elle eſt très propre à faire connoitre plus exactement de quelle façon la chaleur influe ſur la quantité de réfraction.

Je tâcherai dans ce Mémoire-ci de mettre cette influence de la chaleur ſur la réfraction des rayons dans un plus grand jour, en commençant par expoſer les expériences mêmes que j'ai faites à ce deſſein.

PRE-

(*) Lu le 11 de Mars 1762.

PREMIERE PARTIE,

contenant les Expériences.

1re *Expérience.*

Je trempai une lentille ſimple objective dans de l'eau bouillante, juſqu'à ce qu'elle en eût acquis le degré de chaleur; j'en meſurai enſuite, auſſi vite qu'il me fut poſſible, la diſtance de foyer, & je la trouvai de 16 pouces.

Or, après avoir laiſſé refroidir cette lentille, juſqu'à ce qu'elle eût le degré de chaleur de l'air de dehors, j'obſervai ſa diſtance de foyer de 16 pouces & $\frac{1}{4}$.

Je fis cette expérience le 22 d'Aout de l'année 1761 au matin, la hauteur du Thermometre ayant été obſervée de 14 degrés de Réaumur.

Comme ce Thermometre marque 80 degrés pour la chaleur de l'eau bouillante, & 0 au point de congélation, on voit par cette expérience que $80 - 14 = 66$ degrés de plus au Thermometre de Réaumur ont produit, ſur une lentille de 16 pouces de foyer, une différence d'$\frac{1}{4}$ de pouce, dont la diſtance de foyer a été diminuée.

2de *Expérience.*

Je remplis la cavité de la ſeconde paire de méniſques d'eau bouillante, & j'en obſervai enſuite la diſtance de foyer, que je trouvai de 45 pouces; or, après l'avoir laiſſé refroidir, cette diſtance de foyer avoit diminué juſqu'à 41,44 pouces.

Cette expérience fut faite le 23 d'Aout de la même année, à midi, la hauteur du Thermometre ayant été obſervée de 34 degrés.

Donc $80 - 34 = 46$ degrés du Thermometre de Réaumur ont diminué la diſtance de foyer de notre lentille compoſée de 3, 56 pouces.

3me Expérience,

faite le 8. de Décembre 1761, le matin, la hauteur du Thermometre ayant été obſervée de 3 degrés au deſſous du point de congélation.

Je tins une lentille ſimple objective au deſſus de l'eau bouillante, juſqu'à ce que le Thermometre, qui étoit tout à côté de la lentille, montrât 30 degrés au deſſus du point de congélation; j'en obſervai enſuite la diſtance de foyer, que je trouvai de 48,31 pouces.

Après avoir laiſſé refroidir cette lentille, juſqu'à ce que le Thermometre ne montrât plus que 8 degrés de chaleur, la diſtance de foyer étoit augmentée d'$\frac{1}{4}$ de pouce, & enfin

après que cette lentille eut acquis le même degré de chaleur que l'air de dehors, ſavoir de 3 degrés au deſſous du point de congélation, je trouvai ſa diſtance de foyer encore augmentée d'$\frac{1}{4}$ de pouce.

Donc $30 + 3 = 33$ degrés de chaleur de plus ont diminué la diſtance de foyer de notre lentille d'un demi-pouce.

4me Expérience,

faite le même jour, la hauteur du Thermometre étant 3 degrés au deſſous du point de congélation.

Je remplis d'eau de puits la cavité entre les deux ménifques de la premiere paire.

Je tins enſuite cette lentille compoſée au deſſus de l'eau bouillante, juſqu'à ce que le Thermometre, qui étoit tout à côté, marquât 30 degrés; alors obſervant la diſtance de foyer de cette lentille, je la trouvai de 37,56 pouces.

Puis ayant remis à l'air la lentille avec le thermometre, j'attendis que le Thermometre fût tombé juſqu'au 6eme degré au deſſus du point de congélation, & je trouvai le foyer de la lentille encore à une diſtance de 32,44 pouces.

En-

Enſuite, la hauteur du Thermometre ayant été d'un demi-degré au deſſus du point de congélation, la diſtance de foyer ne fut plus que de 31,44 pouces.

Enfin, le Thermometre marquant l'état de l'air de dehors, ſavoir 3 degrés au deſſous du point de congélation, l'eau enfermée s'étant changée en glace avoit perdu ſa tranſparence.

Or la lentille compoſée même conſerva juſqu'à ce point de congélation ſa diſtance de foyer de 31,44 pouces.

Nous voyons par là, que la diſtance de foyer de cette lentille avoit augmenté de 6,12 pouces, ſavoir du terme de congélation de l'eau enfermée juſqu'au 30eme degré au deſſus du point de congélation.

5eme Expérience,

faite le même jour, & la hauteur du Thermometre étant toujours de 3 degrés au deſſous du point de congélation.

Après avoir rempli la cavité des mêmes ménifques d'eau de vie de France, j'en obſervai d'abord la diſtance de foyer, & je la trouvai de 18,31 pouces. Enſuite, ayant chauffé cette lentille compoſée, juſqu'à ce que le Thermometre marquât 30 degrés au deſſus du point de congélation, j'obſervai que la diſtance de foyer en étoit devenue plus grande de 7,13 pouces.

6eme Expérience,

faite le même jour, & la hauteur du Thermometre étant toujours la même.

Je remplis la cavité des mêmes ménifques d'une ſolution de ſel de ſalines, & je trouvai que la diſtance de foyer de cette lentille compoſée étoit d'abord de 21,81 pouces.

Ayant chauffé cette même lentille, juſqu'à ce que la hauteur du Thermometre fût de 30 degrés au deſſus du point de congélation, la diſtance de foyer en fut augmentée de 2,88 pouces.

7eme Expérience,

faite le 10. de Décembre 1761 au matin, la hauteur du Thermometre ayant été de 8 degrés au deſſous du point de congélation.

Je remplis la cavité des mêmes ménifques, d'huile d'olive, & j'en obſervai le foyer à une diſtance de 6,75 pouces du verre.

Je mis alors cette lentille compoſée avec mon Thermometre à l'ouverture d'un fourneau, dont le feu étoit déjà éteint depuis plus d'une heure, & lorſque le Thermometre marqua 50 degrés au deſſus du point de congélation, je trouvai la diſtance de foyer de la lentille de 7,37 pouces.

Donc 50 + 8 = 58 degrés du Thermometre de Réaumur ont augmenté la diſtance de foyer de notre lentille compoſée de 0,62 pouces.

8eme Expérience,

faite le même jour, la hauteur du Thermometre étant toujours 8 degrés au deſſous du point de congélation.

Après avoir rempli d'eau d'Eger la cavité des mêmes ménifques, je fis comme dans l'expérience précédente, & je trouvai ce qui ſuit: Le Thermometre étant au 8eme degré au deſſous du point de congélation, la diſtance de foyer de la lentille compoſée fut obſervée de 36, 50 pouces, &

lorſque le Thermometre étoit au 50eme degré au deſſus du point de congélation, cette diſtance de foyer fut de 53 pouces.

Donc 50 + 8 = 58 degrés du Thermometre ont augmenté la diſtance de foyer de notre lentille compoſée de 16,50 pouces.

Réflexions générales.

I. La premiere & la troiſieme Expérience font voir, que la diſtance de foyer d'une ſimple lentille de verre diminue, à meſure que la chaleur en augmente.

II. Pour

II. Pour approfondir la cauſe de cette diminution, je remarque d'abord, qu'elle ne ſauroit être attribuée au changement de volume que tous les corps ſubiſſent étant expoſés à différens degrés de chaleur, & qu'on a meſuré par le Pyrometre. Car, d'un côté, ces changemens dans le volume des corps ſont incomparablement plus petits que ceux que je viens de découvrir dans la diſtance de foyer, & de l'autre côté ils devroient produire un effet tout à fait contraire; la diſtance de foyer des verres en devroit être augmentée par la chaleur, & diminuée par le froid, pendant que le contraire arrive actuellement.

III. Il n'y a donc aucun doute que ces changemens obſervés dans la diſtance de foyer ne ſoient cauſés par une différente réfraction dans le verre même; en ſorte que la chaleur augmente la force réfractive du verre, & vraiſemblablement auſſi de tous les autres corps tranſparens, pendant que le froid diminue cette force.

IV. On comprend aiſément que le changement dans l'air même ne ſauroit être ici d'aucune conſidération, puiſque la réfraction des rayons, lorſqu'ils paſſent du vuide dans un air quoique très groſſier, eſt preſque tout à fait inſenſible.

V. Comme on a vu par la premiere & la troiſieme Expérience, que la diſtance de foyer d'une lentille ſimple de verre diminue à meſure que la chaleur en augmente, on ne ſera pas peu ſurpris d'apprendre par les autres expériences, qu'une lentille compoſée de deux ménifques de verre, dont la cavité eſt remplie d'un fluide quelconque, acquiert une diſtance de foyer plus grande lorſqu'on augmente la chaleur, & plus petite lorſqu'on la diminue.

VI. Mais ici on ſe précipiteroit dans ſon jugement, ſi l'on en vouloit conclure, que l'eau, ou bien tel autre fluide quelconque dont on a rempli les ménifques, eſt d'une nature contraire au verre, & qu'elle produit une moindre réfraction lorſqu'il fait chaud, que lorſqu'il fait froid. La diſcuſſion de ces Expériences demande

un examen beaucoup plus ſoigneux, avant qu'on puiſſe prononcer là-deſſus. Je réſerve cette recherche à la fin de ma ſeconde Partie.

SECONDE PARTIE.

Eſſai pour déterminer par les Expériences précédentes la quantité de l'influence de la chaleur ſur la force réfractive du verre & des fluides.

D'abord, pour déterminer l'augmentation que reçoit la réfraction du verre dans les divers degrés de chaleur, je commence par l'examen de la premiere & de la troiſieme Expérience, dont le précis eſt contenu en ce peu de mots.

I. Exp. *Un verre objectif, dont la diſtance de foyer étoit de* $16\frac{1}{4}$ *pouces, le degré de chaleur étant* 14 *degrés, n'avoit que* 16 *pouces de foyer, lorſqu'il fut échauffé au degré* 80. Donc un accroiſſement de 66 degrés de chaleur a diminué la diſtance de foyer de ſa 65eme partie.

III. Exp. *Un verre objectif, dont la diſtance de foyer étoit de* 49 *pouces, le degré de chaleur étant* — 3, *n'avoit que* $48\frac{1}{2}$ *pouces de foyer, lorſqu'il fut échauffé à* 30 *degrés de chaleur.* Donc un accroiſſement de 33 degrés dans la chaleur a produit une diminution dans la diſtance de foyer qui en étoit la 97eme partie.

Réflexions.

I. Comme 66 degrés de chaleur ont produit $\frac{1}{65}$ partie de diminution dans la diſtance de foyer, 33 degrés n'en auroient du produire que $\frac{1}{130}$; or ils ont produit $\frac{1}{97}$. L'on pourroit en conclure que, lorſqu'il fait bien froid, un même changement dans le thermometre eſt plus efficace ſur la diſtance de foyer des verres, que lorſqu'il fait chaud. Mais il faut bien conſidérer, que ces ſortes d'expériences ne ſont pas ſuſceptibles d'autant de préciſion qu'il en faudroit pour s'aſſurer ſur ce point. Il ſe pourroit bien à la rigueur, que les 66 degrés euſſent cauſé un changement de $\frac{1}{260}$, & les 33 degrés un de $\frac{1}{130}$. Un grand

grand nombre d'expériences faites en différentes ſaiſons décideroient peut-être cette queſtion, ſurtout ſi l'on employoit des verres objectifs d'une plus grande diſtance de foyer.

II. Ici il ſuffit d'avoir inconteſtablement prouvé par des expériences, que la chaleur diminue les diſtances de foyer des verres, & que le froid les augmente: & je ne m'écarterai pas ſenſiblement de la vérité, en ſuppoſant que 66 degrés de changement ſur le Thermometre de Réaumur en produiſent un de $\frac{1}{60}$ dans la diſtance de foyer d'un verre, & que 33 degrés ſur le Thermometre répondent à un changement de $\frac{1}{120}$ dans la diſtance de foyer. D'où l'on peut aſſés probablement conclure que N degrés ſur le Thermometre répondent à $\frac{N}{3960}$, ou bien à $\frac{N}{4000}$ de changement ſur la diſtance de foyer.

III. Par conſéquent, ſi dans une température où le Thermometre de Réaumur eſt à M degrés, la diſtance de foyer d'un verre eſt $= k$, nous ſerons en état d'aſſigner la diſtance de foyer de ce même verre pour toute autre température. Car, quand le même Thermometre ſera à M $+$ N degrés, la diſtance de foyer de notre verre ſera $=$

$$k\left(1 + \frac{N}{4000}\right).$$

Or, pour un plus grand froid, lorſque le Thermometre montre M $-$ N degrés, la diſtance de foyer ſera

$$k\left(1 + \frac{N}{4000}\right).$$

IV. Maintenant, pour connoître l'augmentation de la force réfractive du verre, qui réſulte de cette variation que nous venons d'obſerver dans la diſtance de foyer des lentilles, poſons, pour la température où le Thermometre de Réaumur montre M degrés, la raiſon de réfraction de l'air dans le verre comme m à 1, & que les lettres a

&

& b marquent les rayons des deux faces du verre. Soit enſuite la diſtance de foyer de ce verre $= k$. Or, pour une autre température, où le thermometre montre M $+$ N degrés, indiquons les mêmes quantités par les lettres m', a', b', & k'.

V. Cela poſé, les principes de Dioptrique nous fourniſſent ces équations:

$$(m-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k} \quad \& \quad (m'-1)\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}\right)=\frac{1}{k'}.$$

Or nous venons de voir que $k' = k\left(1-\frac{N}{4000}\right)$,

& partant $\frac{1}{k'} = \frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}\right)$;

enſuite, puiſque la plus grande chaleur de M $+$ N degrés augmente les dimenſions du verre, ſuppoſons

$$a' = a\left(1+\frac{N}{\lambda}\right) \quad \& \quad b' = b\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

où λ marque un nombre extrêmement grand, qui paſſe bien ſelon toute apparence un million. Nous aurons donc

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{N}{\lambda}\right),$$

& partant notre ſeconde équation prendra cette forme:

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{N}{\lambda}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{N}{4000}\right), \text{ ou bien}$$

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}\right)\left(1+\frac{N}{\lambda}\right), \text{ ou encore}$$

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}+\frac{N}{\lambda}\right).$$

Cet-

Cette équation étant diviſée par la premiere fournit

$$\frac{m' - 1}{m - 1} = 1 + \frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}, \text{ ou}$$

$$\frac{m' - m}{m - 1} = \frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}.$$

VI. Donc, puiſque pour la réfraction du verre on a $m = 1,54$ à peu près, ce qui ſuffit, puiſqu'il s'agit ici principalement du changement que la réfraction éprouve par les différens degrés de chaleur, nous aurons

$$m' - m = \frac{0,54\ N}{4000} + \frac{0,54\ N}{\lambda},$$

ou bien, ſans nous arrêter à quelque hypotheſe, nous aurons en général $m' = m + (m - 1)\left(\frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}\right)$.

VII. Si je ſuppoſois $\lambda = 400000$, cette formule deviendroit $m' = m + (m - 1).\frac{N}{3960}$. Or il s'en faut beaucoup que nous ſoyons ſi aſſurés du nombre 4000, que celui de 3960 ne puiſſe auſſi bien avoir lieu: donc, puiſque le nombre λ eſt probablement plus petit que 400000, il eſt évident que nous pouvons hardiment négliger la fraction $\frac{N}{\lambda}$, & nous le pourrions, quand même le nombre λ ſeroit encore plus petit que 400000. Par conſéquent, le changement que le verre éprouve par les différens degrés de chaleur, n'eſt abſolument d'aucune conſéquence; & dans ces recherches nous pourrons entierement négliger l'effet de la chaleur ſur le volume du verre, de même que ſur les autres corps tranſparens. En tout cas, au lieu de la fraction $\frac{1}{4000}$ conclue par les expériences, nous pourrions nous ſervir d'une fraction tant ſoit peu plus grande $\frac{1}{3960}$, qui conviendroit auſſi bien aux expériences.

VIII. Cependant, pour ne laiſſer aucun doute ſur cet article, j'obſerve que dans le Thermometre de M. de l'Isle chaque degré répond à un changement de $\frac{1}{15000}$ partie, produit dans le volume entier du Mercure ſelon les trois dimenſions à la fois; donc chaque dimenſion n'en reçoit un que de $\frac{1}{45000}$ partie. Et partant, ſi le verre à cet égard étoit ſemblable au vif-argent, chaque degré du Thermometre de M. de l'Isle changeroit les rayons des faces d'un verre de $\frac{1}{45000}$ partie. Or les degrés du Thermometre de Réaumur étant préciſément deux fois plus grands, un tel degré y produiroit un changement de $\frac{1}{22500}$ partie, ou bien le nombre λ ſeroit $= 15000$; donc $\frac{1}{45000} + \frac{1}{22500}$ donneroit $\frac{1}{15000}$. Mais le verre eſt ſans doute moins aſſujetti à de tels changemens que le Mercure.

IX. En établiſſant donc cette équation:

$$m' - m = (m - 1)\frac{N}{3600},$$

puiſque $m - 1 = 0,54$, on aura

$$m' - m = \frac{N}{6666} = \frac{3N}{20000} = 0,00015\,N,$$

ou bien chaque degré de chaleur ſur le Thermometre de Réaumur produiroit une augmentation de 0,00015 dans le nombre m, dont la valeur moyenne eſt 1,54. Donc, lorſque la chaleur eſt augmentée de 66 degrés, l'accroiſſement du nombre m doit être $= 0,01$, ou bien ce nombre de 1,54 devient 1,55.

Maintenant, pour connoître de quelle maniere la chaleur influe ſur la force réfractive des fluides, il ſuffira d'avoir en général examiné la ſeconde & la quatrieme Expérience; car, quoique ces expériences ne regardent que l'eau pure, on en pourra toûjours conclure par analogie la quantité du changement des autres fluides.

Voici d'abord le contenu de ces deux Expériences.

II. Exp. *Un verre objectif composé de deux ménisques de la seconde paire, dont la cavité étoit remplie d'eau bouillante, avoit son foyer à 45 pouces; or, après l'avoir laissé refroidir jusqu'à 34 degrés du Thermometre de Réaumur, la distance de foyer fut 41 ½ pouces.*

Donc 46 degrés de chaleur de ce Thermometre avoient augmenté la distance de foyer de sa $\frac{1}{9}$ partie; & partant N degrés l'augmenteront de sa partie $\frac{N}{419}$.

IV. Exp. *En se servant de l'autre objectif composé de deux ménisques de la premiere paire, dont la cavité étoit remplie d'eau; le Thermometre montrant $\frac{1}{2}$ degré, la distance de foyer fut observée de 31 ½ pouces.* Ensuite, ayant chauffé cet objectif jusqu'à 30 degrés, la distance de foyer s'est trouvée de 37 ½ pouces; & partant 29 ½ degrés de plus de chaleur ont augmenté la distance de foyer de 6 pouces, ou bien de $\frac{4}{171}$ partie; donc N degrés produiroient un changement de $\frac{N}{155}$, qui est certainement très considérable.

Examen.

I. Posons donc, pour entreprendre cet examen, lorsque le Thermometre de Réaumur montre M degrés, la raison de réfraction de l'air dans le verre comme m à 1, & de l'air dans l'eau comme n à 1, & que les rayons des quatre faces de nos deux ménisques soient exprimés par les lettres a, b, c, d, où a & d se rapportent aux faces extérieures entant que convexes, & b & c aux internes concaves. Soit enfin la distance de foyer de toute la lentille composée $= k$. Or, pour le cas où le même Thermometre montre M + N degrés, au lieu de ces mêmes lettres, j'écrirai

$$m', n', a', b', c', d' \text{ \& } k'.$$

II. Cela posé, les principes de Dioptrique nous fournissent ces deux équations:

$$(n-1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m-1)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k},$$

$$(n'-1)\left(\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)-(m'-1)\left(-\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}\right)=\frac{1}{k'}.$$

Suppoſons comme ci-deſſus

$$a'=a\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ b'=b\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ c'=c\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ d'=d\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

pour réduire notre ſeconde équation à cette forme:

$$(n'-1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m'-1)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k'}\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

& partant

$$(n'-n)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m'-m)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k'}\left(1+\frac{N}{\lambda}\right)-\frac{1}{k}.$$

III. Maintenant, pour la premiere de ces deux dernieres expériences, nous avons $k'=k\left(1+\frac{N}{419}\right)$,

$$\text{ou bien}\quad \frac{1}{k'}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{N}{419}\right).$$

Or, par le devis des deux ménifques dont cet objectif étoit compoſé, nous avons

$a=-\frac{1}{12,5}$ pouces; $b=\frac{1}{8}$; $c=2$ & $d=2$ à peu près;

donc $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$ & $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=18,5$.

Prenant donc $m=1,54$ & $n=1\frac{1}{3}$, nous aurons

$$\frac{1}{k}=10-12,96=-2,96,\ \text{& partant}$$

$$\tfrac{9}{10}(n' - n) - \tfrac{8}{15}(m' - m) = \tfrac{3}{250}\left(\frac{N}{\lambda} - \frac{N}{419}\right).$$

IV. Ayant donc trouvé par les premieres expériences $m' - m = \frac{N}{6666}$, nous obtiendrons pour la réfraction de l'eau :

$$\tfrac{9}{10}(n'-n) = \frac{N}{12500} + \tfrac{3}{250}\left(\frac{N}{\lambda} - \frac{N}{419}\right) = \frac{N}{12500} - \frac{N}{34916} + \frac{3N}{250\lambda},$$

donc $n' - n = \frac{N}{11250} - \frac{N}{31425} + \frac{N}{75\lambda}$, ou bien

$$n' - n = \frac{N}{17523} + \frac{N}{75\lambda};$$

où, à cauſe de λ, le nombre 17523 peut être pris un peu plus petit.

V. De là il eſt clair que, nonobſtant que les expériences ayent produit un effet contraire, la chaleur augmente la réfraction de l'eau auſſi bien que celle du verre : & pour pouvoir mieux comparer ce double effet, je me ſervirai pour le verre de la formule moins limitée $m' - m = (m - 1)\frac{N}{3600}$; & puiſque pour l'eau j'ai ſuppoſé $n - 1 = \frac{1}{3}$, le changement dans la réfraction de l'eau ſera exprimé de cette ſorte : $n' - n = (n - 1)\frac{N}{5841}$;

où, au lieu du nombre 5841, il faudra en prendre un plus petit.

VI. On voit donc que pour le verre la valeur de la formule $\frac{m' - m}{m - 1} = \frac{N}{3600}$ eſt plus grande que pour l'eau celle de la formule ſemblable $\frac{n' - n}{n - 1} = \frac{N}{5841}$. Mais je remarque de plus que les va-

leurs de ces deux formules $\frac{m' - m}{(m-1)^2}$ & $\frac{n' - n}{(n-1)^2}$ deviennent à peu près égales l'une & l'autre $= \frac{N}{1945}$,

Ne pourroit-on pas conclure de là, que les véritables changemens dans la réfraction de tous les corps tranſparens doivent être eſtimés par la forme $\frac{m' - m}{(m-1)^2}$, qui repréſente le différentiel de la formule $\frac{1}{m-1}$? De ſorte que cette expreſſion $\frac{1}{m-1}$ ſouffriroit pour tous les corps tranſparens le même changement. Cependant cette derniere détermination n'eſt qu'une conjecture, mais qui mérite aſſés d'attention pour l'examiner plus ſoigneuſement.

Il conviendroit pour cet effet de faire un grand nombre d'expériences au ſujet du changement produit par les différentes températures ſur la diſtance de foyer des lentilles ſimples, pour en pouvoir enſuite conclure avec plus d'exactitude, qu'il ne m'a été permis ici, l'augmentation qui en réſulte dans la force réfractive du verre. Enſuite, paſſant aux autres expériences par leſquelles on obſervera les changemens produits par les différens degrés de chaleur dans la diſtance de foyer des objectifs compoſés de deux ménifques de verre & d'un fluide quelconque enfermé entre deux, on ſera non ſeulement en état de déterminer par là la variation qui en réſulte dans la force réfractive de ces fluides, mais on ne manquera pas encore de faire pluſieurs belles découvertes concernant la nature eſſentielle de la réfraction des rayons, & propres à en perfectionner la Théorie.

NOU-

NOUVELLES RECHERCHES PRATIQUES

SUR

LES ABERRATIONS DES RAÏONS RÉFRACTÉS,

ET SUR LA PERFECTION DES LUNETTES. (*)

PREMIER MÉMOIRE.

PAR M. BEGUELIN.

La théorie de l'aberration, tant de ſphéricité que de réfrangibilité, a fait depuis quelque tems l'objet des recherches des plus grands Géometres. Mrs. Euler, Clairaut & d'Alembert ont épuiſé ce ſujet, ou peu s'en faut; & s'il étoit poſſible d'ajouter quelque choſe après eux à la perfection de cette théorie, ce ne ſeroit aſſûrément pas moi qui l'entreprendrois.

Mais, ſi la théorie des lunettes eſt portée au plus haut degré de préciſion, on ne ſauroit diſſimuler que juſqu'ici le ſuccès dans la pratique n'a pas rempli entierement l'attente des Géometres; tandis que les Artiſtes Anglois, ſont, & peut-être ſans s'attacher à la théorie, des lunettes dont l'effet eſt ſurprenant, celles qu'on a exécutées ſur les calculs les plus exacts, ou n'ont point réuſſi, ou n'ont produit qu'un effet aſſez médiocre, en comparaiſon des lunettes d'Angleterre.

Diverſes cauſes peuvent avoir contribué à ce paradoxe. D'abord les formules des Géometres ſont trop générales, & précédées d'un calcul trop compliqué, pour qu'un Opticien, ou un Artiſte, quelque intelligent qu'on veuille le ſuppoſer, ait la force ou du moins le cou-

(*) Lû à l'Académie le 3 Nov. 1768.

courage d'y appliquer le calcul numérique, indiſpenſable dans la pratique. 2°. Cette généralité des formules fait que les Géometres eux-mêmes ſont réduits à une eſpece de tâtonnement, lorſqu'il eſt queſtion d'en tirer des meſures déterminées, afin de n'avoir pas des raïons de faces trop courts, ou trop longs, & des ouvertures trop petites. 3°. Il ſe peut auſſi qu'obligés de négliger de petites quantités pour ne pas rendre ces formules trop incommodes, ces quantités, inſenſibles dans des lunettes d'un petit foïer, & d'une ouverture médiocre, ne le ſoient plus lorſqu'on exécute des lunettes d'un foyer plus long, & d'une ouverture plus conſidérable. 4°. Enfin le défaut de préciſion dans la meſure des rapports des réfractions & des diſperſions, peut non ſeulement rendre inutile la préciſion géométrique des formules que la théorie donne, mais il peut encore être cauſe que les lunettes conſtruites ſur ces formules aïent une plus grande aberration que celle qu'on cherchoit à détruire par ce calcul ſcrupuleux. La ſuite de ce Mémoire fournira plus d'un exemple de ces inconvéniens.

J'ai cherché, par ces conſidérations, à enviſager les aberrations ſous un nouveau point de vue, qui d'un côté fût par ſa ſimplicité à la portée de tout Opticien médiocrement intelligent, & qui de l'autre tînt immédiatement à la pratique. Puiſque c'eſt elle qui fait le but de toutes ces recherches, il ſemble plus ſimple de commencer d'abord par les conſidérations pratiques, d'où l'on peut s'élever, dès qu'on le voudra, à des formules plus générales, que de débuter par celles-ci, pour les limiter enſuite avec aſſez de peine, & au milieu d'une eſpece d'obſcurité, ſur les reſtrictions que la pratique exige.

I. Le défaut des lunettes réſulte, comme chacun ſait, des deux aberrations, l'une de *réfrangibilité*, & l'autre de *ſphéricité*. On entend par *aberration* en général, *aberration de longueur*, ou *diffuſion*, l'intervalle entre les deux points de l'axe de la lunette, où deux raïons, partis d'un même point de l'objet, coupent cet axe après leurs réfractions. La ſphéricité des lentilles fait que de deux raïons homogenes, partis du point de l'objet où l'axe prolongé en avant le couperoit, celui qui

qui traverſe l'objectif à une très petite diſtance du centre, va couper l'axe à une plus grande diſtance de l'objectif, qu'on nomme la *diſtance focale*, & que l'autre raïon qui traverſe la lentille à ſa circonférence, va couper cet axe dans un point moins éloigné, qu'on nomme le *foïer des raïons extremes*. L'intervalle entre ces deux foïers fait l'aberration de *ſphéricité*. Je ne parle point de l'aberration *latérale*, ou du demi-diametre de confuſion qui lui eſt égal; elle eſt en ce ſens le quart de l'aberration en longueur, multipliée par la demi-ouverture, & diviſée par la diſtance focale. Ainſi, quand on détruit l'une de ces aberrations, on détruit auſſi l'autre. Il ſuffit ici de conſidérer l'aberration de longueur, ou la diffuſion des raïons ſur l'axe.

La diverſe réfrangibilité des raïons hétérogenes, découverte par *Newton*, fait qu'un raïon unique tombant de l'objet ſur la lentille s'y diſperſe en pluſieurs raïons colorés, qui ſe réfractent inégalement. Le raïon violet va couper l'axe au point le moins éloigné de la lentille, & le raïon rouge coupe cet axe au point le plus reculé. L'intervalle entre ces deux diſtances, pris ſur l'axe, eſt ce qu'on nomme *l'aberration de réfrangibilité;* & cet eſpace de diffuſion eſt, ſelon Mr. Newton, dans le verre commun, environ la $\frac{1}{27}$ partie de la diſtance focale, pour les raïons qui paſſent près du centre de l'objectif.

Ainſi, dans la fig. 1., ſi MF eſt la diſtance focale, F ſera le point où le raïon parallele qui traverſe la lentille à la petite diſtance hM du centre coupe l'axe. Le raïon extreme, paſſant à la diſtance AL, ſera réfracté en f; & ce même raïon, diſperſé en pluſieurs raïons colorés, aura le foïer des raïons violets en v, & celui des raïons rouges en r; ici l'aberration de réfrangibilité ſeroit $= vr$; celle de ſphéricité $= f$F; l'aberration totale des raïons rouges ſeroit $= f$F $- fr$; celle des raïons violets au contraire $= f$F $+ fr$, parce que $vf = fr$. Et en général l'aberration totale ſera toujours l'aberration de ſphéricité, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aberration de réfrangibilité. Planche X. Fig. 1.

II. De là il eſt aiſé de comprendre que, ſi l'aberration de ſphéricité étoit détruite, les raïons moïens entre le rouge & le violet, c. à d. les raïons jaunes verdâtres, tomberoient préciſément au foyer commun, qui eſt la diſtance focale, que les rouges tomberoient au delà de ce point à une diſtance d'environ la $\frac{1}{27}$ du foïer, & que les violets ſe rapprocheroient d'autant en deçà du foïer vers la lentille.

Si, en échange, l'aberration de réfrangibilité eſt détruite par la combinaiſon de deux eſpeces de verre, alors à la vérité les raïons rouges & violets coïncident dans un même point ſur l'axe avec le raïon moïen, & la diffuſion des couleurs évanouit; mais, comme l'aberration de ſphéricité ſubſiſte, ce point où les raïons hétérogenes ſe réuniſſent n'eſt pas à la diſtance focale, pour les raïons qui ont paſſé près de la circonférence de l'objectif.

Il eſt donc néceſſaire de détruire, au moins ſenſiblement, l'une & l'autre aberration pour avoir des objectifs excellens; mais en travaillant à les détruire, il eſt néceſſaire auſſi de conſerver à la lunette une ouverture proportionnée au groſſiſſement, & par conſéquent à la longueur du foïer.

Au reſte, ſi j'appuie dans ce Mémoire ſur des choſes déjà connues, c'eſt, comme je l'ai inſinué dès l'entrée, que j'ai principalement en vue ici la pratique, & l'utilité des Artiſtes, auxquels ces matieres ne ſauroient être expoſées trop clairement.

III. Pour ce qui concerne l'aberration de réfrangibilité, j'ai montré dans mon Mémoire ſur les couleurs priſmatiques, qu'il ſuffit, pour la rendre inſenſible dans les objectifs de deux ou de pluſieurs verres, de mettre entre la ſomme des arcs de courbures convexes, & celle des arcs de courbures concaves, le rapport inverſe de celui qu'on aura découvert entre la diſperſion des deux eſpeces de verres qu'on emploiera. Si par ex. la diſperſion du *crownglaſs* $= dm$, eſt à celle du *flintglaſs* $= dn$, comme 10 à 16, la ſomme des arcs convexes du *crownglaſs* doit être à la ſomme des arcs des faces concaves du *flintglaſs*,

glaſs, comme 16 à 10, bien entendu cependant que les courbures ſoient aſſez petites pour que le demi-arc de la face la plus courte puiſſe être pris ſans erreur ſenſible pour ſon ſinus; ce qu'on peut toujours effectuer en multipliant les verres de l'objectif. Dans la rigueur géométrique, la proportion inverſe doit être entre le rapport des diſperſions, & celui des ſommes des ſinus des demi-courbures convexes & concaves.

IV. Quant à l'aberration de ſphéricité, elle a trois cauſes. L'une, c'eſt que les réfractions ſuivent les rapports des ſinus, & non ceux des angles mêmes. Il n'eſt donc pas poſſible que le rapport entre l'angle de la premiere incidence & de la derniere réfraction ſoit le même pour le raïon qui traverſe les lentilles fort près du centre, & pour celui qui les traverſe près de la circonférence. Donc, à meſure que l'ouverture, & par conſéquent l'arc de courbure, augmente dans un objectif d'un foïer donné, à meſure auſſi le foïer des raïons extremes s'écartera du foïer des raïons du centre.

Soit, par ex. l'objectif plan-convexe ALM, que le raïon parallele *ra* traverſe à la petite diſtance *al* de l'axe LF, & qu'un autre raïon parallele traverſe à la diſtance AL; ſi l'arc *a*M eſt de 2′, & l'arc AM = 10ᵈ, & que la raiſon de réfraction ſoit *m* = $\frac{3}{2}$, l'angle de réfraction du raïon *ra*F ſera à celui d'incidence comme 3 à 2, puiſqu'il ſera de 3′, parce que dans ces petits angles la raiſon des ſinus ne differe pas de celle des arcs. Mais l'angle de réfraction du raïon extreme RA*f* ſera plus grand que dans cette raiſon de 3 à 2; il ſera à ſon angle d'incidence comme $3 + \frac{1}{50}$ à 2; donc ſa convergence à l'axe ſera à la convergence du raïon au centre *ra*F dans une plus forte raiſon que n'eſt celle de leurs arcs AM, *am*, qui eſt comme 300 à 1, & par conſéquent le raïon extreme coupera l'axe en un point plus près de la lentille, & le raïon au centre dans un point plus reculé. Fig. 2.

La ſeconde cauſe de l'aberration de ſphéricité, & qui auroit lieu indépendamment de la premiere, naît immédiatement de la grandeur

des ouvertures, ou du diametre des objectifs; quand la réfraction ſuivroit la raiſon des angles, comme on l'avoit crû juſqu'à *Képler*, il faudroit néanmoins enviſager les ouvertures al, AL, néceſſaires au paſſage des raïons du centre & de la circonférence, comme les ſinus des arcs aM, AM. Mais ces mêmes ouvertures ſont auſſi les ſinus des angles aFM, $Af M$, ſous leſquels ces raïons rompus vont couper l'axe. Soit le raïon de courbure $Ca = r$, le raïon de l'angle au foïer $aF = F$, l'angle $aCM = c$, l'angle au foïer $aFM = A$, la demi-ouverture $al = x$; on a la proportion: ſin c : ſin tot $= x : r$, ou $r = \frac{x}{\text{ſin } c}$, & par la même raiſon $F = \frac{x}{\text{ſin A}}$; donc $F = \frac{r \text{ ſin } c}{\text{ſin A}}$.

De même, poſant l'arc $AM = C$, l'angle $AfL = \Phi$, & le raïon $Af = f$, on aura

$$\text{ſin C} : \text{ſin } \Phi = f : r, \quad \text{ou } f = \frac{r \text{ ſin C}}{\text{ſin } \Phi}.$$

Or, pour le raïon parallele $ra F$, qui paſſe très près de l'axe, le ſinus al ſe confond avec l'arc extrêmement petit aM; & ſi la raiſon de réfraction du verre dans l'air eſt $= m$, l'angle d'incidence étant $= c$. celui de réfraction ſera $= mc$, d'où ſouſtraiſant l'angle d'incidence, reſte l'angle de convergence à l'axe $A = (m - 1) c$, & par conſéquent aiant $r : F = A : c$, on a auſſi $r : F = (m - 1) c : c$, ou $F = \frac{r}{m - 1}$; ce qui eſt la formule connue de la diſtance focale pour une ſurface courbe; ou, puiſqu'on a $r = \frac{x}{\text{ſin } c}$, l'expreſſion de cette diſtance focale ſera $F = \frac{x}{(m - 1) \text{ ſin } c}$.

De là il eſt aiſé de voir que, ſi le raïon parallele traverſe deux ou pluſieurs ſurfaces convexes, dont les demi-arcs d'ouverture ſoient

c, c',

c, c', c'', c''' &c. & qu'on puiſſe négliger les épaiſſeurs & les diſtances des verres, l'expreſſion de la diſtance focale ſera

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''' + \&c.)},$$

& que, ſi l'on peut ſubſtituer ſans erreur ſenſible les arcs aux ſinus, cette formule deviendra $F = \frac{x}{(m-1)(c + c' + c'' + c''' + \&c.)}$, en donnant à l'arc d'une minute ſa valeur connue par les tables, $=$ 2, 909.

A l'égard des raïons extremes RAf, on auroit de même l'angle $\Phi = (m-1)\,C$, en poſant la réfraction en raiſon des angles, ce qui donneroit $F : f = \frac{\sin c}{(m-1)\,c} : \frac{\sin C}{(m-1)\,C}$, & en mettant les arcs pour leurs ſinus, on auroit $F = f$. Mais cette égalité n'empêcheroit pas qu'il n'y eût aberration; parce que F, & f, repréſentent, non la diſtance de foyer, mais l'hypothenuſe du triangle rectangle dont le petit côté eſt la demi-ouverture de la lentille, & l'autre la diſtance de foïer, ou le coſinus de l'angle à l'axe. Or, pour les raïons qui paſſent tout près de l'axe, nous avons pu confondre le ſinus totus avec le coſinus de l'angle A, ou l'hypothenuſe aF avec le grand côté MF, pour en conclure la diſtance focale; parce que le petit côté al, ou l'ouverture x, eſt cenſée infiniment petite: mais, quant au raïon extreme, comme l'ouverture AL a une grandeur conſidérable, on ne peut plus prendre l'hypothenuſe Af pour le grand côté Lf du triangle, ou ſubſtituer le coſinus de l'angle Φ à ſon ſinus totus.

D'où il eſt évident qu'il n'eſt abſolument pas poſſible de détruire entierement cette aberration de ſphéricité dans un objectif ſimple; puiſqu'il faudroit pour cet effet que les angles à l'axe des raïons du centre & de la circonférence euſſent le même coſinus, ce qui ſuppoſeroit la même ouverture pour tous les raïons, c. à d. qu'ils paſſaſſent tous à la même diſtance de l'axe.

La troiſieme cauſe de l'aberration de ſphéricité eſt encore indépendante des deux premieres; elle réſulte de ce que le foïer des raïons extremes eſt rapproché de la lentille de toute la longueur du ſinus verſe de la courbure poſtérieure de l'objectif. La diſtance focale du raïon qui paſſe près de l'axe ſe meſure depuis la face poſtérieure M de la lentille, parce que la flêche /M d'un arc infiniment petit *a* M, eſt inſenſible. Mais la diſtance de foïer d'un raïon qui paſſe près de la circonférence doit ſe meſurer du point L où le diametre de l'ouverture coupe l'axe; parce que la flêche d'un arc AM de quelques degrés, quand l'ouverture eſt de quelques pouces, n'eſt pas une quantité à négliger dans l'aberration.

V. Il ſeroit très facile de faire ceſſer cette derniere cauſe de l'aberration dans un objectif; il n'y auroit qu'à faire la face poſtérieure plane. Mais comme, pour conſerver la même longueur de foïer, il faudroit augmenter la courbure de la face antérieure, l'aberration qui réſulte de la premiere cauſe en devient plus conſidérable. Il y a donc ici un *minimum*, que les Géometres ont déterminé depuis longtems, en donnant la proportion entre les courbures des deux faces la plus propre pour diminuer l'aberration de ſphéricité dans un objectif ſimple.

Il eſt de même aſſez facile de diminuer autant qu'on le voudra la premiere cauſe de l'aberration, celle qui réſulte de la raiſon des réfractions, en multipliant les verres des objectifs; parce qu'en diminuant la courbure de chaque verre, la raiſon des ſinus ſe rapproche extrêmement de la raiſon des angles, & qu'on peut ſubſtituer l'une à l'autre ſans une erreur ſenſible; on peut même détruire ce reſte d'erreur en faiſant la derniere face concave, puiſqu'alors on projette d'autant plus loin le foïer des raïons extremes. Mais la ſeconde cauſe d'aberration, celle qui réſulte immédiatement de la grandeur de l'ouverture, ſubſiſte toujours; & c'eſt celle-là qui dans les objectifs combinés produit la plus grande confuſion.

VI. Pour appliquer tout de ſuite à la pratique les recherches que je me propoſe de faire ſur l'aberration, il faut fixer une diſtance focale,

cale, & une ouverture qui y ſoit proportionée; & dans cette vue, le plus ſimple c'eſt de partir de l'expérience. Un célebre Géometre aſſure, d'après le rapport de M. Short à la Société Roïale, que M. Dollond a conſtruit une lunette achromatique de 3 pieds & demi de foïer, portant $3\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture, & groſſiſſant 150 fois le diametre des objets. L'objectif de cette lunette eſt compoſé de deux lentilles convexes de *crownglaſs*, & d'une concave de *flintglaſs* placée au milieu. L'Académie poſſede actuellement une excellente lunette de M. Dollond le fils, conſtruite ſur les mêmes proportions.

Suppoſons donc une diſtance focale de 100 parties, ou $F = 100$, & une ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, on aura la demi-ouverture $x = \frac{F}{24} = 4,1666 \ldots$ Comme on ne ſe ſert de lunettes que pour voir plus diſtinctement les objets éloignés, que pour cet effet il faut que la lunette les groſſiſſe à proportion de leur éloignement, & qu'elle les éclaire auſſi en raiſon de leur groſſiſſement, le diametre de l'ouverture doit augmenter avec la diſtance focale, ſi l'on emploie le même oculaire. Mais, tant qu'on peut ſe promettre le même effet d'une plus courte lunette, on n'en emploiera pas inutilement une plus longue; ainſi elle doit groſſir à proportion de ſa longueur, & être éclairée de même. Il eſt vrai qu'en proportionant toujours le diametre de l'ouverture à la longueur du foïer, les lentilles de l'objectif deviendroient d'une grandeur déméſurée, & même impraticable dès qu'il ſagiroit de lunettes de plus de 8 à 10 pieds; il eſt vrai encore que ces mêmes lentilles pour des lunettes de poche, auroient une moindre ouverture qu'on ne leur en donne aujourd'hui; il eſt vrai enfin, qu'un même oculaire ne ſauroit ſervir à des lunettes de toutes longueurs, puiſque l'image augmentant avec le foïer de l'objectif, un petit oculaire ne l'embraſſeroit plus qu'en partie, ce qui rétréciroit le champ, ſi l'on n'y remédioit par d'autres expédiens. Mais ces conſidérations n'empechent point notre ſuppoſition fondée ſur l'égalité de clarté dans l'image;

mage; parce que le but qu'on ſe propoſe c'eſt d'avoir des lunettes de 3 juſqu'à 6 pieds au plus, qui tiennent lieu des plus longues qu'on ait jamais emploïées; or, dans les lunettes de cette grandeur, la proportion que j'adopte eſt la plus convenable pour permettre un groſſiſſement tel qu'on peut le déſirer. Et d'ailleurs, dès que nous connoitrons l'aberration que produit l'ouverture donnée, rien n'eſt plus aiſé que d'en conclure l'aberration pour une ouverture telle que le cas particulier l'exigera, puiſque les aberrations croiſſent & décroiſſent comme les quarrés des diametres des ouvertures.

VII. Cela poſé, tout ce qui nous reſte à faire, c'eſt de cher-
Fig. 3. cher quel doit être l'angle BFM $=$ A, ſous lequel un raïon parti de la circonférence de la derniere face de l'objectif couperoit l'axe, s'il le coupoit préciſément au point F de la diſtance focale. J'appellerai cet angle A qui ſera ma meſure fixe, *l'angle au foïer*. Enſuite il faut trouver ſous quel angle AfL $=$ Φ, un raïon parallele, après avoir traverſé tous les verres de l'objectif près de la circonférence, coupe effectivement l'axe en vertu de ſa derniere réfraction. J'appellerai cet angle Φ, *l'angle à l'axe;* & l'excès de cet angle-ci ſur l'angle au foïer, ſera l'angle GBF $=$ Φ — A, que j'appellerai l'angle *d'aberration*; d'où l'on pourra conclure immédiatement l'aberration GF elle-même, en y ajoutant la flêche LM $=$ fG, ſi la derniere face eſt convexe, ou en l'en retranchant, ſi cette face eſt concave.

VIII. La meſure fixe, ou l'angle au foïer $=$ A, ſe trouve ſans difficulté. Il a pour ſinus la demi-ouverture BM $=$ x, & pour raïon l'hypothenuſe BF du triangle rectangle, dont les côtés ſont la diſtance focale MF $=$ 100, & la demi-ouverture BM $=$ 4, 1666. On a donc le ſinus de l'angle de meſure ſin A $=$ $\frac{4,1666}{\sqrt{(100^2 + 4,1666^2)}} = 0,04163056$; ce qui répond à l'angle de 2°. 23′,156726 $=$ 143′,156726. On peut encore trouver cet angle au foïer plus aiſément en prenant la diſtance focale MF, pour la

la cotangente de cet angle, & la demi-ouverture BM pour le ſinus totus. On a $\frac{F}{24} : F = \text{ſin tot} : \text{cotang } A = 24$; ce qui répond à l'angle 2°, 23′, 157564; la différence entre ces deux valeurs n'eſt que de 0′, 0008, & la valeur moïenne qui en réſulte eſt $A = 143', 157145$.

IX. J'ai déjà donné dans mon Mémoire ſur les priſmes achromatiques la formule de l'angle à l'axe; elle réſulte immédiatement de la route du raïon au travers des lentilles. Si la derniere face eſt convexe, quel que ſoit le nombre des verres, cet angle eſt celui de derniere réfraction, moins le demi-arc de la derniere face. Si au contraire elle eſt concave, c'eſt le demi-arc de ſa courbure, moins l'angle de derniere réfraction. Cette formule devient extrêmement aiſée lorſqu'on peut mettre les arcs à la place de leurs ſinus. Car, ſi les demi-arcs des faces convexes du crownglaſs ſont $= c + c' + c'' + c'''$ &c. & les demi-arcs des faces concaves du flintglaſs $= k + k' + k'' + k'''$ &c., le rapport de la réfraction du crownglaſs dans l'air $= m$, celui du flintglaſs $= n$, on aura l'angle à l'axe $\Phi = (m - 1)(c + c' + c'' + c''' + \text{\&c.}) - (n - 1)(k + k' + \text{\&c.})$. On ſuppoſe ici que les raïons d'un même point de l'objet tombent paralleles ſur la premiere face de l'objectif, ce qui eſt le cas qu'on doit ſuppoſer dans la pratique; mais la formule eſt également applicable aux incidences obliques: il ne faut qu'y ajouter, ou en ſouſtraire l'angle de convergence, ou de divergence du raïon incident.

Lorſqu'il ſera néceſſaire, pour plus de préciſion, de faire entrer les ſinus eux-mêmes dans la formule de l'angle à l'axe, elle n'en devient gueres plus compliquée; mais il faudra alors dans l'application chercher cet angle pour chaque verre ſéparément, en développant la formule

$$\Phi = m \text{ ſin } \left(c + c' - \frac{\text{ſin } c}{m}\right) - c', \quad \text{ou}$$

$\Phi'' = m \sin\left(c'' + c''' - \frac{\sin(c'' - \Phi')}{m}\right) - c'''$, pour les verres convexes, & $\Phi' = k' - n \sin\left(k + k' - \frac{\sin(k + \Phi)}{n}\right)$, pour les verres concaves. Car, ſi l'on nomme α & β, l'angle d'incidence & de réfraction ſur la face antérieure c d'une lentille convexe; γ & δ, les mêmes angles ſur la face poſtérieure c'; que m ſoit la raiſon de réfraction du verre dans l'air; on a par les loix de la réfraction $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{m}$; & $\sin\delta = m \sin\gamma$. Or il eſt aiſé de démontrer, comme je l'ai fait dans le Mémoire cité, que l'on a $\gamma = c + c' - \beta$, & $\Phi = \delta - c'$; d'où réſulte la formule de l'angle à l'axe

$$\Phi = m \sin\left(c + c' - \frac{\sin\alpha}{m}\right) - c',$$

formule qui pour les verres concaves devient

$$\Phi = -n \sin\left(k + k' - \frac{\sin\alpha}{n}\right) + k'.$$

En poſant donc les raïons paralleles à l'axe pour le premier verre, il eſt clair que l'incidence de ces raïons ſur la premiere face de l'objectif ſera un angle α, égal à l'arc de cette face intercepté entre l'axe & le point d'incidence; qu'ainſi pour le premier verre on aura $\alpha = c$, ou $\alpha = k$, ſelon que ce verre ſera convexe ou concave.

Quant aux verres ſuivans, l'angle d'incidence α ſera compoſé de l'incidence parallele, & de l'angle Φ du verre précédent. Car cet angle Φ eſt l'angle de convergence, ou de divergence, du raïon avec l'axe, ou ſa parallele en ſortant du verre; le raïon tombe donc avec cette obliquité ſur le verre ſuivant, ce qui donne $\alpha = c''' - \Phi$, ou $\alpha = k''' + \Phi$, pour telle lentille que l'on voudra, & même pour la premiere, ſi l'on ne veut pas ſuppoſer le cas des raïons paralleles.

X. La ſeule choſe qui ne ſoit pas de rigueur géométrique dans cette méthode, c'eſt que j'y ſuppoſe que le raïon ſort du dernier verre à la même diſtance x de l'axe, à laquelle il a pénétré la premiere face; mais, outre que cette ſuppoſition n'y eſt pas indiſpenſable, les géometres ſe la permettent également, & elle doit être très admiſſible dans la pratique. Si l'objectif eſt ſimple, il eſt évident que l'épaiſſeur d'une ſeule lentille, ſurtout à ſa circonférence, peut être négligée; ſi au contraire l'objectif eſt compoſé de pluſieurs verres, le raïon fait dans ſa traverſée des angles alternativement convergens & divergens par rapport à l'axe, ce qui le ſoutient ſenſiblement à la même diſtance de cet axe juſqu'à ſa derniere réfraction, comme on peut aiſément s'en aſſurer par le calcul, en ne donnant aux lentilles que l'épaiſſeur que leur courbure exige. Il y aura quelque légere différence à cet égard, ſelon l'eſpece de verre qu'on placera le premier. Si c'eſt le criſtal d'Angleterre qui eſt placé vers l'objet, il eſt aiſé de comprendre que le raïon parallele commence dès ſon entrée à diverger de l'axe, & que ſi toutes les faces contiguës étoient coïncidentes, & les lentilles alternativement concaves & convexes, le raïon continueroit à diverger de plus en plus pendant toute la traverſée. Si au contraire le premier verre eſt une lentille convexe de crownglaſs, & que les eſpeces alternent, le raïon commencera par converger dans le premier verre, mais il s'écartera enſuite de plus en plus de l'axe, à meſure qu'il traverſera les autres verres dont les faces coïncident. Dans tous les cas, ſi l'ouverture de la derniere face eſt plus grande ou plus petite que celle de la premiere, l'angle à l'axe en ſera à la vérité un peu plus grand, ou un peu plus petit: mais l'angle de meſure, qui ſe regle ſur la même ouverture que l'angle à l'axe, croîtra ou décroîtra ſenſiblement dans la même proportion, & l'aberration de ſphéricité ſera par conſéquent ſenſiblement la même.

XI. Je vais préſentement appliquer cette méthode à la recherche de l'aberration dans les diverſes eſpeces d'objectifs; &, quoique je n'aïe en vue dans ce Mémoire que les objectifs compoſés de deux ou

de pluſieurs verres, je commencerai par l'objectif ſimple, pour avoir un terme de comparaiſon.

Comme il n'y a ici que deux faces, l'expreſſion de la diſtance focale eſt $F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c')}$; & aiant $F = 100$, $x = \frac{100}{24}$, ſi l'on poſe le rapport de réfraction du verre commun $m = 1,55$, cette expreſſion donne l'équation

$$\sin c + \sin c' = \frac{1}{24 \times 0,55} = 0,0757575 \cdots$$

Or la ſomme des ſinus des faces doit reſter conſtante auſſi longtems que le foïer reſte le même, de quelque façon que les faces elles-mêmes varient; ſi l'on prend donc les faces iſoſceles, on aura

$$\sin c = \sin c' = 0,0378787 \cdots\cdots$$

On trouvera la même valeur de ſinus c par la formule ordinaire de la diſtance focale, où l'on fait entrer le raïon de courbure; elle eſt pour une lentille iſoſcele $F = \frac{r}{2(m-1)}$; d'où l'on trouve, en ſubſtituant les valeurs de F & m, $r = 110$: or on a toujours ſin $c = \frac{x}{r}$, donc ici ſin $c = \frac{4,1666\cdots}{110} = 0,0378787 \cdots\cdots$, mais ce ſinus répond à un angle de 2°. 10′,24845. Ainſi, en négligeant les ſinus, j'ai l'angle à l'axe

$$\Phi = (m-1)\,2c = 1,1 \times 130',24845 = 143',27329$$

d'où retranchant $A = 143,1572$. (VIII)

reſte l'angle d'aberration $\Phi - A = 0',11609$,

ſans compter la demi-épaiſſeur de la lentille; une plus grande préciſion n'étant pas néceſſaire encore.

XII. En poſant la réfraction pour les raïons rouges, $m = 1,54$, & pour les violets, $m = 1,56$, on aura dans cet objectif ſimple iſoſcele l'angle à l'axe des raïons rouges $= 1,08 \times 130',248 = 140',668$, celui des raïons violets ſera $= 1,12 \times 130',248 = 145',978$; ainſi l'angle d'aberration de réfrangibilité ſeroit ici $= 5',31$, ou environ 46 fois plus grand que celui de ſphéricité.

XIII. Conſidérons maintenant un objectif compoſé de deux verres d'eſpece différente; poſons toujours la réfraction du crownglaſs $m = 1,55$, que celle du flintglaſs ſoit $n = 1,6$, & pour ne rien laiſſer d'indéterminé, ſuppoſons encore que la diſperſion du criſtal eſt à celle du verre ordinaire, comme 16 à 10; on aura $dn = 1,6$, & la formule de la diſtance focale,

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c') - (n-1)(\sin k + \sin k')},$$

donnera $24[1,1 \sin c - 1,2 \sin k] = 1$, ſi l'on ſuppoſe les lentilles iſoſceles.

Or, pour détruire l'aberration de réfrangibilité, il faut prendre

$$\sin k : \sin c \,(= r : R) = dm : dn = 10 : 16;$$

ce qui donne $\sin k = 0,625 \sin c$; ainſi la formule donne $24(1, 1 - 0,75) \sin c = 1$, ou $\sin c = \frac{1}{24} = 0,1190476$, & par conſéquent $\sin k = 0,07440475$; donc les arcs eux-mêmes ſont

$$c = 410',228532, \quad \& \quad k = 256',0212272.$$

Mais la formule de l'angle à l'axe, en mettant les arcs pour les ſinus, ſeroit ici $\Phi' = (m-1)\,2c - (n-1)\,2k$, ou

$$\Phi' = 1,1.c - 1,2\,k = 144',026152,$$

d'où retranchant $A = 143,1572$

reſte l'angle d'aberration $= 0',8689$.

XIV. Soit pour le raïon rouge $m = 1,54$; aiant $dn = 1,6$, on aura ici $n = 1,6 - 0,016 = 1,584$; ainſi l'angle à l'axe des raïons rouges ſera $\Phi' = 1,08\ c - 1,168\ k = 144',01425$. en poſant pour les raïons violets $m = 1,56$, on aura $n = 1,6 + 0,016 = 1,616$; donc $\Phi' = 1,12\ c - 1,232\ k = 144',03805$, d'où l'on voit que le foïer des raïons hétérogenes coïncide ſenſiblement au même point; & que l'aberration de réfrangibilité eſt effectivement détruite par cette combinaiſon; en échange l'aberration de ſphéricité a conſidérablement augmenté; elle ne faiſoit dans l'objectif ſimple qu'un angle de $0',116$ (XI); ici elle en fait un de $0',8689$; elle eſt donc accrue dans le rapport d'environ 15 à 2. A la vérité dans l'objectif ſimple, la demi-épaiſſeur de la lentille s'ajoute encore à l'aberration, au lieu qu'ici elle doit être retranchée, ſi le flintglaſs eſt placé derriere, à cauſe de ſa concavité; mais ces épaiſſeurs ne ſont ordinairement que la moindre partie de l'aberration totale.

XV. Paſſons à une combinaiſon de trois verres; deux lentilles de crownglaſs, & une de flintglaſs. Ici le verre concave reſte le même que dans l'objectif à deux verres. La ſomme des ſinus de courbure de ſes deux demi-faces reſte $\sin k + \sin k' = 0,14880950$, & pour les faces iſoſceles, $\sin k = \sin k' = 0,07440475$, ou $k = 256',0210$ (XIII).

La ſomme des ſinus des courbures convexes ne peut pas varier non plus, le foïer reſtant toujours le même $F = 100$. On a donc $\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''' = 0,2380952$. Mais, comme on a ici quatre faces convexes, ſi on les ſuppoſe iſoſceles, le ſinus de chaque demi-arc de face ne ſera plus que $\sin c = 0,0595238$, auquel répond un arc $c = 204',74888$.

Or, en mettant les arcs pour leurs ſinus, la formule de l'angle à l'axe qui eſt ici $\Phi'' = (m - 1)\ 4c - (n - 1)\ 2k$ devient $\Phi'' = 2,2 \times 204',74888 - 1,2 \times 256',021027$, ou $\Phi'' = 143',222212$; donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',0649$,

ce

ce qui n'eſt qu'environ la moitié de l'aberration de ſphéricité d'un objectif ſimple, & à peine la $\frac{1}{13}$ partie de l'aberration d'un objectif à deux verres.

Au reſte, l'angle à l'axe des raïons rouges ſeroit ici $\Phi'' = 2,16\ c - 1,168\ k = 143',2248$, celui des raïons violets ſeroit $\Phi'' = 2,24\ c - 1,232\ k = 143',21936$, ce qui donne l'angle d'aberration de réfrangibilité $= 0',027$, où il faut remarquer comme une ſingularité que le foïer des raïons violets tomberoit un peu plus loin de la lentille que celui des raïons rouges.

XVI. La même méthode donnera ſans peine l'angle d'aberration de ſphéricité pour un objectif à 4 verres, deux de chaque eſpece. On a encore ici, en ſuppoſant les faces iſoſceles, $\text{ſin } c = 0,0595238$ ou $c = 204',7888$; & comme on a $\text{ſin } k = \frac{0,1488095}{4} = 0,037202375$, d'où l'on tire l'arc $k = 127',9218266$, ſi l'on prend les arcs pour leurs ſinus, la formule, qui eſt ici $\Phi''' = (m-1)4c - (n-1)\,4k$, devient $\Phi''' = 2,2 \times 204',74888 - 2,4 \times 127',9218266$, ou $\Phi''' = 450',44753 - 307',01238 = 143',43515$; donc l'angle d'aberration $\Phi''' - A = 0',2779$.

XVII. Soit maintenant un objectif à 5 lentilles, trois convexes de crownglaſs, & deux concaves de flintglaſs: la valeur de ſin k & de k eſt la même qu'à 4 verres. Celle de ſin c, en ſuppoſant les lentilles iſoſceles, devient $\text{ſin } c = \frac{0,2380952}{6} = 0,03968253\ldots$ ce qui répond à l'arc $c = 136',45433573$. Or, en mettant les arcs pour leurs ſinus, l'angle à l'axe qui eſt ici $\Phi'' = (m-1)\ 6\ c - (n-1)\ 4k$ devient $\Phi'' = 3,3\ c - 24k$, ou $\Phi'' = 450',29942 - 307',01238 = 143',2871$, & par conſéquent l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',1299$. Cette aberration ſeroit preſque 4 fois plus grande que celle d'un objectif à 3 verres, & ſurpaſſeroit d'un $\frac{1}{9}$ l'aberration de l'objectif ſimple.

L'angle

L'angle à l'axe des raïons rouges ſeroit ici $\Phi^{IV} = 3,24c - 2,336\,k = 143',2866$, celui des violets eſt $\Phi^{IV} = 3,36.c - 2,464\,k = 143',2871$; par conſéquent l'angle d'aberration de réfrangibilité n'eſt que $0',0005$.

XVIII. Si l'on fait l'objectif de 6 verres, ou trois lentilles convexes de crownglaſs, & trois concaves de flintglaſs, la valeur de ſin c, & de l'arc c, reſte la même qu'à 5 verres (XVII); celle de ſin k devient (en ſuppoſant toujours les faces iſoſceles,) ſin $k = \frac{0,1488095}{6} = 0,024801583$; ce qui donne l'arc $k = 85',27023$. Or, en ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, la formule $\Phi^{V} = (m-1)\,6\,c - (n-1)\,6\,k$, devient ici $\Phi^{V} = 3,3\,c - 3,6.k = 450',29942 - 306',97283 = 143',32659$; donc l'angle d'aberration ſeroit $= \Phi^{V} - A = 0',1694$.

XIX. Mais, ſi l'objectif eſt compoſé de quatre lentilles de crownglaſs, & de trois de criſtal d'Angleterre, on aura, en poſant les faces égales, ſin k comme (XVIII), ſin $c = \frac{0,2380952}{8} = 0,0297619$; d'où l'on conclut l'arc $c = 102',329092$. En prenant donc toujours les arcs pour leur ſinus, on aura $\Phi^{VI} = (m-1)\,8\,c - (n-1)\,6.k$, ou $\Phi^{VI} = 4,4 \times 102',329 - 3,6 \times 85',270$; donc $\Phi^{VI} = 450',248005 - 306',97283 = 143',275176$; donc l'angle d'aberration $\Phi^{VI} - A = 0',1179$. On trouve de même l'angle à l'axe des raïons rouges $\Phi^{VI} = 4,32.c - 3,504.k = 143',27479$; celui des raïons violets ſera $\Phi^{VI} = 4,48.c - 3,696.k = 143',27556$, d'où réſulte l'angle d'aberration de réfrangibilité $= 0',00077$.

XX. Si l'objectif eſt compoſé de 4 lentilles de chaque eſpece, on aura ſin c, comme dans l'objectif à 7 verres, & ſin $k = 0,01860119$, d'où l'on tire l'arc $k = 63',94978$. La formule donne

ne l'angle à l'axe $\Phi^{VII} = (m-1)\ 8.c - (n-1)\ 8k$, ou $\Phi^{VII} = 450',248005 - 306',958944 = 143',28906$; donc l'angle d'aberration ſera $\Phi^{VII} - A = 0',13186$.

XXI. Que l'objectif ſoit à neuf lentilles iſoſceles, on aura $\sin c = 0,02380952$, & ſinus k, comme (XX) $= 0,0186119$; donc $c = 81',858734$, & $k = 63',94978$. Ici on a $\Phi^{VIII} = (m-1)\ 10.c - (n-1)\ 8k$, ou $\Phi^{VIII} = 5,5\,c - 4,8k = 450',223037 - 306',958944 = 143',26409$; donc l'angle d'aberration $\Phi^{VIII} - A = 0',10689$.

L'angle à l'axe des raïons rouges ſeroit ici $\Phi^{VIII} = 0,54 \times 10.c - 0,584 \times 8k = 5,4\,c - 4,672\,k = 143',26379$; celui des raïons violets ſera $\Phi^{VIII} = 0,56 \times 10.c - 0,616 \times 8k = 143',26439$; donc l'angle d'aberration de réfrangibilité ſera $= 0',0006$.

XXII. Soit enfin un objectif à 5 lentilles de chaque eſpece; on aura ſin c, & c comme §. XXI; ſin $k = 0,01488095$; ce qui répond à l'arc $k = 51',158528$; donc $\Phi^{IX} = (m-1)\ 10.c - (n-1)\ 10\,k = 5,5\,c - 6\,k = 450',223037 - 306',951168 = 143',271869$; ce qui donne l'angle d'aberration $\Phi^{IX} - A = 0',1146$.

XXIII. En comparant les réſultats de ce calcul, que ſa grande facilité m'a fait pouſſer juſqu'au dixieme verre, il paroit 1°. que les combinaiſons les plus avantageuſes pour diminuer l'aberration de ſphéricité ſont celles où les lentilles ſont en nombre impair; 2°. que la combinaiſon à 3 verres donne la plus petite, & même une très petite aberration. On pourra les comparer ſur les réſultats que je rapproche ici.

1 verre, aberration de ſphér.	$= 0',116.$	2 verres, aberr.	$= 0',869.$
3 verres, - -	$= 0',065.$	4 verres, -	$= 0',278.$
5 verres, - - -	$= 0',130.$	6 verres, -	$= 0',170.$
7 verres, - -	$= 0',118.$	8 verres, -	$= 0',132.$
9 verres, - - -	$= 0',107.$	10 verres, -	$= 0',115.$

La raiſon de ces deux obſervations eſt, que dans les combinaiſons paires c'eſt le nombre des lentilles de criſtal qui augmente ſeul; donc le ſinus conſtant des arcs négatifs k, étant plus ſubdiviſé, donne une ſomme ſouſtractive d'arcs k plus petite, tandis que la ſomme poſitive des arcs c n'a pas varié. D'où il doit arriver que Φ ſoit plus grand dans un ſyſteme pair, qu'il n'étoit dans la combinaiſon impaire précédente. Pour faire trouver cet angle plus petit, il n'y a donc qu'à ſubdiviſer davantage les lentilles convexes de crownglaſs, & ſubdiviſer moins celles de cryſtal qui ſont concaves; par cet expédient les arcs du crownglaſs, répondant à de plus petits ſinus, en différeront moins d'eux, & donneront une plus petite ſomme additive; & les arcs du flintglaſs, répondant à de plus grands ſinus, en différeront davantage, & donneront une plus grande ſomme ſouſtractive; & par conſéquent $\Phi = (m - 1)(c + c + c \text{ \&c.}) - (n - 1)(k + k + \text{\&c.})$ en ſera doublement diminué. Or c'eſt préciſément là le cas d'un objectif à trois verres. Le nombre des lentilles convexes y eſt à celui des lentilles concaves dans la proportion la plus éloignée, ſavoir celle de 2 à 1, au lieu que les proportions des autres combinaiſons impaires ſe rapprochent de plus en plus de la raiſon d'égalité 3 à 2; 4 à 3; 5 à 4; &c.

Au reſte, on ne doit pas prendre ces réſultats à la lettre comme donnant l'aberration abſolue & exacte; car, outre que l'épaiſſeur de la derniere face n'y entre pas encore, comme nous avons ſubſtitué les arcs aux ſinus, il eſt clair que ces déterminations ne ſont pas exactes: celles qui s'écartent le plus du vrai ſont donc celles où les faces de l'objectif ont les plus grandes courbures; ainſi la combinaiſon à deux verres a du donner le réſultat le moins exact; puis celle à 3 & à 4 verres.

res. L'objectif ſimple iſoſcele, & celui de cinq verres, ont les faces à peu près d'une égale courbure, & peu conſidérable; au delà de cinq verres, le rapport des arcs, qui vont toujours en diminuant, ſe rapproche de plus en plus de celui des ſinus eux-mêmes. Quoi qu'il en ſoit, ce calcul groſſier de comparaiſon contient déjà les élémens néceſſaires au calcul précis de l'aberration que je donnerai plus bas; mais, avant d'y paſſer, il faut encore traiter deux articles eſſentiels; l'un regarde la méthode de trouver l'aberration longitudinale, en connoiſſant l'angle à l'axe & la courbure de la derniere face; l'autre concerne l'influence des forces réfractives & réfrangibles des verres de diverſes eſpeces, ſur l'aberration de ſphéricité des objectifs compoſés.

XXIV. Le premier article n'a point de difficulté. La ſeule inſpection de la figure 3 montre qu'en négligeant l'épaiſſeur de la lentille, l'aberration de longueur GF ſeroit la différence entre la cotangente de l'angle au foïer A, & la cotangente de l'angle à l'axe Φ, en rapportant ces tangentes à la demi-ouverture BM, comme à leur ſinus totus. Or l'épaiſſeur LM, flêche du demi-arc AM $=$ c, eſt la tangente de l'angle LAM, rapportée au même ſinus totus AL, & il eſt aiſé de démontrer que cet angle LAM eſt la moitié de l'angle AcM; on a donc LM $=$ x tang $\frac{1}{2}c$, & GF $=$ x cotang A $-$ x cotang Φ; or x cotang A $=$ 100; on a donc l'aberration longitudinale fF $=$ 100 $-$ 4,1666 (cotang Φ $=$ tang $\frac{1}{2}c$.)

Exemple.

En ſuppoſant par ex. pour l'objectif ſimple, l'angle Φ, tel que la raiſon des angles l'a donné §. 11, $=$ 2°. 23′,2733, & c $=$ 2°. 10′,24845, on a l'aberration de cet objectif, fF $=$ 100 $-$ 4,1666 (tang. 87°. 36′,7267 $-$ tang 1°. 5′,12422), ou fF $=$ 100 $-$ 4,1666 (23,961717) $=$ 0,1595, de ces parties dont la diſtance focale F en contient 100, c. à d. que l'aberration de ſphéricité ſeroit ici 0,001595 F.

Remarque.

Comme la flèche LM eſt connue en parties du foïer, étant $= x \text{ tang } \frac{1}{2}c = \frac{F}{24} \text{ tang } \frac{1}{2}c$, il ſera encore plus aiſé de ne prendre que la cotangente de l'angle ⌀, laquelle, ſi l'aberration n'eſt pas exceſſive, ſera toujours la tangente de 87°. 36′, plus le produit de la fraction décimale des minutes par la différence des tangentes de 87°. 36′, & 87°. 37′; différence qui eſt $= 167043$, & ſon logarithme eſt $= 5,2228283$. Ainſi, dans cet exemple-ci, on a cot ⌀ $= 23,859277 + (167043 \times 0,7267)$; l'aberration ſera donc:

$$fF = \frac{F}{24}(24 - 23,980667) + LM, \text{ or } LM = 0,01895\,\frac{F}{24};$$

donc $fF = \frac{F}{24}(0,019333 + 0,01895)$, ou $fF = \frac{0.038283}{24}.F = 0,00159512\,F.$

XXV. Il eſt aiſé de s'appercevoir que les rapports des réfractions des verres, m & n, & de leur diverſe force diſperſive dn, influe beaucoup ſur la détermination de l'aberration de ſphéricité. Mais, comme c'eſt la nature du verre qui fixe ces rapports, on n'y peut rien changer. Tout ce qu'on peut faire, c'eſt 1°. de choiſir les eſpeces dont les rapports m & n ſeroient les plus favorables à diminuer la valeur de l'angle à l'axe ⌀; 2°. de s'écarter un peu, s'il eſt néceſſaire, du rapport des diſperſions dn, dans la combinaiſon des verres; en ſorte que la confuſion due à la réfrangibilité ſoit beaucoup moins augmentée par cet écart, que la confuſion due à la ſphéricité n'en ſera diminuée.

On a pour un objectif à deux lentilles, l'une iſoſcele convexe, l'autre iſoſcele concave, la formule de la diſtance focale (art. XI. XIII.)

$F =$

$$F = \frac{x}{(m - 1)\ 2 \sin c - (n - 1)\ 2 \sin k}.$$

Or, pour détruire l'aberration de réfrangibilité, il faut prendre $\sin k = \frac{\sin c}{dn}$. (art. XIII.); ainſi, aiant

$$x = \frac{F}{24}, \text{ on a } 48 \sin c = \frac{1}{(m - 1) - \frac{(n - 1)}{dn}}.$$

Mais il eſt évident qu'à meſure qu'une des trois indéterminées, m, n, dn, variera, le ſinus de c, & par conſéquent celui de k, varieront auſſi.

I. Suppoſons d'abord que dn augmente ſeul. Il eſt clair que les ſinus des arcs de courbure c & k en deviendront plus petits, & que par conſéquent l'aberration de ſphéricité en ſera moindre. *Il eſt donc avantageux de prendre* dn *plutôt trop grand, que de le prendre plus petit qu'il n'eſt donné par l'obſervation.*

II. Si n ſeul augmente, ſin c, en devient plus grand, & ſinus k pareillement. *Il faut* donc, *pour diminuer l'aberration, choiſir, pour les lentilles concaves, l'eſpece de verre qui aiant la plus grande diſperſion, ait la moindre force réfractive.*

III. Si m eſt ſeul augmenté, les ſinus des arcs c & k en diminueront dans la même raiſon, & l'aberration en ſera par conſéquent moindre. *Il faut* donc *prendre, pour les lentilles convexes, l'eſpece de verre qui réfracte le plus, & qui diſperſe le moins.*

IV. Si $m - 1$ augmente dans la même proportion que $\frac{n - 1}{dn}$, l'aberration reſte la même, puiſque la grandeur des ſinus de c & de k n'aura pas varié.

V. Si m & n ſont augmentés d'une égale quantité, dn reſtant invariable, l'aberration diminue, puiſqu'alors le dénominateur de la fraction $\frac{1}{(m-1)-\frac{(n-1)}{dn}}$ augmentant, les arcs c & k en deviennent plus petits.

VI. Si $n-1$ & dn augmentent ou diminuent dans la même proportion, m reſtant invariable, la grandeur du ſinus c n'aura pas changé; mais celle du ſinus de k décroit à meſure que dn augmente; & cela peut influer ſur l'aberration.

Il ſera donc très important de déterminer avant tout, par des expériences bien exactes, les forces de réfracter & de diſperſer, des verres qu'on veut emploïer, pour juger enſuite de la combinaiſon la plus propre à diminuer ou à détruire les aberrations.

XXVI. En continuant de ſuppoſer les rapports adoptés juſqu'ici, ſavoir: $m = 1,55$; $n = 1,6$; $dn = 1,6$, il eſt tems d'appliquer la méthode que j'ai décrite au calcul exact de l'aberration de ſphéricité.

I. Il eſt évident d'abord que, quelque grand que ſoit le nombre des verres d'un objectif, il n'y a que la flêche du dernier arc de courbure qui entre dans l'eſtimation de l'aberration, pour l'augmenter ſi la derniere face eſt convexe, ou pour la diminuer ſi cette derniere face eſt concave. Ainſi les déterminations que les Géometres ont données pour la proportion des faces d'un objectif ſimple, peuvent tout au plus s'appliquer à ce dernier verre, & ne conviennent point aux lentilles antérieures.

II. Comme naturellement l'angle à l'axe ⏀ eſt toujours plus grand que l'angle au foïer A, & que c'eſt de l'inégalité de ces deux angles que réſulte la principale aberration, on doit tâcher d'avoir cet angle à l'axe auſſi petit qu'il ſe peut. Or, auſſi longtems que dans la for-

formule de cet angle nous avons mis les arcs eux-mêmes au lieu de leurs ſinus, le *minimum* de Φ étoit le cas des lentilles iſoſceles, puiſque c'eſt celui qui donne la plus petite ſomme des arcs de courbure. Mais, quoiqu'en ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, on trouvera dans la plupart des combinaiſons l'angle à l'axe aſſez exactement pour ne pas ſe tromper d'une dixaine, ou d'une vingtaine de ſecondes, ſur ſa grandeur véritable: cependant cette préciſion ne ſauroit ſuffire dans des lunettes de 4 pieds & au delà, où un angle d'aberration de plus d'une demi-ſeconde produiroit déja une trop forte confuſion. Il faut donc déterminer l'angle à l'axe par les ſinus des arcs de courbure, & alors le *minimum* de cet angle ne tombera plus préciſément ſur le cas des faces iſoſceles; il variera avec les valeurs de m & de n, comme nous le verrons ci-deſſous.

III. Comme les verres convexes rendent Φ poſitif, ou convergent à l'axe, & qu'au contraire les lentilles concaves le rendent négatif ou divergent, il eſt clair que, plus on pourra diminuer la valeur de Φ, Φ'', Φ^{IV} &c. dans les lentilles convexes, & augmenter la valeur de Φ', Φ''', Φ^{V} &c. dans les lentilles concaves, plus on rendra petit le dernier angle à l'axe Φ^{n}, & plus par conſéquent on diminuera l'aberration de ſphéricité poſitive, c. à d. entre la diſtance focale & l'objectif. Mais on pourroit auſſi rendre l'angle à l'axe Φ^{n} ſi petit, que l'aberration de ſphéricité deviendroit négative, c. à d. que le foïer des raïons extremes ſeroit projetté au delà de la diſtance focale; ce qui produiroit la même confuſion que celle qui réſulte de l'aberration poſitive.

IV. Comme la longueur déterminée du foïer, ſon rapport à l'ouverture, & celui des diſperſions, déterminent abſolument la ſomme des ſinus de courbure, & le rapport des concavités aux convexités; toute la queſtion ſe réduit à rechercher, lequel eſt le plus avantageux pour diminuer l'aberration à ouverture égale, ou de multiplier les verres iſoſceles, ou de donner aux verres des faces inégales; & dans quels cas il ſeroit avantageux de tolérer quelque aberration

tion de réfrangibilité pour détruire plus complettement celle de ſphéricité.

XXVII. Dans un objectif compoſé, l'angle à l'axe Φ des raïons extremes ſortant du dernier verre eſt augmenté par la convergence, & diminué par la divergence que ces raïons ont eue au ſortir de chaque verre précédent; ſi l'on ne riſquoit point de rendre négative l'aberration de ſphéricité, il ne s'agiroit donc que de trouver le *minimum* & le *maximum* de la formule de l'angle Φ, & de donner aux lentilles convexes la proportion des faces que preſcrira le *minimum*, & aux lentilles concaves celle que le *maximum* aura indiquée.

La formule de l'angle à l'axe, commune à chaque eſpece de lentille, & à toutes les incidences quelconques, eſt:

$$\Phi' = \pm m \text{ ſin } \left[\pm (c + c') \mp \text{ ſin } \frac{(c \mp \Phi)}{m} \right] \mp c'$$

(art. IX.) où il faut obſerver, 1°. que m dénotant la raiſon de réfraction du verre, devient n lorſqu'il s'agit du flintglaſs; 2°. c déſigne le demi-arc de la face antérieure, & c', celui de la face poſtérieure de la lentille; 3°. Φ dénote l'angle à l'axe des raïons au ſortir du verre précédent: ainſi, lorſqu'il s'agit de la premiere lentille, on a $\Phi = 0$, ſi les raïons incidens ſont cenſés paralleles à l'axe.

4°. Lorſque les verres convexes & concaves alternent, la convergence du raïon au ſortir de la premiere lentille convexe augmente l'angle d'incidence ſur la lentille concave qui ſuit, & rend l'angle à l'axe de cette ſeconde lentille moins divergent. Pareillement, ſi le verre concave précede, la divergence du raïon augmente l'angle d'incidence ſur la lentille convexe, & rend par conſéquent l'angle de cette ſeconde lentille moins convergent.

5°. Si au contraire les lentilles convexes ſe ſuivent immédiatement, la convergence des raïons qui paſſent d'une lentille dans l'autre rend les angles d'incidence plus petits, & les angles à l'axe d'autant plus grands. La divergence produit le même effet ſur les verres concaves

caves appliqués immédiatement les uns aux autres. Il ſemble donc que, de quelque maniere que l'on combine les verres d'un objectif, il n'en réſulte aucun changement dans la grandeur du dernier angle à l'axe; mais il ſera toujours avantageux de placer en dernier lieu un verre concave, pour rendre négative l'aberration qui eſt produite par l'épaiſſeur de la derniere courbure.

Il eſt certain que ſi la réfraction ſuivoit la raiſon des arcs, rien ne ſeroit, par rapport à l'angle Φ, plus indifférent que l'arrangement des lentilles; on auroit dans toutes les combinaiſons poſſibles, & quel que fut le nombre des verres v, l'angle à l'axe au ſortir de l'objectif

$$\Phi^{v} = (m-1)(c+c+c+\&c.+c'+c'+c'+\&c.) - (n-1)(k+k+\&c.+k'+k'+\&c.).$$

Mais, puiſque la réfraction ſuit la raiſon des ſinus, & qu'une différence d'une ſeule ſeconde ſur l'angle à l'axe augmente ou diminue conſidérablement l'aberration, il ne ſera pas inutile dans les cas où il reſteroit quelque aberration à détruire après avoir donné aux faces la meilleure proportion poſſible, de chercher auſſi l'arrangement des verres le plus avantageux.

Quant à la proportion des faces de chaque lentille, je laiſſe aux Géometres à déterminer par l'analyſe le *minimum* de l'angle à l'axe; quelque ſimple que ſoit la formule de cet angle, le calcul de ſon *minimum* ne laiſſeroit pas d'être aſſez compliqué; mais il eſt aiſé de ſe diſpenſer de ce calcul: car, outre qu'il ſera rarement beſoin de prendre le *minimum* de Φ, pour détruire l'aberration, il ſuffira pour la pratique de déterminer ce *minimum* à l'aide d'un ſimple raiſonnement métaphyſique. Nous avons déjà obſervé plus haut que, ſi l'on peut ſubſtituer les arcs aux ſinus, on aura le *minimum* de $\Phi = m\left(c+c'-\frac{(c-\Phi)}{m}\right) - c'$, lorſque la ſomme des arcs $c+c'$ ſera la plus petite, ce qui eſt le cas des faces iſoſceles, parce qu'alors la ſomme conſtante des

ſinus de courbure ſin c + ſin c' = ſin a, donneroit chaque arc = *ang ſin* $\frac{1}{2}$ a, & par conſéquent $\Phi' = 2(m-1)$ ang (ſin $\frac{1}{2}a + \Phi$).

Par la même raiſon on aura le *maximum* de Φ', lorſque l'une des deux faces ſera plane, ſi l'on ne veut pas pouſſer juſqu'aux ménifques; on aura pour ce *maximum* $\Phi' = (m-1)$ ang (ſin $a + \Phi$), & il eſt évident que l'angle du ſinus a eſt toujours plus grand, que le double de l'angle du ſinus $\frac{1}{2}a$. Enfin, ſi l'on veut emploïer des ménifques, le *maximum* de Φ' ſera lorſqu'on aura *ſinus totus* − *ſin* c = *ſin* a, c'eſt à dire lorſque la face concave du ménifque ſera une demi-ſphere, & que la face convexe aura pour demi-arc de courbure un arc dont le ſinus ſera = *ſin tot* − *ſin* a.

Or, quoique la réfraction ſuive la raiſon des ſinus, & non celle des arcs, il eſt clair que le *maximum* de la formule: m ſin $\left(c + c' - \text{ſin } \frac{(c-\Phi)}{m}\right) - c'$, reſte tel que je viens de le déterminer; car tout ce qui augmente ici la ſomme des arcs $c + c'$, augmente à plus forte raiſon l'angle qui répond au ſinus de ces arcs multiplié par le facteur m. Mais il n'eſt plus indifférent laquelle des deux faces c, ou c', doit être plane. Si l'on fait $c = 0$, la formule devient $\Phi' = m$ ſin $\left(c' + \frac{\text{ſin } \Phi}{m}\right) - c'$, au lieu que ſi l'on poſe $c = 0$, elle ſera $\Phi' = m$ ſin $\left(c - \text{ſin } \frac{(c-\Phi)}{m}\right)$. Or il eſt aiſé de voir que la premiere valeur de Φ' ſera la plus grande, puiſque m, ou n, eſt plus grand que l'unité, & qu'en augmentant les ſinus, on augmente les arcs correſpondans dans une plus forte proportion. Il faudroit donc faire les verres intermédiaires de flintglaſs plans-concaves, & tourner leur concavité vers l'œil, ſi l'on vouloit augmenter autant qu'il eſt poſſible la divergence du raïon, ou l'angle à l'axe négatif, ſans emploïer des ménifques.

Que

Que ſi l'on fait la face antérieure de ce verre convexe, la formule devient $\Phi' = n \text{ ſin } \left(- c + c' - \text{ang ſin } \frac{(c + \Phi)}{n} \right) - c'$,

où il eſt également aiſé de voir que le *maximum* ſera lorſque c' aura la plus grande valeur poſſible, ce qui donne $c' = 90^d$. & *ſin* $c =$ *ſin tot* $-$ *ſin* a.

Il n'en eſt pas de même du *minimum* de la formule; dès que la réfraction ſuit le rapport des ſinus, la plus petite valeur de l'angle à l'axe n'eſt plus préciſément dans le cas des faces iſoſceles, parce que les arcs & leurs ſinus ne diminuent pas ſuivant une même proportion. La formule contient des arcs donnés par eux-mêmes, & d'autres qui ne ſont donnés que par leurs ſinus, multipliés ou diviſés par des quantités conſtantes; & puiſque l'augmentation des ſinus opere une augmentation plus forte dans les arcs correſpondans, il importe ici de diminuer le ſinus préferablement aux arcs. Ainſi la formule étant: $\Phi' = m \text{ ſin } \left(c + c' - \text{ſin } \frac{(c - \Phi)}{m} \right) - c'$, pour rendre Φ un *minimum*, il faut plutôt augmenter la quantité ſouſtractive: ang ſin $\frac{(c - \Phi)}{m}$, que l'autre quantité ſouſtractive c'. Mais, dans le terme ſin $\frac{(c - \Phi)}{m}$, on n'a de variable que c; c'eſt donc la courbure de la face convexe antérieure qu'il faut augmenter. Cette augmentation doit néanmoins avoir ſes bornes, puiſqu'on ne ſauroit augmenter la courbure d'une face, qu'aux dépens de celle de l'autre, le foïer reſtant le même; & qu'ainſi en augmentant c, on diminue la valeur ſouſtractive c', qui contribue auſſi à rendre Φ plus petit. Pour ne pas perdre d'un côté ce qu'on gagne de l'autre, il faut donc balancer exactement l'angle de ſin $\frac{(c \pm \Phi)}{m}$ avec l'angle c, ce qui donne *l'équation du minimum*

$\text{fin}\ \frac{(c \pm \Phi)}{m} = \text{fin}\ c'$, ou $\text{fin}\ (c \pm \Phi) = m\ \text{fin}\ c'$, & dans la premiere lentille où l'on ſuppoſe l'incidence parallele à l'axe, comme on a alors $\Phi = o$, l'équation du *minimum* ſera : $\text{fin}\ c = m\ \text{fin}\ c'$.

Corollaire I.

Puiſque le *minimum* de la formule

$$m\ \text{fin}\left(c + c' - \text{fin}\ \frac{(c \mp \Phi)}{m}\right) - c',$$ eſt en poſant

fin $c \mp \Phi = m$ *fin* c', & le *maximum* lorſqu'on poſe $c = o$, on aura en changeant les ſignes le *maximum* de la formule :

$$k' - n\ \text{fin}\left(k + k' - \text{fin}\ \frac{(k \pm \Phi)}{n}\right),$$ ſi l'on fait

$\text{fin}\ (k \pm \varphi) = n\ \text{fin}\ k'$, & ſon *minimum* en poſant $k' = o$.

Corollaire II.

Pour ne pas confondre les divers cas, je donnerai ici les formules particulieres de l'angle à l'axe ; elles n'ont beſoin que d'être indiquées, puiſqu'elles réſultent immédiatement de la figure des verres. En gardant les dénominations précédentes, & δ dénotant toujours l'angle de réfraction au ſortir d'une lentille, on a :

1°. Pour la lentille convexe.

1°. L'angle à l'axe *convergent*, ou poſitif, $\Phi' = \delta - c'$; ainſi la formule donne $\Phi' = m\ \text{fin}\left(c + c' - \text{fin}\ \frac{(c \mp \Phi)}{m}\right) - c'$, dont le *minimum* ſera lorſqu'on prendra *fin* $(\epsilon \mp \Phi) = m$ *fin* c'.

2°. L'angle à l'axe *divergent*, ou négatif, eſt $\Phi' = c' \mp \delta$; ainſi la or-

formule devient $\Phi' = c' \mp m \sin \left[\pm (c + c') \mp \sin \frac{(c \pm \Phi)}{m} \right]$,

dont le *maximum* ſuppoſe $\sin (c \pm \Phi) = m \sin c'$.

II°. Pour *un verre concave.*

3°. L'angle à l'axe *convergent*, ou poſitif, donne $\Phi' = k' \mp \delta$; ainſi la formule devient $\Phi' = k' \mp n \sin \left[\pm (k + k') \mp \sin \frac{(k \pm \Phi)}{n} \right]$,

dont le *minimum* eſt $k' = o$.

4°. L'angle à l'axe *divergent*, ou négatif, donne $\Phi' = \delta - k'$; ainſi la formule eſt dans ce cas: $\Phi' = n \sin \left(k + k' - \sin \frac{(k \pm \Phi)}{n} \right) - k'$, dont le *maximum* eſt $k = o$.

Corollaire III.

A l'aide de ces déterminations, la formule de l'angle à l'axe deviendroit encore plus ſimple, & plus aiſée à développer. On aura *le plus petit angle à l'axe poſitif*, au ſortir d'une lentille convexe,

$$\Phi'' = ang\ \mathrm{m}\ fin\ \mathrm{c} - c';$$

& au ſortir d'une lentille concave,

$$\Phi'' = ang\ \mathrm{n}\ fin \left(ang\ fin \frac{(\mathrm{k} + \Phi)}{n} - \mathrm{k} \right).$$

Pareillement on aura *le plus grand angle à l'axe négatif*, au ſortir d'une lentille convexe,

$$\Phi'' = c' \mp ang\ \mathrm{m} : fin\ \mathrm{c};$$

& au ſortir d'une lentille concave,

$$\Phi'' = ang\ \mathrm{n}\ fin\ (\mathrm{k}' \pm ang\ fin \frac{\Phi}{n} - \mathrm{k}'.$$

XXVIII. La regle générale qu'on doit ſe propoſer dans les moïens de détruire l'aberration, tant pour la facilité de l'exécution, que pour la perfection des verres, c'eſt de s'écarter le moins qu'il ſera poſſible des faces iſoſceles; d'éviter la trop grande inégalité des raïons, & de ne paſſer aux ménifques que lorſqu'on ne pourra détruire autrement la confuſion qui réſulte de la ſphéricité. Pour ſuivre cette regle, je ſuppoſerai d'abord les verres de chaque eſpece à faces iſoſceles; & l'aberration reſtante indiquera, dans chaque combinaiſon, le changement le plus avantageux à choiſir, pour détruire cette aberration.

XXIX. *Calcul de l'aberration de ſphéricité dans un objectif ſimple à faces iſoſceles.*

Je ſuppoſe toujours qu'on a $m = 1,55$, $n = 1,6$, & $dn = 1,6$. Je donnerai ici le calcul entier, pour que les Artiſtes puiſſent appliquer ce procédé à tous les cas qui ſe préſenteront.

La formule de l'angle à l'axe pour une lentille bi-convexe iſoſcele eſt (art. VIII. IX.): $\varphi = \text{ang } m \text{ ſin } (2c - \frac{\text{ang ſin } c}{m}) - c$;

or on a ici ſin $c = 0,0378787$, &
l'arc $c = 2^\circ. 10', 24845$. (art. XI.) $= 2^\circ. 10', 2\frac{7}{9}\frac{3}{0}\frac{2}{8}$.

$$\log : \text{ſin } c = 8,5783950$$
$$- \log : m = 0,1903317$$
$$\log : \frac{\text{ſin } c}{m} = 8,3880633,$$

$$\text{donc } \frac{\text{ſin } c}{m} = 0,02443787,$$

$$\text{donc ang } \frac{\text{ſin } c}{m} = 1^\circ. 24', 2\frac{56,7}{9}\frac{0}{8} = 1^\circ. 24', 019497.$$

$$\text{donc } 2c - \text{ang } \frac{\text{ſin } c}{m} = 2^\circ. 56', 4774,$$

donc

dont le ſinus eſt $=$ 0,0511,740 + (2905 x 0,4774 $=$ 0,0513127;

donc m ſin $\left(2c - \text{ang}\frac{\text{ſin}\, c}{m}\right) = (0{,}0513127 \times 1{,}55) = 0{,}07953468$;

donc ang m ſin $\left(2c - \text{ang}\frac{\text{ſin}\, c}{m}\right) = 4°.33',\frac{2056,8}{2900} = 4°.33',7092$,

d'où orant l'arc $c = 2°.10',2484$

reſte l'angle à l'axe $\Phi = 2°.23',4608$;

mais l'angle de meſure A. eſt (VIII) $= 2.\ 23',1571$

donc l'angle d'aberration $\Phi - A = \quad 0',3037$.

Remarque 1.

En ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, cet angle d'aberration n'eſt que de 0, 116'. (art. XI.) & par conſéquent au delà de deux fois & demie plus petit que le calcul exact ne vient de le donner. D'où l'on voit que, dès que les courbures ſont de quelques degrés, il ne ſeroit pas ſûr de s'en tenir au rapport des angles, pour eſtimer l'aberration, puiſqu'une différence de $\frac{1}{100}\frac{8}{0}'$, ou $\frac{1}{100}\frac{2}{0}'$, fait une erreur très conſidérable ſur la longueur de la diffuſion, pour peu que le foïer de l'objectif ſoit grand.

Remarque 2.

L'aberration en longueur étant $fF = 100 - \frac{200}{24}$ (cotang Φ — tang $\frac{1}{2}c$) (art. XXIV.) on a ici la cotangente Φ, ou la tangente de 87°. 36',54 $=$ 23,859277 + (167043 x 0,54);

donc on a cot $\Phi = 23{,}949346$;

on a (art. XXIV.) tang $\frac{1}{2}c = 0{,}019165$;

donc cot Φ — tang $\frac{1}{2}c = 23{,}930181$;

donc $Ff = 100 - 99{,}7091 = 0{,}2909$, centiemes du foïer $= 0{,}00291$. F.

Re-

Remarque 3.

Par la formule de M. Euler, (*Mém. de l'Acad.* Tome XVII. pag. 129.) on a, en posant $m = 1,55$, l'aberration de longueur d'un objectif simple isoscele $= \frac{xx}{F}$ (1,529) ; ce qui, pour $F = 100$ & $x = \frac{100}{24}$, donne cette aberration: $fF = 0,26545$. Ainsi la formule de M. Euler donne, à $\frac{1}{11}$ près, la véritable aberration de sphéricité.

Remarque 4.

Sur un foïer de 50 pouces, l'aberration de sphéricité d'un objectif simple isoscele de crownglass seroit donc $= 0,1454$ pouces. Par conséquent elle seroit environ 38 fois plus grande que la diffusion tolérable, qu'on estime $= 0,00375$ pouces. Il faudroit donc rendre l'ouverture plus de six fois moindre que je ne la pose, c'est à dire $\frac{F}{12,6} = \frac{50}{6\frac{1}{2}}$ pouce, ou environ 8 lignes. Mais, comme M. Huygens donne cette ouverture de plus d'un pouce, pour une lunette de 4 pieds, malgré l'aberration de réfrangibilité, dont je ne tiens pas même compte ici, il semble qu'on peut tolérer dans la pratique une diffusion plus que double de celle de $\frac{3}{800}$ de pouce, que l'on prend communément pour la mesure d'une diffusion insensible, & qu'il suffit de la prendre 16 à 17 fois moindre que l'ouverture $\frac{F}{12}$ ne l'a donnée, c. à d. environ $= 0,009$ pouces. Au reste la détermination de la valeur absolue d'une aberration, pour qu'elle soit insensible, doit être relative à une amplification déterminée; & celle-ci l'est par le rapport du foïer de l'oculaire à la distance focale de l'objectif. Celle que j'adopte ici, & qui suppose le moindre angle sensible dans l'œil d'environ $3'',5$, sera donc, pour un foïer F quelconque réduit en pouces: $fF = \frac{0,00375''}{50} F = 0,000075''.F.$

XXX. *Calcul de l'aberration de ſphéricité d'un objectif à deux verres, dont chaque lentille a ſes faces iſoſceles; en ſuppoſant toujours* $m = 1,55$, $n = 1,6$, $dn = 1,6$.

Dans les objectifs compoſés, ſi l'on nomme *ſin* c la ſomme des ſinus de courbures des lentilles de *crownglaſs*, & *ſin* k la ſomme des ſinus de courbures du *flintglaſs*, on a (art. XIII.)

$$F = \frac{x}{(m-1)\ \text{ſin}\ c - (n-1)\ \text{ſin}\ k},$$ & ſubſtituant les valeurs adoptées de F, x, m & n, on aura

$$24 = \frac{1}{0,55\ \text{ſin}\ c - 0,6\ \text{ſin}\ k}.$$

Mais, pour détruire la réfrangibilité, aiant ici $dm : dn = 1 : 1,6$, il faudra prendre $\frac{1}{\text{ſin}\ c} : \frac{1}{\text{ſin}\ k} = 1 : 1,6$, ce qui donne ſin $k = 0,625$ ſin c;

ſubſtituant cette valeur de ſin k dans l'équation précédente, on aura $24 = \frac{1}{0,175\ \text{ſin}\ c}$, d'où l'on tire le ſinus conſtant $c = 0,238095238$,

& le ſinus conſtant $k = 0,148809523$.

Quel que ſoit préſentement le nombre des verres d'un objectif, & le rapport des faces de ces verres, auſſi longtems que la diſtance focale & l'ouverture reſteront les mêmes, la ſomme des ſinus de courbure de chaque eſpece de verre reſtera conſtamment telle que nous venons de la déterminer pour le cas de deux lentilles, l'une plane-convexe, l'autre plane-concave, pourvu que les diſperſions & les réfractions aïent les rapports que nous leur avons ſuppoſés.

Ainſi, dans le cas préſent, d'un objectif à deux lentilles iſoſceles, on a pour le demi-arc de chaque face convexe,

$\sin c = \frac{0,2380952}{2} = 0,1190476$, & de chaque face concave,

$\sin k = \frac{0,1488095}{2} = 0,0744047$, ce qui donne

l'arc $c = 6°.\,50'.\,\frac{6660}{8888} = 6°.\,50',22853$,

& l'arc $k = 4°.\,16'.\,\frac{61}{261} = 4°.\,16',021027$.

Maintenant, pour diminuer l'aberration de ſphéricité, il convient de rendre l'épaiſſeur de la derniere face négative, ce qu'on obtient en plaçant la lentille convexe vers l'objet, & la concave vers l'œil.

I. Pour le verre convexe.

La formule de l'angle à l'axe des raïons extremes au ſortir du premier verre ſera donc : (art. IX.) $\Phi = m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) - c$;

or on trouve $\frac{\sin c}{m} = 0,0768049$;

donc, ang $\frac{\sin c}{m} = 4°.\,24',\frac{8}{261}$;

donc, $2c -$ ang $\frac{\sin c}{m} = 9°.\,16',1609136$;

donc, $m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 1,55 \times 0,16107588 = 0,2496676$,

ce qui répond à l'arc $14°.\,27',\frac{1326}{2617} = 14°.\,27',4707136$;

d'où ôtant l'arc $c = 6°.\,50',2285318$,

reſte l'angle à l'axe $\Phi = 7°.\,37',2421818$.

II. Pour le verre concave.

La formule de l'angle à l'axe Φ', eſt

$$\Phi' = k' - n \sin\left(2k - \sin\left(\frac{k + \Phi}{n}\right)\right);$$

or

or on a ici $k + \Phi = 11^{\circ}.53',263209$;

donc $\frac{\text{ſin } (k+\Phi)}{n} = \frac{0,2059944}{1,6} = 0,1287465$;

donc ang ſin $\frac{(k+\Phi)}{n} = 7^{\circ}.23',82981$,

lequel ſouſtrait de $2k = 8^{\circ}.32',042054$,

reſte l'angle $2k - \text{ang } \frac{\text{ſin } (k+\Phi)}{n} = 1^{\circ}.8',212244$,

dont le ſinus $= 0,0198308$, multiplié par n, répond à un arc de $1^{\circ}.49',095631$.

Aiant donc ici $k' = 4^{\circ}.16',021027.$

$-n \text{ ſin } \left(2k - \text{ſin } \frac{(k+\Phi)}{n}\right) = 1^{\circ}.49',095631,$

j'ai Φ' angle à l'axe $= 2^{\circ}.26',925396.$

Mais l'angle de meſure A $= 2^{\circ}.23',157145;$

donc l'angle d'aberration $\Phi' - A = 3',768251.$

Remarque 1.

Il eſt aiſé de voir que la confuſion qui réſulteroit d'une ſi grande aberration de ſphéricité ſeroit inſupportable. En ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, je n'avois trouvé cet angle d'aberration que de 0, 8689′ (art. XIII.) ce qui n'eſt que $\frac{3}{5}$ du véritable angle que nous venons de trouver. Mais la raiſon en eſt évidente. Les arcs de courbures, qui vont dans cette combinaiſon à environ 7^{d}, ſont trop grands pour être ſubſtitués ſans erreur à leurs ſinus.

Remarque 2.

Pour connoitre l'aberration de réfrangibilité qui réſulte de la combinaiſon des deux lentilles, il n'y a qu'à chercher l'angle à l'axe des

raïons rouges, & des raïons violets, par un calcul pareil à celui qui nous a donné l'angle à l'axe des raïons moïens.

I. Pour les raïons rouges.

Posant ici, comme dans l'article XIV, $m = 1,54$, $n = 1,584$, on trouvera 1°. *pour la lentille convexe :*

$$\frac{\sin c}{m} = \frac{0,1190476}{1,54} = 0,0773036;$$

$$\text{ang}\,\frac{\sin c}{m} = 4°.\,26',015517;$$

$$2c - \text{ang}\,\frac{\sin c}{m} = 9°.\,14,441547;$$

$$m \sin\left(2c - \frac{\text{ang}\,\sin c}{m}\right) = 0,1605823 \times 1,54,$$

$$\text{ou } \sin \delta = 0,247296742;$$

$$\text{donc } \delta = 14°.\,19',056068,$$

$$-c = 6.\,50',22853,$$

$$\Phi = \delta - c = 7°.28',827538.$$

2°. *pour la lentille concave :*

$$\text{on aura donc } k + \Phi = 11°.\,44,848565,$$

$$\sin\frac{(k+\Phi)}{n} = \frac{0,20359865}{1,584} = 0,1285352,$$

$$\text{ang sin}\,\frac{(k+\Phi)}{n} = 7°.\,23',0974,$$

$$\text{ang } 2k - \sin\frac{(k+\Phi)}{n} = 1°.\,8',944654,$$

$n \sin \left(2k - \sin \frac{(k+\Phi)}{n}\right) = \sin \delta' = 0{,}0200538 \times 1{,}584$

$= 0{,}031765219$, donc $\delta' = 1°.49',21912$.

Or aiant ici $\Phi' = k' - \delta'$,

$$\begin{aligned} \& \; k' &= 4{,}16',021027, \\ -\delta' &= 1{,}49{,}21912, \\ \hline \text{j'ai } \Phi' \text{ angle à l'axe} &= 2°.26',801907. \end{aligned}$$

II. Pour les vaïons violets.

Posant, ici comme dans l'article XIV, $m = 1{,}56$; $n = 1{,}616$, on trouve

1°. *pour la lentille convexe:*

$$\frac{\sin c}{m} = \frac{0{,}1190476}{1{,}56} = 0{,}07631256,$$

$$\text{ang. } \frac{\sin c}{m} = 4°.22',59848,$$

$$\text{ang} \left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 9°.17',858584,$$

$$m \sin \left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 1{,}56 \times 0{,}1615632,$$

$$\text{donc } \sin \delta = 0{,}252038592,$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \delta &= 14°.35',89376, \\ -c &= 6.\ 50,\ 22853, \\ \hline \text{donc } \Phi = \delta - c &= 7°.45',66523. \end{aligned}$$

2°. *pour la lentille concave:*

on aura donc $k + \Phi = 12°.1',686257$,

$$\sin \frac{(k+\Phi)}{n} = \frac{0{,}20839144}{1{,}616} = 0{,}1289551,$$

$$\text{ang sin}\,\frac{(k+\Phi)}{n} = 7^{\circ}.24',55286,$$

$$\text{ang}\left(2k - \text{sin}\,\frac{(k+\Phi)}{n}\right) = 1^{\circ}.7',489194,$$

$$n\,\text{sin}\left(2k - \text{sin}\,\frac{(k+\Phi)}{n}\right) = 1{,}616 \times 0{,}01963055,$$

$$\text{ou}\quad \text{sin}\,\delta' = 0{,}0317229688,$$

$$\text{donc}\quad \delta' = 1^{\circ}.49',073852.$$

Or aiant ici $\Phi' = k' - \delta$,

$$\& \quad k' = 4^{\circ}.16,021027,$$
$$-\,\delta = 1.\ 49,073852,$$
$$\text{on a l'angle à l'axe} = 2^{\circ}.26',947175,$$
$$\text{celui des raïons rouges étoit}\ \Phi' = 2^{\circ}.26,80\ 907,$$
$$\text{angle d'aberration} = 0',145268.$$

Remarque 3.

En ſubſtituant les angles aux ſinus j'avois trouvé cet angle de l'aberration de réfrangibilité $= 0',0238$, plus de ſix fois moindre qu'il n'eſt en effet, ce qui eſt encore une ſuite de la grandeur des arcs de courbure. Si l'on compare les angles à l'axe des raïons hétérogenes, on trouvera que la différence entre celui des raïons rouges & celui des raïons moïens fait un angle de $0',12349$, au lieu que la différence entre l'angle des raïons moïens & celui des violets n'eſt que de $0',021779$, d'où il paroit que le foïer des raïons moïens n'eſt pas à une diſtance égale des deux couleurs extrêmes; & pour peu que la lunette fût longue, l'aberration de réfrangibilité ſeroit aſſez conſidérable pour donner des couleurs ſenſibles.

Remarque 4.

Puiſque, malgré l'énorme aberration de ſphéricité qui ſurpaſſe ici 25 fois celle de réfrangibilité, M. Dollond le pere a réuſſi à conſtruire

ſtruire d'excellentes lunettes avec un objectif à deux verres, d'une très grande ouverture, il en faut conclure, ou que les rapports des réfractions & des diſperſions que nous avons emploïés dans ce calcul ne ſont pas les vrais rapports pour le crownglaſs & pour le criſtal d'Angleterre, bien qu'on les adopte ordinairement; ou qu'on peut détruire cette aberration par l'inégalité des faces de l'une ou de l'autre lentille ou de toutes les deux.

Je ſuis bien convaincu, par les obſervations que j'ai rapportées dans mon Mémoire *ſur les Priſmes achromatiques*, que les rapports que j'emploie ici d'après de très grands Géometres, ne ſont pas exactement juſtes; mais je ne penſe pas non plus que la ſubſtitution des vrais rapports pût ſuffire à détruire une grande aberration; c'eſt ce que je me propoſe d'examiner à la ſuite de ce Mémoire; il eſt queſtion ici de chercher la proportion des faces la plus propre à corriger cette aberration.

XXXI *Recherche de la proportion des faces d'un objectif à deux verres la plus convenable pour détruire l'aberration de ſphéricité.*

Comme, dans un objectif à deux verres, c'eſt la lentille convexe qui a les plus grandes courbures, & qu'en rendant les faces inégales on augmenteroit encore cette diſproportion, il convient de chercher d'abord, ſi, en laiſſant la lentille de crownglaſs iſoſcele, on peut détruire l'aberration de ſphéricité par le rapport des faces du verre concave ſeul.

Or, puiſqu'il s'agit de diminuer l'angle ϕ', il faudra prendre le *minimum* de la formule

$$\phi' = k' - n \sin\left(k + k' - \sin\frac{(k+\phi)}{n}\right),$$

c'eſt à dire, que par l'article XXVII. cor. II. n. 3, il faudra poſer $k' = \epsilon$, ce qui donne

$\phi' =$

$$\Phi' = n \text{ ſin } \left(\frac{k + \Phi}{n} - k\right). \quad \text{(ibid. cor. III.)}$$

Mais, aiant le ſinus conſtant des demi-courbures du flintglaſs, ſin $k =$ 0,148809523 (art. XXX.) & n'y aiant ici qu'une ſeule face courbe,

j'ai $k = 8°.\,33',476538,$
j'ai (art. XXXII.) $\Phi = 7°.\,37,242182,$
donc $k + \Phi = 16°.\,10',71872.$

donc ſin $\frac{(k + \Phi)}{n} = \frac{0,2786332}{1,6} = 0,1741457,$

donc ang ſin $\frac{(k + \Phi)}{n} = 10°.\,1',\frac{2}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{0}\frac{1}{5} = 10°.\,1',73682,$

d'où ôtant l'angle $k = 8°.\,33,47654,$

reſte ang $\left(\text{ſin } \frac{(k + \Phi)}{n} - k\right) = 1°.\,28',26028;$

or n ſin $1°.\,28,26028 = 1,6 \times 0,0256711 = 0,0410737,$
donc $\Phi' =$ ang ſin $0,0410737 = 2°.\,21',\frac{7}{2}\frac{0}{9}\frac{0}{0}\frac{0}{7}.$

Mais l'angle de meſure eſt $A = 2°.\,23',157145.$ (VIII.)
Ici on auroit $\Phi' = 2.\,21,2408,$
angle d'aberration négative $A - \Phi = 1',9163.$

Remarque I.

Il eſt donc évident que, ſans rien changer aux faces de la lentille convexe qui reſtent égales, on n'a cependant pas beſoin d'emploïer le *minimum* pour détruire l'aberration de ſphéricité par la proportion des faces du flintglaſs; puiſque ce *minimum* donneroit une aberration négative, & projetteroit le foïer des raïons extremes au delà de la diſtance focale. Ainſi la face poſtérieure du flintglaſs ne doit pas être plane; elle doit être concave, mais moins concave que la face antérieure; & par là la courbure de celle-ci, que *le minimum* donnoit de 8°. 33', ſe rap-

rapprochera plus de l'égalité avec celles du crownglaſs, qui ſont de $6°.\ 50'$.

Remarque 2.

Comme, pour trouver la juſte valeur des arcs k, & k', il faudra recourir à une eſpece de tâtonnement, on peut aiſément ſe diſpenſer du calcul rigoureux des fractions, & ſe borner à l'évaluation des moitiés ou tiers de minutes. On peut d'ailleurs approcher tout d'un coup, à quelques minutes près, de la valeur de l'arc k', par une ſimple analogie qui n'eſt pas à la vérité de rigueur géométrique. La voici: lorſque j'ai eu $k' = 4°.\ 16'$, l'aberration réſultante étoit $= 3',768$; lorſque j'ai pris $k' = o$, il en a réſulté une aberration négative $= 1',9163$; donc une différence de 256 minutes ſur l'arc k', produit une différence d'aberration de $5',684$. De combien de minutes faut-il augmenter l'arc $k' = o$, pour produire une différence d'aberration de $1',9163$, c'eſt à dire, pour détruire l'aberration négative que donne le cas $k' = o$? L'analogie donne ici $k = o + \frac{256' \times 1,9163}{5,684} = 86',307$, ou $k' = 1°.\ 26'$.

Remarque 3.

En poſant donc $k' = 1°.\ 25'$, on trouve $k = 7°.\ 7',68$, & $\Phi' = 2°.\ 23',628$, d'où l'on voit que l'aberration redevient poſitive; l'angle d'aberration eſt ici $\Phi' - A = o',47$, & la différence des aberrations entre les cas $k' = o$, & $k' = 85'$, eſt $= 1',9163 + o',47 = 2',3863$; on a donc, par la même analogie, une nouvelle valeur approchée de k', ſavoir:

$$k' = 85' - \frac{85' \times 0,47}{2,3863} = 85' - 16',74 = 1°.\ 8',26.$$

Remarque 4.

Cette nouvelle valeur approchée de $k' = 1°.\ 8'$, eſt déjà ſi exacte, qu'on pourroit s'en contenter dans la pratique, puiſque l'Arti-

ſte aura peine à répondre de ſa préciſion à une ou deux minutes près ſur la courbure d'un arc de lentille. En effet, la différence d'une minute, ſur un arc k' de 1°. 8′,. ne ſuppoſe que la différence d'une $\frac{1}{8^{\text{ème}}}$, ſur la longueur du raïon du baſſin qui ſera $= \frac{x}{\text{ſin } k'}$. Cependant, comme ce raïon ſera au moins une fois plus long que le foïer de l'objectif, vu la petiteſſe de l'arc; la différence d'un $88^{\text{ème}}$, ſi la lunette eſt de 4 pieds, emporteroit plus d'un pouce; & je ne penſe pas qu'un habile ouvrier puiſſe ſe tromper d'autant ſur un baſſin de 8 pieds de raïon.

Remarque 5.

Quoi qu'il en ſoit, pour continuer l'approximation, en poſant $k' = 1°.\,8'$, on trouve $k = 7°.\,24',813$, & $\Phi' = 2°.\,23,19547'$; donc l'angle d'aberration $\Phi' - A = 0,03833$. Or, lorſque l'on avoit $k' = 1°.\,25'$, cet angle étoit $= 0,47'$. Ainſi, en diminuant l'arc k' de $17'$, on a diminué l'aberration de $0,432'$; donc, pour détruire le reſte d'aberration $= 0,03833$, il faut encore diminuer k' de $\frac{17' \times 0,03833}{0,432}$, c'eſt à dire de $1',508$, ce qui donne l'arc préciſ $k' = 1°.\,6',492$.

Remarque 6.

Puiſque le raïon des faces eſt égal à la demi-ouverture x, diviſée par le ſinus des arcs c, c', k & k', & qu'on a ici $c = c' = 6°.\,50',228$, $k = 7°.\,26',161$, & $k' = 1°.\,6',5$, on trouve les quatre raïons des faces comme ſuit:

$$r = +\,0,35\ F,$$
$$r' = -\,0,35\ F,$$
$$r'' = -\,0,322\ F,$$
$$r''' = +\,2,1488\ F,$$

& poſant $F = 100$, le devis d'un objectif à deux verres ſans aberration ſera, pour une ouverture de $\frac{100}{12}$ parties du foïer:

Crown-

Crownglaſs. raïons,		*Flintglaſs.* raïons,	
35;	35;	32,2;	214,9.

Remarque 7.

Comme le dernier raïon devient fort long, ſi le foïer eſt conſidérable, on pourroit le raccourcir en augmentant la courbure c du premier verre; c'eſt à dire, en poſant ſin $c = m$ ſin c', pour avoir le *minimum* de l'angle Φ, ſi l'on ne craint pas de rendre r trop petit: on aura alors $c = 8°.19'$, $c' = 5°.21'$, $\Phi = 7°.36',3318$, & aiant ainſi diminué Φ de $0',91$, l'angle δ' ſera augmenté, & par conſéquent Φ' diminué d'autant. L'angle d'aberration réduit par là à $2,8578'$, donnera par l'analogie

$$k' = 4°.16' - \frac{256' \times 2,8578}{5,684} = 2°.8',$$

d'où l'on conclura $k = 6°.24'$. Les quatre faces auront donc à très peu près les demi-arcs de courbure ſuivans:

$$\begin{aligned} c &= 8°.19', \\ c' &= 5°.21', \\ k &= 6°.24', \\ k' &= 2°.8', \end{aligned}$$

qui détermineront les raïons r, r', r'', r''', à fort peu près:

$$\begin{aligned} r &= +0,2879.\ F, \\ r' &= -0,4462.\ F, \\ r'' &= -0,3734\ F, \\ r''' &= +1,1193.\ F. \end{aligned}$$

Je ne crois pas néceſſaire de les déterminer avec plus de préciſion, puiſqu'on a plus d'avantage à emploïer des objectifs à trois verres, que de ceux à deux.

XXXII. *Calcul de l'aberration de ſphéricité d'un objectif à trois lentilles iſoſceles; en ſuppoſant encore*

$$m = 1,55; \quad n = 1,6; \quad dn = 1,6.$$

Puiſqu'il y a ici quatre faces convexes égales, pour les deux lentilles de crownglaſs, on a $\text{fin } c = \frac{0,2380952}{4} = 0,0595238$, (art. XV.) ce qui donne l'arc $c = 3°.24',7488$. On a donc

I. Pour le premier verre, convexe:

formule $\Phi = m \text{ fin } \left(2c - \frac{\text{fin } c}{m}\right) - c.$

$$\frac{\text{fin } c}{m} = 0,0384024,$$

donc $\text{ang } \frac{\text{fin } c}{m} = 2°.12',05022,$

donc $2c - \text{ang } \frac{\text{fin } c}{m} = 4°.37',4475,$

donc $m \text{ fin } \left(2c - \frac{\text{fin } c}{m}\right) = 0,0806186 \times 1,55 = 0,1249588,$

donc $\text{ang } m \text{ fin } \left(2c - \frac{\text{fin } c}{m}\right) = 7°.10',70236,$

d'où retranchant l'arc $c = 3°.24',74888,$

reſte l'angle à l'axe $\Phi = 3°.45',95348.$

Pour diminuer l'aberration, ſi l'on place le verre concave vers l'œil afin que l'épaiſſeur de la derniere face ſoit négative, on aura:

II. Pour le ſecond verre, convexe:

formule $\Phi' = m \text{ fin } \left(2c - \text{fin } \frac{(c - \Phi)}{m}\right) - c.$

L'angle $c - \Phi = -0°.21',2046.$

fin

$$\text{ſin } \frac{(c - \Phi)}{m} = \frac{0{,}0061681}{1{,}55} = 0{,}0039794,$$

$$\text{donc ang ſin } \frac{(c - \Phi)}{m} = - 13', 68032,$$

$$\text{donc } 2c - \text{ſin } \frac{(c - \Phi)}{m} = 7°. 3', 17809,$$

$$\text{donc } m \text{ ſin } \left(2c - \text{ſin } \frac{(c - \Phi)}{m}\right) = 1{,}55 \times 0{,}1227869,$$

$$\text{ou ſin } \delta' = 0{,}1903198,$$

$$\text{donc } \delta' = 10°. 58', 28686,$$

$$\text{ôtant } c = 3. 24, 74888,$$

$$\text{reſte } \Phi' = \delta' - c = 7°. 33', 53798.$$

III. Pour le troiſieme verre bi-concave iſoſcele de Flintglaſs.

La formule eſt ici:

$$\Phi'' = k' - n \text{ ſin } \left(2k - \text{ſin } \frac{(k + \Phi')}{n}\right).$$

Or on a, comme dans l'objectif à deux verres, $k = 4°. 16', 021027,$

$$\Phi' = 7. 33, 53798,$$

$$\text{donc } k + \Phi' = 11°. 49', 559007,$$

$$\text{donc ſin } \frac{(k + \Phi')}{n} = \frac{0{,}2049344}{1{,}6} = 0{,}1280839,$$

$$\text{donc ang ſin } \frac{(k + \Phi')}{n} = 7°. 21', 5329,$$

$$\text{donc } 2k - \text{ſin } \frac{(k - \Phi')}{n} = 1°. 10', 50915,$$

donc $n \sin \left(2k - \sin \left(k + \frac{\Phi'}{n}\right)\right) = 1{,}6 \times 0{,}0205089$,

ou $\sin \delta'' = 0{,}0328142$,

donc $\delta'' = 1°.\,52',8273$,

donc $\Phi'' = k' - \delta = 2°.\,23',1937$,

d'où ôtant l'angle $A = 2.\,23,1571$,

reſte l'angle d'aberration $= 0',0366$.

Remarque 1.

Cet angle d'aberration eſt ici plus petit que je ne l'ai trouvé (art. XV.) en ſubſtituant les arcs au ſinus, où il étoit $= 0{,}0649$. Il ſemble néanmoins que le calcul des arcs devroit toujours donner l'aberration de ſphéricité plus petite qu'elle n'eſt réellement. La raiſon de cette exception eſt qu'ici la lentille concave a les plus grands arcs, & que les arcs concaves rendent l'aberration négative; ce qui devient plus ſenſible lorſqu'on emploie les ſinus dans le calcul, que lorſqu'on y ſubſtitue les arcs.

Remarque 2.

Comme l'arc k' eſt de $4°.\,16'$, la flêche de la derniere courbure, ou la concavité du dernier verre eſt aſſez conſidérable pour ne la pas négliger, & puiſqu'elle eſt négative elle diminue l'aberration trouvée. Mais, comme il eſt plus aiſé de réduire l'angle d'aberration en parties de l'axe, que de changer la flêche en parties d'arc, il faut pour connoitre la véritable aberration chercher le foïer des raïons extremes; ce foïer eſt (*art.* XXIV.) $= x$ cotang $\Phi'' + x$ tang $\frac{1}{2}k$,

ou $Lf + LM = \frac{100 \times \text{tang } 87°.\,36',8063}{24} + \frac{100 \times \text{tang } 2°.\,8'}{24}$;

or la tangente de $87°.\,36',8063$, eſt $= 23{,}859277 + (0{,}167043 \times 0{,}8063) = 23{,}993958$; on a donc $Lf = x$ cot $\Phi'' = \frac{2399{,}3958}{24} = 99{,}9748$; ainſi l'aberration poſitive ſeroit $fF = 0$,

0252. Mais la flêche du dernier arc LM $=$ x tang $\frac{1}{2}k$, eſt ici $=$ $\frac{100 \times 0{,}0372509}{24} = 0{,}15521$; on a donc LM $+$ Lf $=$ 100,13, & la diſtance focale étant toujours MF $=$ 100, l'aberration devient ici négative $=$ 0,13, centiemes de foïer, ou $=$ 0,0013.

Remarque 3.

Pour une lunette de 50 pouces, l'aberration de ſphéricité ſeroit $=$ 0,065″; elle ſeroit donc au moins huit fois trop grande, & par conſéquent il faudroit prendre l'ouverture trois fois plus petite, ou $\omega = \frac{F}{36}$, ſi l'on veut laiſſer les trois lentilles iſoſceles.

Remarque 4.

Comme l'aberration réſulte ici principalement de la grandeur de la flêche LM, il ſemble qu'en partageant la lentille concave en deux autres auſſi iſoſceles, on auroit un objectif à 4 verres ſans aberration ſenſible; la flêche du dernier arc ſeroit alors LM $=$ x tang 1°. 4′ $=$ 0,0776. Voïez cependant la Remarque 1.

Remarque 5.

Comme la tranſpoſition des verres n'altere point la diſtance focale, & ne ſauroit altérer qu'extrêmement peu l'angle ϕ'', ou le foïer des raïons extremes, il en réſulte que, ſi l'on plaçoit le flintglaſs entre les deux lentilles de crownglaſs, on auroit encore, comme nous l'avons trouvé ici, Lf $=$ 99,974 à très peu près. Mais alors la flêche de la derniere courbure ſeroit LM $=$ x tang $\frac{1}{2}c$ $=$ x tang 1°. 42′ $=$ 0,124; & comme la derniere face ſeroit convexe, le foïer ſeroit Lf $-$ LM $=$ Mf $=$ 99,85, & par conſéquent l'aberration de ſphéricité poſitive $=$ MF $-$ Mf $=$ 0,15 $=$ 0,0015 F. On augmenteroit donc l'aberration de 0,02, en plaçant le flintglaſs au milieu; il ſera par conſéquent plus avantageux de le laiſſer en dernier lieu, & de chercher la proportion de ſes faces propre à détruire l'aberration.

Re-

Remarque 6.

Puiſque, dans cette poſition, il faut ou augmenter l'angle Φ'', afin que l'aberration poſitive compenſe la flêche, ou diminuer la flêche, afin de diminuer l'aberration négative, il s'agit d'examiner lequel de ces deux expédiens eſt le plus convenable. On a ici $\Phi'' = k' - \delta$; or, en diminuant l'arc k', je diminue à la vérité un peu la longueur de la flêche qui eſt $= x$ tang $\frac{1}{2}k'$; mais je diminue l'angle Φ'', de toute la diminution de k', & cette diminution ſur l'angle Φ'' doit opérer un allongement du foïer Mf, qui augmenteroit beaucoup plus l'aberration négative que le raccourciſſement de LM ne la diminueroit. Au contraire, en augmentant un peu l'arc k', j'augmente preſque d'autant l'angle Φ'', & par conſéquent l'aberration poſitive, qui balancera bien vite l'aberration négative LM, malgré l'allongement que l'augmentation de l'arc k' produit dans ſa flêche.

Remarque 7.

Mais comme, dans une combinaiſon de trois verres, celui de flintglaſs a déjà les plus grandes courbures, dans l'état iſoſcele, il vaudra mieux conſerver l'égalité des faces à la lentille de flintglaſs, & chercher à détruire l'aberration par l'inégalité des faces de l'une des deux lentilles de crownglaſs. Si l'on y parvient ſans donner à l'une de ces faces un arc plus grand que 4°.16′, qui eſt l'arc de chaque face du flintglaſs, on pourra laiſſer l'autre lentille de crownglaſs iſoſcele; ſinon, pour éviter les grandes courbures, il faudra répartir l'altération ſur les deux lentilles convexes.

Remarque 8.

Puiſqu'il s'agit donc d'augmenter l'angle à l'axe $\Phi'' = k' - \delta''$ ſans changer la valeur de k', il faut diminuer d'autant l'angle de derniere réfraction δ''. Or cet angle augmente ou diminue ſenſiblement d'autant que l'angle d'incidence α'' eſt diminué ou augmenté; plus α eſt petit, plus δ eſt grand, toutes choſes d'ailleurs égales; & réciproquement.

Pour

Pour détruire ici l'aberration, nous devons avoir $Lf + LM = MF = 100$; or, en laiſſant $k = k'$, on a $LM = 0,1552$; il faut donc avoir $Lf = 99,8448 = x \cot \Phi''$, donc $\cot \Phi'' = 24 \times 0,998448 = 23,962752$; donc le complément de $\Phi'' = 87°.36,\frac{1}{1}\frac{0}{6}\frac{3}{7}\frac{4}{0}\frac{7}{4}\frac{5}{3}$; donc $\Phi'' = 2°.23',38055$. Or les trois verres iſoſceles avoient donné $\Phi'' = 2°.23',1937$; il faut donc, pour détruire l'aberration, augmenter l'angle Φ'' de $0',1868$.

XXXIII. *Recherche de la proportion des faces c'', c''', de la ſeconde lentille de crownglaſs, propre à détruire l'aberration de ſphéricité dans un objectif à 3 lentilles, dont les deux autres ſeſteroient iſoſceles.*

Nous venons de trouver que, pour détruire l'aberration, il faudroit augmenter Φ'' de $0',1868$; il faudroit donc diminuer d'autant l'angle de derniere réfraction δ'', & par conſéquent augmenter à peu près d'autant l'angle d'incidence α'' ſur la troiſieme lentille; or cet angle d'incidence α'' eſt $= k + \Phi'$; & puiſque le verre concave doit reſter iſoſcele, c'eſt Φ' qui doit ſeul augmenter de $0',1868$. Mais j'ai $\Phi' = m \sin\left(c'' + c''' - \sin\frac{(c'' + \Phi)}{m}\right) - c'''$. Lorſque nous avons pris la ſeconde lentille iſoſcele, en poſant $c'' = c''' = c$, nous avons trouvé $\Phi' = 7°.33',53798$ (XXXII.), & nous voulons qu'il devienne $= 7°.33',72478$. Si l'augmentation étoit plus conſidérable, il faudroit prendre le *maximum* de Φ', qui eſt (XXVII. Cor. I.) lorſqu'on prend $c'' = 0$. Mais, puiſque l'augmentation eſt ſi petite, il ſuffira de prendre c'' un peu plus petit que c'''.

Dans les faces iſoſceles on avoit $c'' = c''' = 3°.24',7488$, & $2 \sin c'' = 0,1190476$; ſuppoſons $c'' = 3°.8'$, on aura $\sin c''' = 0,0643879$, (puiſque la ſomme des ſinus $c'' + c'''$ doit reſter conſtante,) donc $c''' = 3°.41',50258$: or Φ n'aiant pas varié, puiſque la premiere lentille reſte iſoſcele, j'ai $c'' - \Phi = -37',9534$;

$$\text{donc ang fin } \frac{(c'' - \Phi)}{m} = -24',4861;$$

$$\text{donc } c'' + c''' - \text{fin } \frac{(c'' - \Phi)}{m} = 7°.13',9886;$$

$$\text{donc } m \text{ fin } \left(c'' + c''' - \text{fin } \frac{(c'' - \Phi)}{m}\right) = 1,55 \times 0,1259071,$$

$$\text{ou fin. } \delta' = 0,1951560;$$

donc - - - -	δ'	$= 11°.15',23004,$
d'où ôtant c'''		$= 3.\ 41,\ 50258,$
reſte $\Phi' = \delta' - c'''$		$= 7°.33',72746.$
Or la lentille iſoſcele donnoit Φ'		$= 7°.33,\ 53798,$
on a donc l'augmentation de Φ', ou α		$= 0°.\ 0',18948,$

à peu près telle qu'on la cherchoit.

Remarque 1.

Une ſimple analogie ſuffiroit pour donner préſentement l'arc c'', avec toute la préciſion requiſe : en le diminuant de $16',7488$, on a augmenté Φ' de $0',18948$; donc, pour n'augmenter Φ' que de $0',1868$, il n'eût fallu diminuer c'' que de $16',511$. Mais, quoique c'eſt peut-être là toute la préciſion que la pratique comporte ; comme il n'eſt cependant pas rigoureuſement vrai que l'angle δ de réfraction diminue autant que l'angle d'incidence α augmente, il ne ſera pas inutile de calculer immédiatement l'angle Φ'' ſur cette nouvelle valeur de Φ', en poſant la derniere lentille concave iſoſcele.

La formule donne :

$$\Phi'' = k - n \text{ fin } \left(2k - \text{fin } \frac{(k + \Phi')}{n}\right);$$

or k n'aiant point changé eſt $=$ 4°. 16′, 02102,
nous venons de trouver Φ' $=$ 7. 33, 72746,
donc $k + \Phi'$ $=$ 11°. 49′, 74848;

donc $\text{ſin}\ \frac{(k+\Phi')}{n} = \frac{0,2049939}{1,6} = 0,1281212$;

donc $\text{ang ſin}\ \frac{(k+\Phi')}{n} = 7°.\ 21',66227$;

donc $2k - \text{ſin}\ \frac{(k+\Phi')}{n} = 1°.\ 10',37978$;

donc $n\ \text{ſin}\left(2k - \text{ſin}\ \frac{(k+\Phi')}{n}\right) = 1,6 . 0,0204712$,

ou $\text{ſin}\ \delta'' = 0,0327539$;

donc δ'' - - $= 1°.\ 52',61988$;

donc $\Phi'' = k - \delta'' = 2°.\ 23',40114$.

Remarque 2.

Nous avons vû (XXXII. Rem. 8.) que, pour détruire l'aberration, il faudroit avoir $\Phi'' = 2°.\ 23',38055$. Mais, en poſant dans la ſeconde lentille convexe la premiere face $c'' = 3°.\ 8'$, nous venons d'avoir $\Phi'' = 2°.\ 23,40114$; il eſt donc trop grand de $0',02059'$: or, ſi une diminution de $16',7488$ ſur l'arc c'' iſoſcele a augmenté Φ'' de $0',2074$, il faudra, pour n'augmenter Φ'' que de $0',2074 - 0',02059 = 0',1868$, prendre l'arc $c'' = c - \frac{16',7488 \times 0,1868}{0,2074} = c - 15',0852$; ce qui donne l'arc $c'' = 3°.\ 9',6636$; ſin $c'' = 0,0551429$; donc ſin c''' $(= 0,1190476 - \text{ſin}\ c'') = 0,0639047$, & par conſéquent $c''' = 3°.\ 39',\frac{2}{2}\frac{4}{9}\frac{2}{0}\frac{3}{5}$, ou $c''' = 3°.\ 39',8381$.

REMARQUE 3.

Toutes les faces étant ainſi déterminées, il eſt aiſé d'en inférer les raïons de courbure par l'équation $r = \frac{x}{\sin c}$; on aura donc pour un objectif à trois lentilles ſans aberration, avec les raïons les plus égaux qu'il ſoit poſſible, la conſtruction ſuivante; en poſant l'ouverture = 8, 333.

Crownglaſs. raïons	*Crownglaſs.* raïons	*Flintglaſs.* raïons
70; 70;	75,5346; 65,221;	56; 56;

ou en général, pour une diſtance focale quelconque F, & une ouverture $\frac{F}{12}$, on aura:

$$r = + 0,7.\ F,$$
$$r' = - 0,7.\ F,$$
$$r'' = + 0,7553.\ F,$$
$$r''' = - 0,65221.\ F,$$
$$r^{IV} = - 0,56.\ F,$$
$$r^{V} = + 0,56.\ F.$$

REMARQUE 4.

Il eſt évident qu'il ne ſauroit y avoir de conſtruction plus aiſée dans la pratique, ni plus avantageuſe, que celle que je viens de déterminer, ſoit pour l'égalité des raïons des faces, ſoit pour diminuer les courbures; & il eſt clair qu'en plaçant le flintglaſs entre les deux lentilles convexes, on augmenteroit l'aberration de ſphéricité du double de la flêche de la derniere face; ce qu'on ne ſauroit détruire qu'en donnant de plus grandes courbures à quelques ſurfaces, & en rendant les raïons des baſſins plus inégaux.

Cependant, comme toutes les lunettes de Mrs. Dollond à trois verres, ont le flintglaſs au milieu, & que cette diſpoſition diminue l'épaiſ-

paiſſeur de l'objectif à ſa circonférence, ce qui peut n'être pas indifférent dans de grandes ouvertures, je vais appliquer ma méthode à la recherche des courbures les plus avantageuſes, dans un objectif à trois verres, lorſque le verre concave eſt placé entre les deux lentilles convexes.

XXXIV. *Recherche de la proportion des faces, la plus avantageuſe pour détruire l'aberration de ſphéricité dans un objectif à 3 lentilles dont le verre concave eſt placé entre les deux convexes.*

Si les trois verres étoient iſoſceles, on auroit à très peu près, comme je l'ai obſervé (XXXII. Rem. 5.) $\Phi'' = 2°.23,1937$; à cet angle ſe joindroit encore celui qui réſulte de la flêche de la derniere face. Or cet angle eſt à l'angle au foïer A à très peu près, comme la flêche eſt à la diſtance focale. On auroit donc (fig. 3.) $100 : 0,124 = 143',157 : fBG = 0',1775$. Ainſi l'angle total ſeroit $\Phi'' + fBG = 2°.23,3712$, d'où ôtant l'angle de meſure $A = 2°,23,1572$, il reſte un angle d'aberration de $0',214$. Fig. 3.

Pour détruire cette aberration, il s'agit donc de faire en ſorte que le dernier angle à l'axe Φ'' devienne $\Phi'' = A - fBG = 2°.22',9797$; & pour éviter les trop grandes courbures, il faut laiſſer s'il ſe peut le flintglaſs iſoſcele, & obtenir la diminution de ces $0',214$, en donnant aux lentilles convexes la proportion des faces qu'exige le *minimum*.

Mais il eſt aiſé de prévoir une difficulté, c'eſt que le *minimum* ne s'écartant gueres de l'égalité des faces, il ne pourra pas produire toute la diminution requiſe ſur l'angle Φ'', qui réſulte des verres iſoſceles; en ce cas il faudra altérer encore les faces du verre concave, pour achever de détruire l'aberration.

L'opération la plus ſimple c'eſt de chercher le *minimum* de l'angle Φ, pour la premiere lentille; ſi cet angle eſt plus petit de $0',214$, que dans la lentille iſoſcele, (XXXII.) tout eſt fait; & les deux

autres verres peuvent reſter iſoſceles, puiſqu'alors on peut compter que Φ' ſera augmenté de la même quantité, & que Φ'' ſera diminué d'autant à très peu près, par la remarque 8. de l'art. XXXII.

I. Calcul du minimum *de l'angle* Φ *pour la premiere lentille.*

La formule du *minimum* eſt ici:

$$\Phi = m \text{ ſin } c - c' \text{ (XXVII. Cor. 3.)},$$

& la condition eſt ſin $c = m$ ſin c'; or, la ſomme des ſinus étant conſtante, j'ai ſin c + ſin c' = 0, 1190476,

donc 2,55. ſin c' = 0,1190476,
ce qui donne ſin c' = 0,0466853; c' = 2°. 40′, $\frac{1600}{2506}$,
& ſin c = 0,0723623; c = 4°. 8′, $\frac{2540}{2601}$,

donc m ſin c = 0,1121615,

donc ang m ſin c = 6°. 26′,39584,
d'où ôtant c' = 2. 40, 55072,
j'ai donc Φ = 3°. 45′,84512.

Remarque 1.

En comparant cet angle Φ, à celui que la lentille iſoſcele a donné (XXXII), on trouvera que le *minimum* l'a diminué de 0′, 108; ce qui n'eſt que la moitié de la diminution néceſſaire pour détruire l'aberration. Il ſemble donc qu'en prenant encore le *minimum* de la derniere lentille convexe, on achevera de détruire l'autre moitié de cette aberration ſans toucher au verre concave. Mais cela n'eſt vrai qu'autant que le *minimum* de la derniere lentille mettra la même inégalité entre les faces c'' & c''' que nous venons de trouver entre les faces c & c'. Or c'eſt ce qui ne ſauroit arriver ici, puiſque le cas du *minimum* ſuppoſe l'équation: ſin $(c'' + \Phi') = m$ ſin c'''; ce qui diminue la diſproportion des faces de preſque toute la valeur de l'angle Φ', & les ramenera fort près de l'état iſoſcele; auquel cas, en ne touchant point au verre concave, on n'aura obtenu qu'une diminution de 0′, 108, au lieu de celle de 0′,214 qui eſt requiſe. Il faut donc ſe réſoudre d'altérer

térer l'égalité des faces concaves, pour augmenter l'angle négatif Φ'. Mais il ne ſera pas beſoin de recourir au *maximum* de Φ', parce que l'état iſoſcele s'éloignant déjà du *minimum*, pour peu qu'on augmente la face antérieure k, on s'en éloigne toujours plus, ce qui fait croître plus ſenſiblement l'angle Φ', qu'il ne décroîtroit par l'opération contraire.

II. Calcul de l'angle Φ' pour le verre concave.

Dans l'état iſoſcele on avoit $k = k' = 4°.\,16',021027$. Suppoſons, pour augmenter Φ', que la courbure de la premiere face ſoit augmentée de $32'$, en ſorte que l'on ait $k = 4°.\,48'$; puiſqu'on a le ſinus conſtant des faces concaves $\text{ſin } k + \text{ſin } k' = 0,1488095$;

ſi l'on ſouſtrait $\text{ſin } k\ (4°.\,48) = 0,0836778$,

on aura $\text{ſin } k' = 0,0651317$,

& par conſéquent $k' = 3°.\,44',06478$;

or $k + \Phi = 8°.\,33',84512$,

donc $\text{ſin } \frac{(k+\Phi)}{n} = \frac{0,1489155}{1,6} = 0,0930772$,

donc $\beta' = 5°.\,20',42236$,

donc $k + k' - \beta' = \gamma' = 3°,11',6424$,

donc $n \text{ ſin } \gamma' = 1,6 \times 0,0557176$,

ou $\text{ſin } \delta' = 0,08914824$,

donc δ' - - $= 5°.\ 6',87642$,

d'où retranchant k' $= 3.\,44,06478$,

reſte l'angle Φ' $= 1°.\,22',81164$.

Remarque 2.

On ſera peut-être ſurpris que, voulant augmenter l'angle Φ' négatif, dont le *maximum* eſt lorſqu'on poſe $k = 0$ (XXVII. Cor. 2. n. 2.), j'augmente k au lieu de le diminuer. Mais c'eſt afin de n'augmen-

menter les courbures que le moins qu'il eſt poſſible. Le *minimum* de l'angle Φ' négatif, ou de la formule $\Phi' = \delta - k'$, eſt lorſqu'on poſe ſin $(k + \Phi) = n$ ſin k', ou lorsſqu'on a à peu près $k + \Phi = 1{,}6\ k'$; or aiant trouvé ici $\Phi = 3°.46$, & la ſomme des angles $k + k'$ étant $8°.32$, on a $k + k' = 2{,}6\,k' - \Phi$, ou $8°.32' = 2{,}6\,k' - 3°.46'$, donc $k' = \frac{12°.18'}{2{,}6} = 4°.43'$, donc $k = 3°.49'$. Mais, par la nature du *minimum*, ſoit que je prenne k plus grand ou plus petit que $3°.49'$, je ſuis ſûr d'augmenter l'angle Φ'; & puiſque je n'ai pas beſoin d'en prendre le *maximum*, je ſuis libre de choiſir le chemin le plus court. Or, partant du cas iſoſcele qui donne $k = 4°.16'$, je m'ecarte bien moins de l'égalité des faces en augmentant k, de $32'$, que ſi en le diminuant je paſſois par le *minimum* pour deſcendre juſqu'à $k = 59'$, qui me donneroit approchant la même valeur de Φ', que me donne $k = 4°.48'$.

Remarque 3.

Comme il faut connoitre d'avance ſi l'angle Φ' qu'on cherche ſera poſitif, ou négatif, afin de ſavoir s'il faut augmenter ou diminuer la courbure antérieure du verre concave, il y a un moïen très aiſé d'y parvenir; car on a ici, à moins d'une minute près,

$\Phi - \Phi'' = \Phi'$; & comme Φ & Φ'' ſont donnés;

on a $3°.46' - 2°.23' = \Phi' = 1°.23'$, ce qui étant plus petit que $k' = 4°.16'$, indique la formule $\Phi' = k' - \delta$, ou l'angle d'émerſion divergent de l'axe. Dans tous les cas, quel que ſoit l'arrangement des verres, il eſt toujours facile de connoitre d'avance, à très peu près, la valeur d'un angle Φ quelconque; en ſubſtituant les arcs aux ſinus. (art. IX. ſeq.)

III. Calcul de l'angle Φ'', au ſortir de la troiſieme lentille convexe, en prenant le minimum *de cet angle.*

La formule du *minimum* eſt ici:

ſin $(c'' + \Phi') = m$ ſin c''',

ce qui donne à très peu près

$$\text{fin } \epsilon'' = m \text{ fin } \epsilon''' - \text{fin } \Phi',$$

donc fin ϵ'' + fin ϵ''' = 0,1190476 = $(m+1)$ fin ϵ''' − fin Φ',

donc fin $\epsilon''' = \frac{0,1430953}{2,55} = 0,0561158$,

d'où l'on conclud fin $\epsilon'' = 0,0629318$,

donc l'arc $\epsilon''' = 3°.13',013425$,

& l'arc $\epsilon'' = 3°.36,486738$,

or j'ai $\Phi' = 1.22,81164$,

donc $\alpha'' = c + \Phi' = 4°.59,298378$,

donc fin $\beta'' = \frac{0,0869524}{1,55} = 0,0560983$,

donc $\beta'' = 3°.12',95317$,

donc $\gamma'' = \epsilon'' + \epsilon''' - \beta = 3°.36',54699$,

donc m fin $\gamma'' = 0,06294929 \times 1,55$,

ou fin $\delta'' = 0,0975714$,

donc $\delta'' = 5°.35',960276$,

d'où ôtant $\epsilon''' = 3°.13,013425$,

reste l'angle cherché $\Phi'' = 2°.22',946851$.

Remarque 4.

Nous avons trouvé au commencement de cet article que, pour détruire totalement l'aberration, il falloit avoir $\Phi'' = 2°.22',9797$. Après avoir pris le *minimum* des deux angles Φ & Φ'', & posé $k = 4°.48'$, nous trouvons $\Phi'' = 2°.22,94685$; ainsi il y auroit un angle d'aberration au delà de la distance focale de $0',03285$; il faut donc diminuer Φ' dans le verre concave de cette quantité, sans rien toucher à la derniere lentille, dont le *minimum* ne varie point par cette légere altération de Φ'. Pour trouver tout d'un coup, & sans beaucoup

coup de tâtonnement la valeur de k, qui donnera $\Phi'' = 2°.22',9797$, il faut recourir à l'analogie; ſuppoſant donc que les trois verres iſoſceles auroient donné, lorſque le flintglaſs eſt placé au milieu. $\Phi'' = 2°.23',1937$, on auroit eu $k = k' = 4°.16,021$. Mais nous avons ici $k = 4°.48'$, & $\Phi'' = 2°.22,9468$. Ainſi une diminution de $0',2469$ ſur Φ'', demandoit une augmentation de $32'$ ſur k; donc la diminution requiſe de $0',214$ ſur Φ'' n'exigeoit qu'une augmentation de $\frac{32' \times 214}{247}$ ſur k, c'eſt à dire d'environ 27 minutes, ce qui indique $k = 4°.43'$, ou un peu moins, parce que l'analogie n'eſt pas rigoureuſement exacte.

En poſant donc $k = 4°.42'$, on aura $k' = 3°.50,0572$, & l'on trouve

$$\begin{aligned} \alpha' &= k + \Phi &&= 8°.27',845, \\ \beta' &\quad - \quad - &&= 5°.16,697, \\ \gamma' &\quad - \quad - &&= 3°.15,359, \\ \delta' &\quad - \quad - &&= 5°.12,838, \\ \Phi' &= \delta' - k' &&= 1°.22,7809. \end{aligned}$$

Or $k = 4°.48'$ donnoit $\Phi' = 1°.22',8116$,

& pour détruire l'aberration, il faut avoir $\Phi' = 1°.22,7788$, qui ne differe de l'angle trouvé que de $0',0021$; donc, ſi en diminuant k de $6'$, on a diminué Φ' de $0',0307$, pour le diminuer encore de $0',0021$, il faudra encore diminuer k de $\frac{6' \times 21}{307} = \frac{2'}{3}$; ce qui donne enfin $k = 4°.41',6$, & $k' = 3°.50',457$.

XXXV. Toutes les faces étant ainſi déterminées de maniere à donner les plus petites courbures poſſibles, on a:

$$\begin{aligned} c &= 4°.\ 8',981; \text{ ſin } c = 0,0723623, \\ c' &= 2°.40',5507; \text{ ſin } c' = 0,0466853, \end{aligned}$$

$k =$

$k = 4^{g}.41',6$; $\sin k = 0,0818225$,
$k' = 3^{\circ}.50',457$; $\sin k' = 0,0669870$,
$c'' = 3^{\circ}.36',4867$; $\sin c'' = 0,0629318$,
$c''' = 3^{\circ}.13',0134$; $\sin c''' = 0,0561158$,

ce qui donne la conſtruction ſuivante, pour un foïer $F = 100$.

Ordre des verres.	I. Lentille convexe de crownglaſs.	II. Lentille concave de flintglaſs.	III. Lentille conv. de crownglaſs.
Raïons des faces.	57,58; +89,25.	50,923; 62,201.	66.209; 74,264.

Ou en général pour une diſtance focale $= F$,

$r = +\ 0,575806.\ F$,
$r' = -\ 0,892500.\ F$,
$r'' = -\ 0,509232.\ F$,
$r''' = +\ 0,622012.\ F$,
$r^{IV} = +\ 0,662092.\ F$,
$r^{V} = -\ 0,742644.\ F$.

REMARQUE.

Pour rendre le raïon r' plus petit & mettre un peu plus d'égalité entre les courbures, il n'y auroit eu qu'à ne pas prendre *le minimum* de la premiere lentille, & choiſir pour c' une courbure moins éloignée de $3^{\circ}.24'$, en laiſſant c'' & c''' tels qu'ils ſont. Mais il auroit fallu augmenter k, & diminuer k'; or k étant déjà néceſſairement la plus grande courbure lorſque Φ & Φ'' ſont à leur *minimum;* il ne convenoit pas de l'augmenter, ou de rendre r'' encore plus petit qu'il n'eſt ici.

XXXVI. En comparant ces déterminations avec celles qu'un illuſtre Géometre a données dans les *Mémoires de l'Académie de Paris* pour 1764, pag. 144, on les trouvera bien différentes, quoique calculées ſur les mêmes rapports que j'adopte ici pour la réfraction & la diſperſion des verres. Mais j'ai lieu de croire qu'il s'eſt gliſſé dans celles-là quelque erreur de calcul, ou d'impreſſion; car en calculant ſur

les dimenſions indiquées l'angle Φ'', je l'ai trouvé de 2°. 44, 51, ce qui ſuppoſeroit une aberration de ſphéricité de plus de 21 minutes, comme on peut s'en convaincre par un calcul très aiſé. Les raïons des faces ſont:

$$r = + 0,5986.\ R,$$
$$\rho = - 0,3255.\ R,$$
$$r' = + 0,9135.\ R,$$
$$\rho' = - 1,2058.\ R;$$

ſurquoi il faut obſerver que la diſtance focale n'eſt pas R, mais $\frac{R}{1 + \frac{1}{60}}$, en ſorte qu'ici on a $R = \frac{60}{61} F$. En ſubſtituant donc cette valeur de R, on aura:

$$r = + 0,60857.\ F,$$
$$\rho = - 0,33092.\ F,$$
$$r' = + 0,92872.\ F,$$
$$\rho' = - 1,22589.\ F;$$

donc aiant ſin $c = \frac{x}{r} = \frac{F}{24.r}$,

on a ſin $c = 0,0684657$; $c = 3°.\ 55',552$,
ſin $c' =$ ſin $k = 0,1259096$; $c' = k = 7°.\ 13',997$.
ſin $k' =$ ſin $c'' = 0,0448642$; $k' = c'' = 2°.\ 34',28389$,
ſin c''' $= 0,0339887$; $c''' = 1°.\ 56',8672$.

Or, comme en prenant les arcs pour leurs ſinus, on ne ſe trompe pas d'une minute ſur l'angle d'aberration, il n'y a qu'à poſer

$$\Phi'' (m - 1)(c + c' + c'' + c''') - (n - 1)(k + k'),$$

c'eſt à dire: $\Phi'' = 0,55\ (940',68) - 0,6\ (588',27)$,

on trouvera $\Phi'' = 164',412$,
d'où ôtant l'angle de meſure $A = 143,157$,
reſteroit l'angle d'aberration $= 21',255$.

Il eſt tout clair, qu'il s'eſt gliſſé ici par mépriſe quelque erreur dans l'application des formules générales au calcul numérique. En effet la diſtance focale devroit donner:

$$F = 100 = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''') - (n-1)(\sin k + \sin k')}$$

$$= \frac{100}{24[(0,55 \times 0,273228) - (0,6 \times 0,1707739)]},$$

ce qui ſuppoſeroit $1',147468 = 1$, & par conſéquent $\frac{R}{1 + \frac{1}{66}}$ ne ſeroit pas la diſtance focale, mais la $\frac{1}{166}\frac{1}{6}\frac{7}{6}\frac{4}{6}\frac{6}{6}\frac{8}{6}$ partie de cette diſtance, ou $R = 1,166592466.\ F.$ Ainſi les dimenſions des raïons doivent être:

$$r = + 0,69833.\ F,$$
$$\varrho = - 0,37972.\ F,$$
$$r' = + 1,06568.\ F,$$
$$\varrho' = - 1,40667.\ F,$$

ce qui donneroit

$$\sin c = 0,0596670; \quad c = 3°.25',242,$$
$$\sin c' = \sin k = 0,1097280; \quad c' = k = 6°.17,980,$$
$$\sin k' = \sin c'' = 0,0390987; \quad k' = c'' = 2°.14',446,$$
$$\sin c''' = 0,0296207; \quad c''' = 1°.41,844;$$

d'où l'on tire, en ſubſtituant les arcs aux ſinus:

$$\mathfrak{C}'' = 0,55\ (819,512') - 0,6\ (512,416) = 143,276.$$

Ici l'angle d'aberration devient incomparablement plus petit qu'auparavant, ſavoir $\mathfrak{C}'' - A = 0.119'$. Cependant la confuſion ſur une lunette de 3 à 4 pieds ſeroit encore environ dix fois trop ſenſible, ſi l'on donnoit à l'objectif une ouverture égale à la $\frac{1}{12}$ partie du foïer.

En répétant le calcul ſur les ſinus eux-mêmes, je trouve

$\sin c = \sin a = 0{,}0596670$; $a = c = 3°.25',242$,
$\sin \beta = 0{,}0384948$; $\beta = 2°.1:',369$,
$\sin \gamma = 0{,}1307720$; $\gamma = 7°.30',8529$,
$\sin \delta = 0{,}2026861$; $\delta = a' = 11°.41',6856$,
$\sin \beta' = 0{,}1266850$; $\beta' = 7°.16',6863$,
$\sin \gamma' = 0{,}0220300$; $\gamma' = 1°.15',7396$,
$\sin \delta' = 0{,}0352480$; $\delta' = a'' = 2°.1',19883$,
$\sin \beta'' = 0{,}0227406$; $\beta'' = 1°.18',18328$,
$\sin \gamma'' = 0{,}0459752$; $\gamma'' = 2°.38',1067$,
$\sin \delta'' = 0{,}0712615$; $\delta'' = 4°.5',18689$.

$\varphi'' = \delta'' - c''' = 2°.23',34289$,
$- A = 2°.23'.15714$,
angle d'aberration $\varphi'' - A = 0°.0',18575$.

XXXVII. J'avois choiſi l'objectif que je viens d'examiner, par ce qu'étant calculé ſur les mêmes rapports de réfractions & de diſperſions que j'emploie ici, il étoit poſſible de comparer les dimenſions des raïons. Mais, comme l'illuſtre Géometre qui le propoſe en a ſimplement conclû les dimenſions d'après celles d'un autre objectif qu'il avoit calculées en ſuppoſant la diſperſion des verres $dn = \frac{3}{4}$, j'ai cru devoir chercher auſſi quelle ſeroit l'aberration de ce dernier objectif, pour une ouverture de $\frac{F}{12}$.

Les dimenſions, telles qu'on les trouve (*Mélanges de la Soc. Roy. de Turin* Tom. III. p. 395, & *Mém. de l'Acad. de Paris* pour 1764. p. 101.) ſont, en poſant la diſtance focale $= R$. $m = 1,55$, $n = 1,6$, $dn = 1,5$.

$r = + 0{,}5986.\ R$,
$r' = - 0{,}3255.\ R$,
$r'' = + 0{,}7288.\ R$,
$r''' = - 1{,}8116.\ R$;

en

en posant donc l'ouverture $= \frac{R}{12} = \frac{100}{13}$,

on aura $\sin c = 0{,}0696068$; $c = 3^\circ.59',48415$,
$\sin c' = \sin k = 0{,}1280081$; $c' = k = 7^\circ.21',270111$,
$\sin c'' = \sin k' = 0{,}0571716$; $c'' = k' = 3^\circ.16',64876$,
$\sin c'''$ $= 0{,}229999$; c''' $= 1^\circ.19',07494$;

donc, en substituant les arcs aux sinus, on a:

$$\Phi'' = 0{,}55\ (956',47796.) - 0{,}6\ (637',91887,)$$
ou $\Phi'' = 143',3155$;

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',1583$.

En calculant rigoureusement par les sinus eux-mêmes, je trouve:

$\Phi = 6^\circ.19',111347$,
$\Phi' = 0^\circ.\ 8',4907254$,
$\Phi'' = 2^\circ.23',320268$;

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',163$,

ce qui ne permettroit qu'une ouverture d'environ 1 pouce sur une lunette de 4 pieds.

Il est vrai qu'ici R n'est pas non plus bien exactement la distance focale; car, comme on doit avoir pour cette distance:

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''') - (n-1)(\sin k + \sin k')},$$

ou $F = \frac{R}{24\ [0{,}55 \times 0{,}2777864 - 0{,}6 \times 0{,}1851797]}$,

on a $F = \frac{R}{1{,}0001939}$;

donc chaque raïon donné doit être encore multiplié par 1,0001939, ce qui donne les nouvelles dimensions que voici:

$r =$

$$r = 0{,}5987158.\ F,$$
$$r' = 0{,}3255630.\ F,$$
$$r'' = 0{,}7289410.\ F,$$
$$r''' = 1{,}81195.\ F;$$

d'où l'on tire:

$$\sin c = 0{,}0695934; \quad c = 3°.59',437974,$$
$$\sin c' = \sin k = 0{,}1279834; \quad c' = k = 7°.21,184466,$$
$$\sin c'' = \sin k' = 0{,}0571605; \quad c'' = k' = 3°.16,610537,$$
$$\sin c''' = 0{,}0229955; \quad c''' = 1°.19,059835.$$

Mais ces nouvelles valeurs ne diminuent pas l'angle d'aberration; car on aura par le calcul:

$$\sin \beta = \frac{\sin c}{m} = 0{,}0448900,$$
$$\gamma = c + c' - \beta = 8°.46',2501,$$
$$\sin \beta' = \frac{m}{n} \sin \gamma = 0{,}1477177,$$
$$\gamma' = k + k' - \beta' = 2°.8',11374,$$
$$\sin \beta'' = \frac{n}{m} \sin \gamma' = 0{,}0384600,$$
$$\gamma'' = c'' + c''' - \beta'' = 2°.23',422,$$
$$\sin \delta'' = n\gamma'' = 0{,}6464688,$$
$$\Phi'' = \delta'' - c''' = 2°.23',33458;$$

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',1773$.

XXXVIII. On trouve dans les *Mémoires de l'Académie de Paris* pour l'année 1762. diverſes conſtructions d'objectifs à trois verres, propoſées par feu Mr. Clairaut; j'ai eu la curioſité d'examiner celle qui donne les raïons les moins inégaux, & qui laiſſe le verre de flintglaſs iſoſcele, ce que j'ai montré n'être pas poſſible dans le cas de $dn = 1{,}6$, ſi l'on

ſi l'on veut détruire exactement l'aberration de ſphéricité en laiſſant les lentilles convexes d'un même foïer (art. XXXIV.). Calcul fait, je ſuis obligé d'avertir les Artiſtes que les dimenſions dont je parle ſont très fautives, de quelque ſource que l'erreur s'y ſoit gliſſée; voici les dimenſions propoſées (*Mém. de Paris* de 1762. p. 631.):

$$\begin{aligned} r &= r^{V} = \tfrac{1}{1}\tfrac{0}{2}\tfrac{0}{6}\tfrac{0}{3}\tfrac{0}{6}\,R, \\ r^{I} &= r^{IV} = \tfrac{1}{2}\tfrac{0}{0}\tfrac{0}{3}\tfrac{0}{9}\tfrac{0}{7}\,R, \\ r^{II} &= r^{III} = 0{,}45.\ R', \end{aligned}$$

où il faut noter que la diſtance focale eſt $= R'$, & qu'on a (ibid. §. 6) $R = 1{,}2\,R'$; les rapports ſont $m = 1{,}55$; $n = 1{,}6$; $dn = 1{,}5$: on aura donc, en poſant $R' = 100$,

$$\begin{aligned} r &= r^{V} = 94{,}9668, \\ r^{I} &= r^{IV} = 57{,}9793, \\ r^{II} &= r^{III} = 45; \end{aligned}$$

& poſant la demi-ouverture $x = \frac{R'}{24}$, on aura:

$$\begin{aligned} \text{ſin } c' &= \text{ſin } c''' = 0{,}0438750, \\ \text{ſin } c^{I} &= \text{ſin } c^{II} = 0{,}0718646, \\ \text{ſin } k &= \text{ſin } k^{I} = 0{,}0925926. \end{aligned}$$

Or, comme on a à très peu près:

$$\text{ſin } \Phi^{II} = (m-1)(\text{ſin } c + \text{ſin } c^{I} + \text{ſin } c^{II} + \text{ſ} c^{III}) - (n-1)\,\text{ſin } k + \text{ſin } k^{I},$$

on a $\text{ſin } \Phi^{II} = 1{,}1\ (0{,}12731356) - 1{,}2\ (0{,}0925926)$,

ou $\text{ſin } \Phi^{II} = 0{,}0162024$; donc $\Phi^{II} = 55\frac{1}{2}'$.

Ainſi l'aberration négative ſeroit $A - \Phi^{II} = 1°.\,27'$, ce qui paſſe toute exagération.

Il eſt donc évident que R' ne ſauroit être ici la diſtance focale: en effet, ſoit cette diſtance $= F$, on aura:

$$F = \frac{R'}{0,55\left(\frac{2}{0,949668} + \frac{2}{0,579793}\right) - 0,6\left(\frac{2}{0,45}\right),}$$

ou $F = \frac{R'}{3,055525 - 2,666666} = \frac{R'}{0,388859}$;

d'où l'on voit que R' eſt à la diſtance focale comme 2, 571626 à 1. En diviſant donc chaque raïon, & en multipliant chaque ſinus, par 2,571626, on aura les vraies dimenſions de l'objectif propoſé, ſavoir:

$r = r^{v} = 0,369262F$; $fc = fc''' = 0,1128300$; $c = c''' = 6°.28',70865$,

$r' = r^{iv} = 0,225458F$; $fc' = fc'' = 0,1848081$; $c' = c'' = 10°.38',9965$,

$r'' = r''' = 0,1749866F$; $fk = fk' = 0,2381135$; $k = k' = 13°,46',51344$.

Les arcs donnent: $\Phi'' = 1,1\,(c + c') - 1,2k = 138',6595$; donc l'angle d'aberration négative eſt $A - \Phi'' = 4',5$. Mais, quelque intolérable que fût une telle aberration, celle de cet objectif ſeroit au moins quatre fois plus grande, parce que les arcs des courbures étant ſi conſidérables, le calcul par les arcs doit donner l'aberration bien au deſſous de ſa grandeur effective.

XXXIX. Dans ce même Mémoire de feu Mr. Clairaut, ce grand Géometre donne les dimenſions de trois objectifs, qui ont été réellement exécutés avec le plus grand ſuccès, l'un par M. Anthéaulme, & les deux autres par M. de l'Eſtang. Il ſera donc très intéreſſant de rechercher par notre méthode juſqu'à quel point l'aberration dans l'axe, qui par les formules devoit être nulle, étoit en effet détruite dans ces lunettes. On en pourroit même conclure avec la plus exacte préciſion quelle eſt la quantité d'aberration tolérable dans la pratique, ſi les ouvertures des lunettes avoient été indiquées.

Le premier objectif, (*Mém. de Paris* 1762. p. 613.) eſt à deux verres, dont celui de criſtal tourné vers l'œil eſt un ménisque; les dimenſions des raïons ſont:

$r =$

$$r = \frac{F}{1,034};\ r' = \frac{-F}{5,633};\ r'' = \frac{-F}{5,555};\ r''' = \frac{-F}{1,111},$$

d'où posant $\sin c = \frac{x}{r} = \frac{F}{24r}$, on tire:

$$\sin c = 0,0430833;\quad c = 2°.28',15519,$$
$$\sin c' = 0,2347033;\quad c' = 13°.34',4657,$$
$$\sin k = 0,2314815;\quad k = 13°.23',058657,$$
$$\sin k' = 0,0462963;\quad k' = 2°.39',211975.$$

Les arcs donnent: $\Phi' = 0,55\ (c + c') - 0,6k + 0,6k'$, ou $\Phi' = 143',13348$, donc l'angle d'aberration négative est: $A - \Phi' = 0',02366$. Cette aberration peu considérable est encore diminuée par la flèche de la derniere courbure, puisqu'elle est convexe. En faisant donc le calcul exactement, je trouve:

$$\alpha = 2°.28',15519;\quad \alpha' = 22°.33',9352,$$
$$\beta = 1°.35',5669;\quad \beta' = 13°.52',61862,$$
$$\gamma = 14°.27,054;\quad \gamma' = 3°.\ 8',77194,$$
$$\delta = 22°.45,3423;\quad \delta' = 5°.\ 2,27260,$$
$$\Phi = 9°.10',8766;\quad \Phi' = 2°.23',06063;$$
donc le complément de $\Phi' = 87°.36,93937;$

donc l'aberration dans l'axe est

$$fF = \frac{F}{24}\ (24 - 24,016192) + \frac{F}{24}.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}k',$$

ou $fF = (0,0231606 - 0,016192)\ \frac{F}{24} = 0,00029.F.$

Or, puisque M. Anthéaulme a exécuté sur ces dimensions une lunette de 7 pieds, célebre par sa bonté, & qui équivaut à des lunettes ordinaires de 30 ou 35 pieds, on a ici $F = 84''$, & par conséquent l'a-

berration de cette lunette, pour notre ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, ſeroit = 0,02439 pouces. Si donc, ſuivant la regle des Opticiens, l'aberration ne doit aller qu'à $0,00007\,5''F$ (XXIX.), elle ne devroit être ici que $0,0063''$; celle-ci ſeroit 3,87 fois trop grande. Il a donc fallu donner à cette lunette une ouverture $\omega = \frac{F}{12\sqrt{(3,87)}} = \frac{84''}{23,6}$ $= 3'',557$, ce qui ſeroit, ſelon la table de M. Huygens, l'ouverture d'une lunette ordinaire de 43 pieds. Mais celle-ci n'a produit que l'effet d'une lunette de 30 à 35. Il faut donc, ou que l'aberration inſenſible ſoit encore moindre que nous ne la poſons, (contre la remarque 4. de l'art. XXIX.) ou que les arcs de courbure c' & k de l'objectif de M. Clairaut étant ſi grands, il en ait réſulté des aberrations irrégulieres aſſez fortes pour diminuer la bonté de cette lunette. Pour connoître l'aberration tolérable dans la pratique, d'après cet objectif, en ſuppoſant l'ouverture d'une lunette ordinaire de 30 à 35 pieds = $3'',1$, il n'y a qu'à poſer cette aberration: $a = \frac{0,02439''}{y}$; & l'on aura $\frac{F}{12.\sqrt{y}} = 3'',1$, ou $y = 5,098$; ce qui donne $a = 0,00478''$ pour ce cas-ci, ou en général $a = \frac{0,00478''F}{84''} = 0,00057''F$. Il faudroit donc diminuer d'un quart la meſure adoptée.

Le ſecond objectif, (ibid. p. 615.) eſt le même que le précédent, mais qui devoit avoir ſur lui l'avantage, qu'en même tems que l'aberration ſeroit nulle dans l'axe, elle ſeroit auſſi petite que poſſible dans les autres directions. Les dimenſions indiquées ſont:

$$r = 0,6371\,F;\quad r' = 0,1962\,F;\quad r'' = -0,1995F;$$
$$r''' = -1,7630\,F,$$

d'où

d'où l'on tire les demi-courbures, & leurs ſinus, pour une ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, comme ſuit:

$$\text{ſin } c = 0{,}0654050; \quad c = 3^\circ.45',0065449,$$
$$\text{ſin } c' = 0{,}2123899; \quad c' = 12^\circ.15',746657,$$
$$\text{ſin } k = 0{,}2088554; \quad k = 12^\circ.\ 3',317047,$$
$$\text{ſin } k' = 0{,}0236339; \quad k' = 1^\circ.21',254814;$$

par conſéquent $\Phi' = 0{,}55\,(c + c') - 0{,}6\,k + 0{,}6\,k' = 143{,}1769213$, & l'aberration $\Phi - A = 0',0197$.

Le calcul rigoureux donne ici:

$$\alpha = 3^\circ.45',006545; \quad \alpha' = 21^\circ.\ 9',50096,$$
$$\beta = 2^\circ.25',104955; \quad \beta' = 13^\circ.\ 2',260409,$$
$$\gamma = 13^\circ.35',648247; \quad \gamma' = 2^\circ.20',198176,$$
$$\delta = 21^\circ.21',930576; \quad \delta' = 3^\circ.44',414197,$$
$$\Phi = 9^\circ.\ 6',183919; \quad \Phi' = 2^\circ.23',159383.$$

L'angle d'aberration paroit ici très petit, c'eſt $\Phi - A = 0',00224$. Mais il eſt dans le même ſens que la flèche. On a le complément de $\Phi' = 87^\circ.36',84062$, ce qui donne l'aberration totale de ſphéricité dans l'axe:

$$fF = \frac{F}{24}\,(24 - 23{,}999697) + \frac{F}{24}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}k',$$

ou $$fF = (0{,}000303 + 0{,}011817)\,\frac{F}{24} = 0{,}000505.\,F,$$

aberration qui excede de $\frac{8}{5}$ celle de ce même objectif avant que M. Clairaut l'eût rendu théoriquement le plus parfait de tous. En ſuppoſant donc que M. de l'Eſtang en ait exécuté auſſi une lunette de 7 pieds;

elle auroit eu une aberration de 0,04242″, avec une ouverture de 7″; ainſi, pour la réduire à la regle, il auroit fallu lui donner une ouverture $\omega = \frac{F}{12\sqrt{6,733}} = \frac{84''}{31,13} = 2'',7$, ce qui n'eût équivalu qu'à une lunette ordinaire de 25 pieds. Or il eſt à préſumer qu'on n'aura pas donné à cet objectif perfectionné une moindre ouverture qu'au précédent, d'environ 3″,1 pouces: il en faudroit donc conclure qu'une aberration de 0″,000099 F, n'eſt pas ſenſible. Du reſte, ſi dans l'exécution cet objectif s'étoit trouvé ſupérieur au premier, quoique leurs aberrations ſoient comme 5 à 3, il en faudroit ſans doute chercher la raiſon dans la diminution des grandes courbures, plus petites de 1°. 20′, dans ce ſecond objectif que dans le précédent.

Enfin le troiſieme objectif, auſſi exécuté par M. de l'Eſtang avec beaucoup de ſuccès pour des lunettes de 2 ou 3 pieds, a pour dimenſions (ibid. p. 627.)

$$r = r' = r'' = r''' = r^{IV} = 0,45\,F, \text{ \& } r^{V} = \infty;$$

la lentille de criſtal bi-concave eſt entre une bi-convexe de verre commun & une autre convexo-plane: on a donc

$$\text{ſin } c = \text{ſin } c' = \text{ſin } k = \text{ſin } k' = \text{ſin } c'' = 0,0925925;$$
$$\text{ſin } c''' = 0,$$
$$c = c' = k = k' = c'' = 5^{\circ}.18',76623;$$
$$c''' = 0;$$

donc, en négligeant les ſinus, on auroit

$$\Phi'' = 0,55\,(3 \times 318',7623) - 0,6\,(2 \times 318,7623),$$

ou $\Phi'' = 143',4548$, & l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',2977$, ce qui eſt beaucoup trop grand.

Le

Le calcul des ſinus donne :

$$\alpha = 5°.18',76623;$$

$$\beta = 3°.25,48347; \quad \beta' = 6°.58,4825; \quad \beta'' = 3°.46,12612;$$

$$\gamma = 7°.12',04899; \quad \gamma' = 3°.39,04996; \quad \gamma'' = 1°.32',664011;$$

$$\sin\delta = \int\alpha' = 0,1942884; \quad \int\delta' = \int\alpha'' = 0,1018815; \quad \delta'' = \Phi'' = 2°.23',616787;$$

ainſi le complément de $\Phi'' = 87°.36',383213;$

donc l'aberration totale dans l'axe eſt :

$$f\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}}{24}(24 - 23,92329) = 0,003196.\ \mathrm{F}.$$

L'aberration ſeroit donc, ſelon la regle ordinaire, 42 fois trop grande dans une lunette de deux pieds, & 40 fois trop grande dans une lunette de trois pieds; celle-là n'auroit pû admettre qu'une ouverture de 0,306 pouces, & celle-ci, qu'une de 0″,468, tandis que les lunettes ordinaires permettent une ouverture de 0,77 pouce dans une lunette de deux pieds, & de 0,95 pouce dans une de trois. Quand on n'auroit donné que ces ouvertures à l'objectif de M. Clairaut, il en réſulteroit dans le premier cas que l'aberration inſenſible ſeroit $a = 0'',000475\ \mathrm{F}$; & dans le ſecond, $a = 0'',00032\ \mathrm{F}$, c'eſt à dire, environ ſextuple, ou quadruple de celle que j'ai priſe pour regle. En ſuppoſant néanmoins qu'on n'aura pas adapté à cet objectif des oculaires d'un plus grand foïer, ou d'un moindre effet que ceux des lunettes ordinaires de 2 & de 3 pieds.

CONCLUSION.

Mon deſſein, en commençant ce Mémoire, étoit d'étendre ces recherches à des objectifs de plus de trois verres; d'examiner l'effet de l'aberration des raïons partis d'un point hors de l'axe; & de

de comparer l'imperfection qui réſulte dans les lunettes de la diverſe réfrangibilité, avec la confuſion qu'y produit l'aberration de ſphéricité, le tout rélativement à la pratique ſeule. Mais l'étendue de ce Mémoire m'oblige de réſerver ces recherches pour un autre, dans lequel, au lieu des rapports emploïés ici, pour m, n & dn, je me ſervirai de ceux que, d'après un grand nombre d'expériences, j'eſtime être les vrais rapports de réfraction & de diſperſion du crownglaſs, & du criſtal d'Angleterre.

Fig 1

Fig 2.

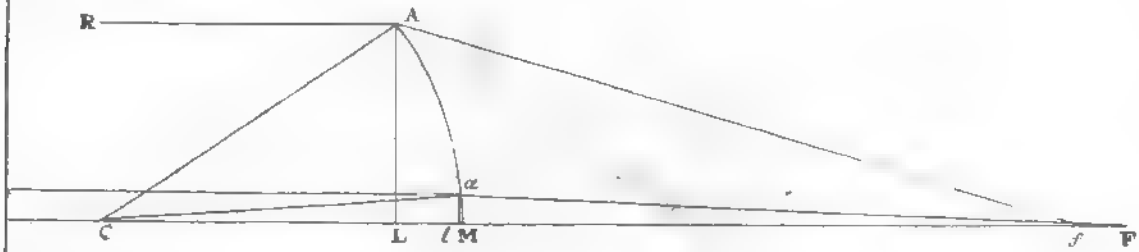
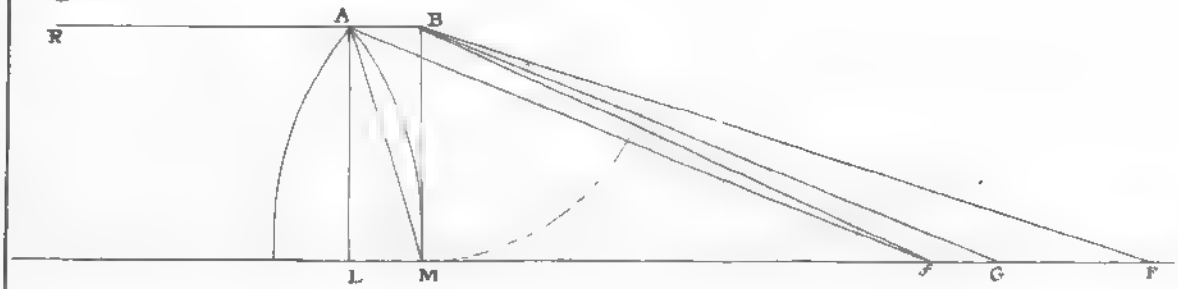


Fig 3.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

SUR

L'ETERNITÉ DU MONDE. (*)

PAR M. BEGUELIN.

Si la Métaphyſique a plus d'une fois contribué à embaraſſer la Théologie de queſtions auſſi inutiles qu'épineuſes: ſi elle a été la ſource de la plûpart des héréſies que le zele trop amer des uns, & la vaine ſubtilité des autres ont fait éclorre dans les premiers ſiecles du Chriſtianiſme; il faut convenir auſſi que la Théologie a tenu pendant longtems la Métaphyſique dans un eſclavage funeſte au progrès des ſciences; qu'elle l'a reſſerrée dans un petit cercle de notions peu fécondes par elles-mêmes; & qu'elle lui a ſouvent preſcrit des déciſions arbitraires, dont il n'eût pas été permis de s'écarter impunément.

Les tems ont changé. Le ſiecle où nous vivons eſt devenu, du moins dans nos contrées, le ſiecle de la liberté pour les Etres penſans. Avantage ineſtimable, ſi la pente qui entraine inceſſamment les hommes au delà des bornes, ne fait pas ſuccéder à cette heureuſe liberté de penſer, une licence effrénée, auſſi nuiſible au bien de la ſociété, que l'eſclavage précédent l'étoit à la culture de l'eſprit!

Je ne mets point au rang des abus qu'on peut faire de cette liberté, les doutes que des Philoſophes de bonne foi expoſent modeſte-

(*) Lû à l'Académie le 13 Oct. 1768.

ment & avec candeur ſur divers dogmes de la Théologie poſitive. L'eſprit du Chriſtianiſme, & celui de la Réformation autoriſent manifeſtement cette liberté. Vouloir l'interdire, ce ſeroit ramener dans les Egliſes proteſtantes l'autorité humaine dont elles font profeſſion de ſecouer le joug. Le vrai Chriſtianiſme n'a proprement qu'un dogme, c'eſt que tout homme peut & doit, ſuivant l'étendue de ſes lumieres, puiſer dans ſa propre raiſon, & à l'aide de celle-ci, dans la révélation qu'elle lui montrera, les vérités qui intéreſſent ſon bonheur préſent & futur.

De ce ſeul dogme, qui auroit pû réunir tant de ſectes diviſées, il réſulte, par une conſéquence bien immédiate, qu'il ne ſauroit y avoir d'oppoſition entre les vérités de la Religion, & celles de la raiſon; que ce qui ſera vrai en Philoſophie le ſera encore en Théologie, & réciproquement; en un mot que la ſaine Théologie, & la bonne Métaphyſique concourent de concert à bâtir l'édifice de nos connoiſſances les plus importantes, ſans jamais ſe heurter entr'elles.

Mais, ſi des diſcuſſions dictées par l'eſprit philoſophique ne ſont jamais un abus de la liberté de penſer, quel que puiſſe être leur objet, on n'en peut pas dire autant de ces brochures multipliées à l'infini, dont les Auteurs plus déciſifs que Philoſophes penſent avoir ſappé les fondemens de la Religion, pour avoir raſſemblé diverſes objections plauſibles contre quelques dogmes reçus. On ſait que les ſyſtemes théologiques ſont l'ouvrage des hommes. Il ne ſeroit donc pas étonnant qu'il s'y fût gliſſé des dogmes erronnés; il le ſeroit bien plus, qu'il y eût une ſeule ſecte de Religion où il n'y auroit rien à rectifier. Mais la Religion elle-même ne reçoit point d'atteinte de ces coups qu'on croit lui porter. Ces dogmes attaqués avec tant d'efforts redoublés, il n'y a qu'à les abandonner tout ſimplement à la merci de ceux qui les combattent, & le prétendu triomphe s'évanouit.

On avoit beaucoup écrit pour & contre le fataliſme. Plus les Théologiens s'efforçoient d'éclaircir les matieres épineuſes de la liberté,

té & de l'imputation, plus leurs adverſaires découvroient de nouveaux côtés par où les attaquer. On s'étoit jetté de part & d'autre dans un labyrinthe, dont l'iſſue devenoit plus difficile à meſure qu'on s'enfonçoit plus avant. Ces diſputes alloient devenir le ſcandale de la Religion, & le triomphe de l'incrédulité. Un Philoſophe s'aviſe de rechercher impartialement ce qu'il réſulteroit à l'égard de la Religion, & de la Morale, du ſyſteme du fataliſme, quand on le ſuppoſeroit vrai. Il démontre évidemment que ni la Morale ni la Religion n'en recevroient la moindre atteinte. Depuis la publication de la *Lettre ſur la fatalité*, les queſtions concernant la *liberté* n'intéreſſent plus que les Philoſophes: l'Eſprit fort ne peut rien gagner, ni le Théologien rien perdre à leur déciſion.

Je me propoſe dans ce Mémoire de prouver que la queſtion ſur l'éternité du monde eſt préciſément dans le même cas. Quelques vues que l'on ait eues en l'agitant ſi ſouvent, elle n'intéreſſe ni la Religion ni ſes adverſaires. Je ne ſerai ſans doute pas le premier qui ait fait cette remarque, mais il n'eſt peut-être pas inutile de la mettre dans tout ſon jour.

Quand on demande ſi le monde exiſte de toute éternité, la queſtion peut avoir deux ſens très différens. Le premier, c'eſt de diſcuter ſi l'univers exiſte par lui-même, en vertu d'une néceſſité intrinſeque, ou s'il a un auteur. Je ne prétends point toucher ici à la queſtion priſe dans ce premier ſens. La contingence du monde, ſa dépendance d'un Etre intelligent, ſupreme auteur de tout ce qui exiſte, ſe manifeſtent ſi clairement, elles ont été démontrées avec tant d'évidence, qu'il ſeroit très ſuperflu de répéter ici ce que perſonne ne peut ignorer.

Mais, en poſant pour principe, comme tout homme qui conſulte ſa raiſon le fait, que ce monde eſt l'ouvrage d'un Etre éternel & intelligent qui exiſte par lui-même, on demande encore, & c'eſt le ſecond ſens de la queſtion, ſi Dieu a créé l'univers de toute éternité, ou

ſi ce monde n'exiſte que depuis quelques milliers d'années? Le plus ancien des Ecrits qui contiennent les vérités révélées atteſte poſitivement la nouveauté du monde: la raiſon abandonnée à elle ſeule ſemble décider pour l'exiſtence éternelle. Ces deux propoſitions paroiſſent contradictoires dans les termes, mais au fond elles peuvent ſignifier la même choſe, & n'avoir rien qui ne ſe concilie parfaitement.

Sans entrer dans l'examen des diſtinctions que les Théologiens ont imaginées ſur l'ordre des decrets divins, il paroit évident qu'un Dieu immuable dans ſes volontés, dont la puiſſance eſt invariablement la même, de la notion duquel tout caractere de ſucceſſion eſt néceſſairement exclu, n'a pû différer de créer l'univers, dès que l'entendement divin en a approuvé l'exiſtence. On ne ſauroit trouver ni dans cet Etre ſupreme, ni hors de lui, la moindre raiſon d'un pareil délai. Bien plus, on conçoit très diſtinctement qu'il n'y en pouvoit avoir aucune. L'idée du monde actuel étoit préſente à l'intelligence infinie de toute éternité. Les motifs d'approbation étoient contenus dans cette idée. La toute-puiſſance créatrice coëxiſtoit avec la volonté ſupreme, & nul obſtacle au dehors n'empêchoit ſon énergie. Le plûtot ou le plus tard dans l'exécution, quand il ſeroit concevable, ne pouvoit ni diminuer, ni accroitre la perfection de cet immenſe ouvrage. Le plan en étoit invariablement arrêté, & il ſeroit contradictoire qu'il ne l'eût pas été. Toutes ces conſidérations découlent ſi néceſſairement de la notion diſtincte des perfections divines, qu'on ne ſauroit ſe refuſer à leur évidence. Il en faut donc conclure que le monde a réellement commencé d'exiſter de toute éternité.

Mais, ſi cette concluſion eſt légitime, comment pourra-t-il être vrai, que ce même monde n'exiſte que depuis environ ſix mille ans? Je ne rechercherai point ſi, entre ce que Moyſe rapporte à l'entrée de la *Geneſe*, & le récit qu'il fait de la création d'*Adam*, il ne s'eſt pas écoulé des milliers de ſiecles, & ſi la terre n'a pas éprouvé une ou pluſieurs révolutions avant de tomber dans le chaos qui précéda immédiatement la naiſſance de nos premiers parens. Quand on auroit reculé

culé la création de l'univers de pluſieurs milliards de ſiecles au delà de cette époque, on n'en ſeroit pas plus proche de l'éternité. Autant vaut-il pour le ſujet que je traite ici s'en tenir à l'opinion commune; qu'Adam a exiſté à la naiſſance du monde; qu'il ne s'eſt encore écoulé depuis lors qu'environ cinquante ſept ſiecles; & que la génération préſente eſt tout au plus la 230eme dans l'ordre ſucceſſif.

Je demande maintenant à ceux que l'idée de l'éternité du monde peut effaroucher, quelle différence ils conçoivent qu'il y auroit dans l'état actuel de l'univers, ſi *Adam*, au lieu d'avoir été créé *dans le tems*, comme on a coutume de s'exprimer, avoit réellement été créé de toute éternité? Penſent-ils que nous fuſſions plus reculés de l'inſtant de ſa naiſſance, que nous ne le ſommes actuellement? que le ſoleil auroit fait de lui à nous un plus grand nombre de révolutions annuelles? que les générations qui ſe ſont ſuccédées depuis les premiers hommes juſqu'à préſent ne ſeroient pas préciſément les mêmes dans les deux cas? Je les prierois d'expliquer quelle idée ils attachent à une premiere création *faite dans le tems*. Voudroit-on inſinuer par cette expreſſion que le tems exiſtoit comme un être réel, avant qu'il y eût quelque choſe de ſucceſſif dont il pût être la meſure? Peut-on concevoir une ſucceſſion dans l'Etre néceſſaire? Et avant une premiere création, y avoit-il des êtres contingens dont les diverſes modifications venant à la ſuite l'une de l'autre ſerviſſent à produire les notions du *tems* & de la *durée*?

Je ne vois qu'un ſeul ſens intelligible, ſuivant lequel on pourroit dire que le monde a été créé *dans le tems*. C'eſt en concevant que l'idée du tems, renfermée dans celle d'un Univers poſſible, exiſtoit par cela même dans l'entendement divin, & qu'elle y exprimoit, dès avant la création, l'ordre des changemens ſucceſſifs contenus dans cet univers idéal; il faudroit concevoir enſuite que la premiere partie de cet univers-là n'aiant pas l'approbation de l'intelligence ſuprême, elle n'auroit voulu donner l'exiſtence qu'à la partie ſuivante, en ſorte que le monde actuel auroit, pour ainſi dire, un commencement tronqué,

qué, & ne ſeroit que la continuation d'un monde antérieur qu'il n'auroit pas plû à Dieu de réaliſer. A' la faveur de ces ſuppoſitions, on pourroit dire effectivement que l'univers a non ſeulement été créé *dans le tems*, mais encore que la ſageſſe divine a choiſi le tems le plus convenable pour le faire exiſter, aiant pris pour cet effet l'inſtant du monde idéal où la ſuite renfermoit le plus de perfections, & aiant ſupprimé tout ce qui devoit précéder, parce qu'il n'eût ſervi qu'à rendre l'enſemble moins parfait.

Mais en accordant toutes ces ſuppoſitions, il eſt aiſé de voir que le monde n'en pourroit pas moins exiſter de toute éternité. C'eſt l'imperfection de notre intelligence qui nous oblige de conſidérer l'une après l'autre deux choſes qui de leur nature ſont coëxiſtentes, & que faute d'embraſſer à la fois, notre foible entendement ſe repréſente comme ſucceſſives. La notion du tems contenue dans l'idée de l'univers a ſans doute toujours exiſté en Dieu; mais la volonté de créer, & l'acte de la création, que nous imaginons comme poſtérieurs en ordre & en tems à cette idée, n'en ſont ſéparés que par nos abſtractions, & ne ſont qu'un tout indiviſible dans l'Etre ſuprême. Par les perfections & la néceſſité de ſa nature, il eſt à la fois tout ce qu'il eſt ſans changement ni ſucceſſion quelconques. Ainſi, à ſuppoſer que Dieu n'eût réaliſé qu'une partie du plan total de l'univers; cette partie, qui rélativement à la proportion ſupprimée auroit commencé *dans le tems*, pouvoit n'en être pas moins produite de toute éternité rélativement au Créateur.

D'ailleurs la ſuppoſition d'un monde tronqué paroit un peu forcée. Il eſt vrai que quel qu'ait été le premier état de l'univers, l'ordre & la régularité qui y regnent permettent d'imaginer des états antérieurs, d'où ce premier état auroit pû réſulter. Ainſi, par rapport aux grands corps céleſtes, rien n'empêcheroit de conſtruire des éphémérides, & de calculer des éclipſes pour des tems qui n'ont point exiſté, & qui remonteroient beaucoup plus haut encore au delà de l'origine du genre humain, que ne fait la *période Julienne*. Mais ces globes,

bes, dont la courſe eſt ſi réguliere, ne ſont pour ainſi dire que la charpente du monde, c'eſt l'édifice matériel de l'univers. Les êtres animés, deſtinés à l'habiter ſucceſſivement, ſont vraiſemblablement le premier & le grand objet de la création; & bien que ceux-ci aïent auſſi des modifications réglées, & des ſucceſſions conſtantes, les individus eux-mêmes ne ſubſiſtent que d'une génération à l'autre; il faut donc néceſſairement remonter dans chaque eſpece à une premiere génération, qui fixe l'état primitif du monde animé, dans le plan idéal auſſi bien que dans le plan réaliſé; celui-ci ſera donc l'expreſſion totale, & non un ſimple fragment de l'archétype.

Pour ne parler, par exemple, que de la petite planete que nous habitons, s'il avoit plû au Créateur de n'en réaliſer que la portion contenue depuis le déluge en deçà, quoique cette époque ſoit la plus favorable à la ſuppoſition, il ſeroit cependant entré moins d'ordre, & plus d'arbitraire dans la premiere production des eſpeces; il y auroit dans la nôtre huit individus de créés ſans liaiſon primitive entr'eux; & de cela ſeul on peut aiſément conclure à l'irrégularité qu'un plan tronqué entraineroit néceſſairement dans le tout.

Il eſt difficile, je l'avoue, de ſe familiariſer avec l'idée qu'un monde qui exiſte de toute éternité, ſubſiſte à peine depuis ſix mille ans; cependant il n'eſt pas mal aiſé de comprendre que cette difficulté ne provient que de la confuſion de nos idées. Si l'on regardoit le monde comme un être néceſſaire, indépendant, éternel, & qui exiſtât par ſa propre nature, il ſeroit aſſurément faux qu'il ne fût que depuis ſi peu de tems, ou plutôt, les notions de tems, d'années, de ſiecles, ne ſeroient pas plus applicables à ſa maniere d'exiſter, qu'elles ne le ſont à l'exiſtence du Créateur. Mais, dès qu'on eſt obligé de reconnoitre que le monde n'a aucun des caracteres qui conviennent à l'Etre ſuprême, & néceſſaire en ſoi; dès que ſa contingence prouve qu'il a eû un Auteur, dire que cet Auteur du monde l'a créé de toute éternité, c'eſt dire exactement ce que *Moyſe* a exprimé avec une juſteſſe & une préciſion admirables, que Dieu le créa *au commencement*, puiſqu'en effet

c'eſt préciſément à la naiſſance du monde qu'a dû commencer le tems, la durée, l'eſpace, & les révolutions qui ſont le partage des êtres contingens.

Ce ſeroit donc très improprement parler, ou plutôt il ſeroit très faux de dire que le monde eſt *éternel*. Cette propoſition renfermeroit une contradiction manifeſte. Ce qui eſt contingent, variable, créé, ne ſauroit être éternel. Un attribut ſi relevé ne peut convenir qu'à Dieu ſeul; & cette éternité étant unique, hors du cours de la nature, incommenſurable avec toutes les idées que nous pouvons acquérir par nos ſens, doit naturellement reſter inconcevable pour des intelligences bornées. Qu'il nous ſuffiſe qu'avec nos foibles lumieres nous puiſſions appercevoir diſtinctement la raiſon de cette éternité en Dieu, ſans prétendre nous former une notion exacte d'une maniere d'être qui n'a rien de commun avec nos conceptions. L'idée d'un être éternel eſt inévitable, quelque ſyſteme qu'on veuille ſe forger. Si on la refuſe à l'Intelligence ſuprême, il faudra l'accorder à la matiere la plus brute; & ceux qui ne voudront pas admettre cette exiſtence éternelle dans le ſeul Etre dont les perfections l'exigent, ſeront contraints de la ſuppoſer dans des millions de corpuſcules qui, ſans avoir un ſeul des caracteres convenables à l'Etre éternel, ont tous ceux qui repugnent le plus indubitablement à la nature d'un tel être.

Le penchant que nous contractons dès l'enfance à nous faire des images ſenſibles des choſes que nous tâchons de concevoir, a donné lieu aux emblemes par leſquels on exprime la notion de l'éternité. C'eſt ou une ligne courbe rentrante en elle-même, & formant un cercle parfait, ou une ligne droite dont chaque extrémité va ſe perdre dans l'infini. On ſent aſſez que ni l'une ni l'autre de ces images ne ſauroit exprimer la maniere d'exiſter de l'Etre éternel. Elles repréſentent une durée ſans borne, mais c'eſt une durée ſucceſſive, telle qu'on peut la concevoir dans des êtres contingens qui ne ſont pas à la fois tout ce qu'ils ſeront. Auſſi ces emblemes qui donneroient une idée bien fauſſe de l'Eternité de Dieu, peuvent très bien aider à faire concevoir

cevoir l'éternité du monde. Repréſentons-nous la chaine des générations depuis le premier homme, les premiers animaux, les premieres plantes créées, juſqu'aux hommes, aux brutes, aux plantes qui couvrent aujourd'hui la ſurface de la terre. Cette chaine, dont chaque génération forme un chainon, eſt une durée déterminée; c'eſt une ligne dont la longueur finie eſt la ſomme des petits eſpaces qu'on voudra aſſigner à chaque génération. Mais le nombre de ces générations actuellement éteintes eſt fixe & invariable; ainſi l'intervalle entre les deux extrémités de la chaine l'eſt auſſi. En quelque point donc du grand cercle, ou de la ligne infinie, qu'on place la création du monde, ou le premier chainon des générations ſucceſſives, nous nous retrouverons toujours à la même diſtance de l'origine du monde. Il n'y aura jamais que le même intervalle du premier homme à nous.

Qu'un arbre déraciné par l'impétuoſité des vents ſoit entrainé dans le vaſte océan qui entoure notre globe, ſous quelque méridien, dans quelque degré de latitude qu'on imagine cet arbre flottant, la diſtance de ſa racine à ſa trentieme branche ſera invariablement la même; ou pour donner une comparaiſon encore plus préciſe, qu'un ſablier ait commencé à s'écouler de toute éternité, ou qu'il ne marche que d'aujourd'hui, le cent-millieme grain écoulé aura ſuccédé au premier au bout d'un même intervalle de tems.

Mais, ſi la nouveauté du monde n'eſt pas incompatible avec ſa création de toute éternité, il ſemble qu'on en pourroit inférer, ou que le premier homme a du coëxiſter avec Dieu; ou que Dieu lui-même n'exiſte que depuis la création; deux propoſitions qui ſeroient également révoltantes, & abſurdes. A cela je n'ai qu'un mot à répondre. Tant qu'on ſe livrera à l'imagination ſeule, j'avoue qu'on ne ſauroit s'empêcher de joindre au moins implicitement la notion du tems à celle de l'exiſtence de Dieu; & cette illuſion doit ſans doute conduire, quelque ſentiment que l'on adopte, à des conſéquences qui choquent la raiſon. Mais, dès qu'on voudra conſulter celle-ci, elle nous

montrera évidemment que la ſource de cette illuſion vient de ce que toutes les exiſtences dont nous avons reçu l'idée par nos ſens, renferment la notion du tems, & de la durée. Elle nous fera ſentir avec la même clarté, que l'exiſtence de Dieu eſt d'une nature auſſi différente de la nôtre, que ſon eſſence differe de celle des choſes créées; que l'idée du tems y eſt auſſi peu applicable que celles de ſucceſſion, de modification, de variabilité, de commencement, ou de fin. Si l'on convient de cettte vérité, toutes les objections tombent; ſi l'on n'en convient pas, il ſeroit auſſi inutile d'en diſputer davantage, après que la choſe a été ſi ſouvent diſcutée, qu'il le ſeroit d'oppoſer l'incommenſurabilité à celui qui ſoutiendroit qu'un ſon peut être jaune. Les premieres notions doivent être ſenties, & ne ſe prouvent point.

RÉFLEXIONS PHILOSOPHIQUES SUR LES SONGES.

PAR M. DE BEAUSOBRE.

PREMIER MÉMOIRE.

La conſtitution du corps humain eſt telle que ſa conſervation demande qu'il s'y faſſe alternativement une dépenſe & une réparation de forces: ſa foibleſſe a exigé que le repos ſuccédât à l'action, & il a fallu que près d'un tiers de la vie ſe paſſât dans l'inaction, afin que les deux autres pûſſent être emploïés. Heureux encore les hommes qui jouiſſent de ces deux tiers de réveil, & dont la vie n'eſt pas un ſommeil perpétuel!

Le corps fatigué pendant le jour a une tendance naturelle vers le repos ou l'inaction: les mouvemens vitaux ſe rallentiſſent inſenſiblement; les mouvemens volontaires, après être devenus moins fréquens, ceſſent tout à fait; il faut ſe faire violence pour réſiſter à l'aſſoupiſſement, & ce combat dure quelquefois auſſi longtems que notre ame ſe repréſente clairement quelques objets ou quelques idées: quand une fois les idées obſcures ont pris la place des idées claires, le ſommeil eſt complet. C'eſt ainſi que l'homme qui s'endort tous les jours a tous les jours ſous ſes yeux une vive image de la mort.

Pendant tout le tems que dure le ſommeil, l'ame paroit ne point avoir de ſenſations; elle en a cependant, mais de très foibles; ainſi qu'il nous arrive dans la veille d'avoir des momens où nous croïons que nous n'avons penſé à rien, quoique nous aïons eu réellement des re-

préſentations qui ont fixé notre attention plus ou moins, de même il nous arrive auſſi de n'avoir ſouvent pendant le ſommeil que des repréſentations obſcures, dont l'ame ne s'apperçoit que foiblement, & que par conſéquent elle ne ſe rappelle pas au réveil. Quand on reflêchit ſur ſoi-même, on ſe perſuade aiſément qu'il y a dans notre ame une infinité de repréſentations qui y ſont, ſi j'oſe ainſi parler, à notre inſçu.

L'ame étant une force repréſentative de l'univers rélativement à la ſphere des ſenſations, elle ſe repréſente pendant le ſommeil comme pendant le réveil ſon état actuel; pendant le ſommeil elle ſe le repréſente obſcurément. Ce qu'il y a alors de clair dans les repréſentations de l'ame, c'eſt ce que lui ſuggere l'imagination, qui reproduit différentes repréſentations: l'enſemble de ces repréſentations clairement apperçues eſt ce qu'on appelle Songe, dès qu'on peut ſe les rappeller au réveil.

Ce n'eſt que par le degré de clarté des repréſentations de notre ame, que nous jugeons que les objets repréſentés ſont préſents, & que nous les diſtinguons de ceux qui n'étant pas préſents nous ſont repréſentés par l'imagination. Ce degré de clarté eſt donc rélatif, nous apprenons à en juger par l'expérience; il eſt donc tout naturel que ce qui nous eſt repréſenté clairement dans le ſommeil, nous y ſoit repréſenté comme préſent. Ici l'on trouvera un rapport ſenſible entre un homme qui rêve & un fou; celui-ci confond les ſenſations avec les fantômes de l'imagination, & ne diſtingue plus par conſéquent le préſent de ce qui ne l'eſt pas; dans le ſommeil les ſenſations n'étant que très foibles, (car on ne peut appeller autrement les repréſentations obſcures de l'action des objets extérieurs,) tout ce que l'imagination repréſente paroit d'autant plus clair qu'aucune autre clarté ne lui eſt comparée; en faut-il d'avantage pour que ces productions de l'imagination ſoient priſes pour autant d'objets actuels & exiſtants? il ne reſte à l'ame aucun moïen pour ſe détromper, elle eſt la dupe de ce degré de clarté que l'imagination donne à ſes fantômes. C'eſt ſurtout lorſque le ſommeil n'eſt pas bien profond que l'ame s'arrête aux objets que lui préſente l'imagination, parce qu'alors

lors la diſpoſition du corps facilite le travail de l'imagination, & que l'impreſſion plus ſenſible des objets extérieurs la rend plus active.

L'ame d'un homme qui s'aſſoupit & s'endort, conſerve ſurement une ſuite de repréſentations quelconques, mais il ne ſe les rappelle pas toujours au réveil: l'action d'un objet extérieur, ou un changement quelconque dans le corps, peut faire naitre pendant le ſommeil une repréſentation moins obſcure que les autres, & celle-ci amene d'autres repréſentations à la faveur de l'aſſociation des idées; il ne s'agit plus d'autre choſe, ſi ce n'eſt que l'ame ſe rappelle ces repréſentations au réveil. Si le rapport qui ſe trouve entre les repréſentations produites par la loi de l'imagination n'a rien d'eſſentiel, le ſonge ſera un amas confus où il n'y aura en apparence ni ordre ni liaiſon; ſi au contraire ce rapport renferme des choſes eſſentielles, qui ſont priſes dans la nature même des objets repréſentés, le ſonge ſera une ſuite d'événemens naturels.

Que nous aïons au reſte des ſenſations pendant le ſommeil, c'eſt ce qu'on ne ſauroit nier: c'eſt à la faveur des ſenſations devenues plus fortes que le ſommeil s'interrompt, & qu'on s'éveille. Auſſi a-t-on remarqué que les ſonges ſont plus fréquens & plus clairs vers le matin; c'eſt ce qui a fait croire que ce qu'on rêvoit dans ce tems-là annonçoit l'avenir. HORACE (*) a dit

Vetuit me tali voce Quirinus
Poſt mediam noctem viſus, cum ſomnia vera.

On a cru que l'eſtomac étant déchargé de ce qui s'y trouvoit, l'ame étoit plus libre, & par conſéquent plus en état d'entrevoir l'avenir & de ſe repréſenter le préſent: ce qu'il y a de vrai, c'eſt que les ſenſations étant plus vives lorſque les nerfs ſont plus tendus, & les mouvemens vitaux plus forts, il eſt naturel que les ſenſations ſoient plus vives vers le matin qu'immédiatement après l'aſſoupiſſement, & que les ſonges ame-

(*) L. I. Sat. 10.

amenés par de ſemblables ſenſations ſoient plus clairs, que ceux qui arrivent dans des circonſtances oppoſées.

Si l'on dit qu'on rêve ordinairement de ce dont on a beaucoup parlé la veille, que les ſonges ſont plus fréquens dans le tems des évenemens extraordinaires, & lorſque l'ame eſt fort occupée, ſoit de ſujets qui lui inſpirent beaucoup de joie ou de triſteſſe, ſoit de ſujets qui l'affectent autrement, je ne vois là rien qui ne s'accorde avec ce que je viens de dire. En effet, les objets qui occupent l'ame ou longtems ou fortement, ſe trouvant liés à une infinité de choſes, l'ame ne peut ſe repréſenter quoi que ce ſoit qui n'ait avec eux quelque rapport, & ce rapport, quelque étranger qu'il leur ſoit, ſuffit pour que l'imagination les ramene dans le ſommeil comme dans la veille.

Les malades & les perſonnes d'une conſtitution foible rêvent plus ſouvent que les gens qui ſe portent bien & qui ſont robuſtes: cela arrive parce que les premiers ont un ſommeil plus léger, & que les objets extérieurs qui agiſſent ſur eux trouvent un corps plus ſenſible: les ſenſations ſont par conſéquent plus fortes, & plus vivement apperçues.

Si donc les maladies, les indigeſtions, les échauffemens produits par le vin, les grands chagrins, les grands ſujets de joie ſont accompagnés d'un état où l'on rêve plus fréquemment, ce ne ſont pas à proprement parler ces diſpoſitions du corps ou de l'ame qui font rêver, mais c'eſt que le ſommeil eſt alors inquiet & foible; c'eſt un état preſque mitoïen entre la veille & le ſommeil, où il eſt naturel que les objets extérieurs agiſſent ſur le corps avec plus d'effet. Un état irrégulier ou extraordinaire dérange le ſommeil, une partie de cet état eſt repréſentée obſcurément à l'ame, l'imagination devient active, & elle le devient d'autant plus aiſément que cet état extraordinaire l'a beaucoup exercée pendant la veille.

Auſſi y a-t-il lieu de croire que les hommes qui ont le plus d'imagination, qui l'exercent le plus, rêvent auſſi le plus ſouvent. Ces hom-

hommes accoutumés à conſidérer dans les objets & dans les évenemens tout ce qui n'y eſt pas eſſentiel, mais qui eſt ſuſceptible d'être repréſenté ſous des images ſenſibles, comme le lieu, la maniere d'être, &c. ces hommes, dis-je, ont une facilité étonnante de trouver des rapports fort peu réels; leurs ſonges doivent être auſſi variés que fréquens. Suppoſés deux hommes qui quittent un cercle de femmes; que l'un ait pris garde aux habits, à la parure, à la figure, aux *pompons*, à tous les propos, à tout ce qui ſe trouvoit dans la chambre; tandis que l'autre n'a fait qu'une légere attention à tous ces objets, & s'eſt contenté de ſuivre tranquillement une converſation honnête & qui n'avoit rien d'extraordinaire; n'arrivera-t-il pas naturellement à ces deux hommes, que l'un rêvera, tandis que l'autre aura peut-être le ſommeil le plus profond? Il ne faut au premier qu'une étincelle pour donner à ſon imagination une activité étonnante: le magazin des fantômes eſt rempli, il ne faut qu'un rien pour les faire paroître.

Je conclus de là que, s'il étoit vrai qu'il pût y avoir des gens doués du talent de ſe procurer des ſonges amuſans & agréables (*), ce ne pourroit être qu'à la faveur de la malheureuſe habitude qu'auroient contracté ces perſonnes, d'occuper beaucoup leur imagination, & de la tourner continuellement vers certaines images. C'eſt encore ce qui explique les rêves des animaux: un levrier aboie en dormant: Lucrece a dit des chevaux

Quippe videbis equos fortes, cum membra jacebunt,
In ſomnis ſudare tamen, ſpirareque ſæpe —

Il eſt tout naturel que les animaux, n'aiant qu'un très petit nombre de repréſentations, en aient de bien vives qui reviennent fré-

(*) On a cru qu'il y avoit des moïens propres à faire rêver: telle devoit être la vertu de la Corne d'Ammon. Pline parle, au livre XXXVII. chap. 12. de ſon *Hiſt. Natur.* d'une pierre, appellée *Enmetris*, qui étant miſe ſous le chevet avoit la vertu de procurer des ſonges qui devoiloient l'avenir.

fréquemment, & ſe retrouvent pendant le ſommeil. Mais ſi les animaux ont des rêves, ils n'ont pas des ſonges: ils ne ſont pas en état de diſtinguer les repréſentations de leur ame pendant le ſommeil de celles qui s'y trouvent pendant la veille. Les hommes eux-mêmes ont ſouvent des ſonges ſi clairs & ſi ſuivis qu'il leur eſt bien difficile de les diſtinguer de la réalité: combien de fois n'arrive-t-il pas que la clarté des repréſentations eſt ſi grande qu'elle nous éveille: quelquefois il arrive qu'on eſt la dupe de cette clarté, on croit avoir éprouvé ce qu'on n'a fait que rêver. Auſſi Deſcartes déſeſpéroit-il de trouver une marque caractériſtique qui ſervît à diſtinguer les ſonges de la réalité: „*Quæ dum cogito*, dit-il dans ſes Méditations P. I. p. 6, *attentius*, *tum plane video*, *numquam certis indiciis vigiliam a ſomno poſſe diſtingui.*

Mais, pour en revenir au pouvoir que les hommes peuvent avoir ſur leurs ſonges, c. à d. ſur leur imagination dans le tems du ſommeil, il eſt bien clair que ce pouvoir n'eſt qu'indirect: ce n'eſt qu'après l'avoir bridée pendant la veille, & s'être fait une heureuſe habitude de la contenir dans de juſtes bornes, qu'on peut eſpérer que pendant le ſommeil elle n'extravaguera pas ſi aiſément. Tous les hommes ne trouvent pas à cet égard les mêmes facilités: la nature de leur tempérament, les circonſtances où ils vivent, la ſanté, l'éducation, la ſociété, tout cela influe ſur l'imagination & ſur l'empire auquel on voudroit la ſoumettre. De là il s'enſuit qu'on peut juger avec quelque probabilité du caractere & des mœurs d'un homme, en examinant la nature de ſes ſonges: non qu'on puiſſe dire ſans reſtriction, comme Pythagore & Zénon, que les ſonges dévoilent les vices & les vertus des hommes; car, ſi une ſuite de ſonges peut ſervir à en découvrir quelque choſe, ce n'eſt pas avec une certitude complette. Combien de tempéramens ardens, qui ont bien de la peine à ſe vaincre! Combien de gens vertueux, qui ne peuvent combattre les mouvemens de la nature ſans ſalir leur imagination! Combien de perſonnes, qui vivant dans le monde ſont obligées de voir ce qui remue les paſſions, d'écouter ce qui donne à l'imagination plus d'empire qu'on ne voudroit lui en laiſſer!

Des-

Deſcartes a cru qu'il y avoit entre les repréſentations de l'ame dans le tems du ſommeil, & celles que nous avons pendant la veille, cette différence remarquable, que les ſonges comme iſolés & ſans liaiſon ſe rappellent difficilement à notre mémoire. Mais Deſcartes convenant qu'il y a des ſonges ſi frappans, & dont le ſouvenir nous reſte ſi longtems, qu'il y en a de ſi vivement repréſentés, qu'il arrive à ceux qui en ont de ſemblables, non ſeulement de ſe les rappeller juſqu'à la fin de leur vie, mais encore de les confondre avec ce qui peut leur être arrivé pendant la veille; Deſcartes, dis-je, convenant de ce fait, convenoit par là même, que les ſonges appartiennent à la chaine des repréſentations de notre ame; comment pourroit on ſans cela ſe les rappeller au réveil? Il y a plus: on conclut mal en ſuppoſant que la difficulté de ſe rappeller un rêve eſt une preuve de ce manque de liaiſon: ne nous arrive-t-il pas pendant la veille, qu'il ſe préſente à notre eſprit des idées, dont nous ne nous ſouvenons plus un inſtant après, & qui étoient cependant liées aux repréſentations que notre ame avoit alors? Si l'on dit que, même pendant la veille nous avons des repréſentations qui ſemblent n'avoir aucune liaiſon avec l'état actuel de notre ame, je réponds que cela paroit ainſi parce que dans la chaine des repréſentations il y en a d'obſcures & de claires. Une idée obſcure devient claire; le paſſage de l'obſcurité à la clarté nous paroit bruſque, parce que nous ne voïons pas parfaitement par quelle aſſociation d'idées, en partie claires en partie obſcures, cette nouvelle idée a été reproduite. Tout eſt lié dans la nature, mais tout ne l'eſt pas de façon que la liaiſon ne nous échappe jamais. Comme il n'y a rien ſans raiſon ſuffiſante, quelqu'étranges que nous paroiſſent certains évenemens, ils ſont tout auſſi naturels que ceux qui nous paroiſſent les plus conformes aux loix ordinaires: ils ne different de ces derniers que par notre maniere de voir: les raiſons qui expliquent ce qu'ils ſont & comment ils le ſont, ne nous ſont pas auſſi connues que celles qui expliquent ces évenemens qui n'ont rien de frappant pour nous: ici nous ſommes plus éclairés, là plus ignorans; voilà la différence. Quand on ne peut regarder les objets que d'un point de vue, il doit néceſſaire-

ment y avoir des choſes moins bien vues que d'autres. Tout ce que l'ame ſe repréſente pendant le ſommeil eſt une ſuite de l'état où elle ſe trouve: quelque profond que ſoit le ſommeil, on ne ſauroit en exclure une action quelconque des objets extérieurs, une activité quelconque de l'ame, & cela ſuffit pour prouver cette liaiſon que Deſcartes vouloit nier.

Comme toutes les repréſentations de l'ame ſont liées les unes aux autres ſuivant un certain ordre, il ſeroit poſſible de ſçavoir d'avance le ſonge qu'un tel homme aura, ſi l'on pouvoit connoître toutes les repréſentations qu'a eu ſon ame, toutes celles qu'elle a au moment où le ſommeil commence, & toutes les ſenſations qui auront lieu pendant ce tems-là. Ce probleme ſeroit ainſi énoncé: toutes les repréſentations paſſées, & toutes les repréſentations actuelles d'une ame, dans le moment où commence le ſommeil, étant données, les objets extérieurs & leur action étant connus, l'état du corps étant déterminé, découvrir quel ſera le rêve de cet homme-là.

On dira ſans doute qu'en ſuppoſant poſſible la ſolution de ce probleme, il ſemble qu'on enviſage l'ame comme une machine, qui ne s'écarte jamais de la route que ſes reſſorts lui font tenir. Mais, ſans entrer dans la queſtion épineuſe de la liberté, je me contenterai de remarquer, qu'il s'agit ici ſeulement des idées obſcures qui deviennent claires à la faveur des ſenſations, dont l'ame ne ſauroit être maître. D'ailleurs, quand l'ame ſeroit un eſclave pendant que le corps repoſe, elle pourroit toujours être libre pendant le tems de la veille: & c'eſt tout ce qu'il faut.

On a voulu diſtinguer les ſonges en naturels, en extraordinaires, & en ſurnaturels; & on a entendu par extraordinaires, ceux à la production desquels concourt une cauſe finie & étrangere; & par ſurnaturels, ceux où intervient l'action de l'Etre infini. Mais, ſi un ſonge eſt extraordinaire dès que l'on peut ſuppoſer le concours d'une cauſe étrangere & finie, tous les ſonges le ſont, ou l'on ne ſçait ce que l'on dit: tous les ſonges, comme toutes les repréſentations de l'ame, doivent

vent leur origine aux ſenſations, l'imagination fait le reſte. Si au contraire on ſoutenoit que quelqu'autre cauſe étrangere & finie, qui ne ſeroit point une ſenſation, pût agir ſur l'ame de celui qui rêve, on avanceroit une abſurdité qui ne mérite aucune réfutation. Quand il ſe trouveroit dans les ſonges des repréſentations qui ſembleroient ne pouvoir être ni la ſuite d'une ſenſation, ni le réſultat d'autres repréſentations, ce ſeroit notre maniere de voir qu'il faudroit accuſer de cette erreur. Dès qu'on ne regarde pas l'ame pendant le ſommeil comme un être inactif, dès qu'on ſe repréſente l'ame avec une foule d'idées plus ou moins obſcures, on ne ſe fait point des ſonges des idées auſſi fauſſes. Quant aux ſonges miraculeux ou ſurnaturels, ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner comment un Etre infini peut donner à l'ame pendant le ſommeil une ſuite de repréſentations claires: les conjectures de la Philoſophie ceſſent là où l'on commence à ſuppoſer l'action d'une puiſſance infinie.

Il nous arrive pendant la veille quelque choſe de bien ſemblable aux ſonges, & qui mérite qu'on y faſſe attention. On voit des hommes, qui tout à coup rentrant en eux-mêmes n'éprouvent plus aucune ſenſation: les repréſentations de leur ame les occupent à un point que leur état reſſemble en quelque façon à celui du ſommeil. Deux eſpeces d'états très différens ſe rangent ſous la même claſſe: un Mathématicien, comme un autre Archimede, abſorbé dans ſes calculs, n'a que des repréſentations diſtinctes, avec une foule de repréſentations obſcures qu'il n'apperçoit pas: un homme, livré à ſes paſſions & s'en occupant ſans ceſſe, ſe tranſporte dans un palais enchanté, & n'a que des repréſentations claires avec une foule de repréſentations obſcures qu'il n'apperçoit pas plus que le premier. Pendant le ſommeil, celui qui rêve a quelques repréſentations claires: il reſſemble aux deux autres en ce que les ſenſations ſont réputées nulles, & avec le dernier il a de plus la conformité de croire préſent ce qui n'eſt que dans ſon imagination. Mais ce qui reſſemble encore plus aux ſonges ce ſont les viſions, ou les repréſentations vives & claires de quelque choſe qui n'exiſte que dans l'imagination. Malheur à ceux qui pourroient en avoir facilement: la folie n'eſt que le triſte ta-

lent de donner aux fantômes de l'imagination les apparences de la réalité.

J'ai dit que, ſi l'on ne ſe rappelloit pas toujours au réveil les repréſentations qu'on a eues pendant le ſommeil, ce n'étoit pas une preuve qu'on n'en ait pas eu. Comme il nous arrive d'oublier ſouvent ce qui nous a été clairement repréſenté pendant la veille, la même choſe ne nous arriveroit-elle pas pour les repréſentations qui ont été claires pendant le ſommeil? Mais, ſans entrer ici dans des diſcuſſions ſubtiles, je ne veux pour preuve de la vérité de ce que j'avance, que ce qui arrive aux Noctambules. Nous ſavons qu'il y a des gens capables pendant le ſommeil d'une adreſſe bien ſupérieure à celle qu'ils peuvent avoir pendant la veille. Une ſuite d'actions viſiblement conſéquentes & rélatives à un but; des actions qui reviennent à point nommé; une ignorance totale de ce qu'on a fait, voilà ce qu'on voit dans les Noctambules. Irons-nous avec quelques Philoſophes chercher dans la Lune la raiſon de ces phénomenes, & croirons-nous que les phaſes de cet aſtre influent ſur le corps humain au point de donner à un homme, plongé dans le ſommeil, une adreſſe qu'il n'a point lorſqu'il veille? On a appellé à cauſe de cela les Noctambules des lunatiques; je ne ſçai pas trop pourquoi ce nom leur eſt reſté depuis qu'on a laiſſé aux jardiniers & aux charlatans, gens toujours portés à en appeller à l'expérience & à en abuſer, ces préjugés qu'aucune ombre de raiſon ne peut colorer. Si la Lune pouvoit produire de pareils effets, elle en produiroit plus ſouvent, & n'agiroit certainement pas par prédilection ſur quelques individus.

Croira-t-on qu'un mouvement irrégulier du ſang, que des humeurs, des obſtructions, en un mot un état extraordinaire du corps ſoient cauſe de ces effets ſinguliers? que des vapeurs, ſemblables à celles qui étourdiſſent les gens ivres, & leur font entreprendre des choſes très périlleuſes, montent au cerveau des Noctambules, & les guident? Renvoierons-nous ces Noctambules aux incurables, puiſque la Médecine n'a pas encore trouvé de remede bien ſûr pour les rétablir?

blir? Non, nous ferons mieux d'enviſager ce qui ſe paſſe en eux comme l'ouvrage de l'imagination, qui peignant avec beaucoup de vivacité & de clarté ce qu'il faut faire pour exécuter ces actions difficiles, entraine ces malheureux à les entreprendre. Il eſt aſſez naturel de croire, que ces gens aïant conſidéré pendant le jour des chemins difficiles à pratiquer, ſe les repréſentant pendant le ſommeil, les entreprennent, & évitent des dangers qu'ils ne voient & ne ſe repréſentent pas: il ſuffit ſans doute qu'ils ſe repréſentent vivement les actions qu'il faut faire, pour que le corps faſſe les mouvemens analogues à ces repréſentations. Cela paroitra d'autant plus vrai, qu'on a guéri pluſieurs perſonnes attaquées de ce mal, en les fouettant au retour de leurs courſes.

Je conclus de tout ce que je viens de dire, qu'on ne peut pas juger de ce qui a été dans l'ame par le ſouvenir qui nous en reſte: on ne juge pas même de ce qui s'y trouve par les repréſentations actuelles. Les idées obſcures ſont dans l'ame, quoiqu'elles ne ſoient point apperçues. Cela nous ſervira à répondre à ceux qui pourroient demander pourquoi il y a des gens qui ne rêvent jamais, & d'autres qui ne rêvent que rarement; nous leur ferons remarquer dabord qu'il ne peut s'agir ici que des ſonges, ou des repréſentations que l'ame ſe rappelle au réveil: nous dirons en ſecond lieu, que ſi effectivement il y a des hommes qui n'ont jamais eu à leur réveil aucun ſouvenir de ce qu'ils ont rêvé, on ne peut en chercher la raiſon que dans le double avantage dont ces hommes ont toujours joui, d'avoir un ſommeil bien profond, & de n'avoir pas l'imagination aſſez active pour qu'elle ſoit réveillée aux plus foibles ſenſations.

Quelques uns ont cru, que comme dans le ſommeil le corps regagnoit les forces perdues pendant le jour, l'ame de même inactive pendant le ſommeil réparoit ſes pertes. De là ils ſe ſont imaginés, que les ſonges étoient quelque choſe qui ſortoit de la regle, & qui étoit due à des cauſes particulieres. Infatués des augures & des préſages, ils ont religieuſement écouté ces interprêtes des ſonges, qui comme autant d'oracles, n'ont trouvé que trop de dupes. D'autres ont cru que les ſens étant aſſoupis, l'eſprit étoit plus dégagé de la matiere, plus pro-

pre

pre à pénétrer l'avenir & à démêler la vérité, que l'ame s'exaltoit & liſoit dans l'avenir.

Philon prétendoit que Dieu inſpiroit les ſonges, & Tertullien en accuſoit les Démons. On a attribué au Prophete Daniel un ouvrage ſur l'interprétation des ſonges; & il y a bien apparence que les hommes ajouteront toujours foi aux regles de cet art futile, qu'on a appellé *Onirologie.* Les exemples que l'on tire de l'Ecriture ſainte ne prouvent pas que cet art ſoit poſſible; il n'y a point d'analogie entre le miraculeux & le naturel.

L'interprétation des ſonges eſt ordinairement fondée ſur deux principes, l'un que l'on peut appeller *induction*, & par lequel on juge que ce qui a ſuivi pluſieurs fois un même ſonge, doit en être la ſuite conſtante: l'autre qu'on peut appeller *analogie*, & par lequel on juge que ce qui reſſemble au ſonge, ou ce qui lui eſt directement oppoſé, eſt préciſément ce qu'il annonce. De très habiles gens ont donné à cet égard dans de grands travers: Hippocrate & Galien ont hazardé les plus frivoles conjectures; parmi cette foule d'erreurs on a été juſqu'à croire, comme Cardan, que les ſonges qui précedent le lever du ſoleil ſe rapportent au paſſé, que ceux qui viennent avec le lever du ſoleil ſe rapportent au préſent, & enfin que ceux qui viennent après ce tems regardent l'avenir: on a cru même que les ſonges ſont des ſignes plus certains l'été que l'hyver, le printems que l'automne; que dans le tems des fêtes mobiles les ſonges ne méritent que peu d'attention, mais qu'ils en méritent beaucoup dans le tems des fêtes fixes. Socrate paroit avoir cru à l'interprétation des ſonges: on ſait qu'aïant entendu en ſonge un vers d'Homere, qui ſignifie (*), *dans trois jours vous arriverez dans la fertile Phthie*, il ſe crut aſſuré de mourir dans trois jours. Ariſtote crut ſagement devoir reſter en ſuſpens, & mépriſa les préjugés populaires; il ne crut pas avoir aſſez de preuves ſolides pour en rejetter juſqu'au moindre fondement. C'eſt à la Philoſophie moderne qu'on doit ſur toutes ces matieres le jour qui y eſt répandu.

(*) Ἤματι κεν τριτάτῳ Φθίην ἐρίβωλον ἱκοίμην. Iliad. l. 363.

SUR

SUR LA MÉTHODE DU CALCUL INTÉGRAL.

PAR M. LAMBERT. (*)

I.

Le Calcul intégral conſidéré dans toute ſon étendue eſt de la Claſſe des Queſtions inverſes. Les Mathématiques nous en offrent pluſieurs eſpeces. Elles different de celles que l'on conſidere comme directes, en ce que la marche qu'il faut prendre dans leur ſolution eſt en quelque façon rétrograde, & que pour rétrograder il n'y a ſouvent d'autres chemins, que ceux qui ſont en même tems directs. C'eſt ainſi p. ex. que de chaque nombre on peut trouver ſon quarré, ſon cube &c. & que de ces dignités on peut revenir au nombre qui les a produites. Mais, comme outre les nombres qui ſont des quarrés, ou des cubes, il y en a une infinité d'autres qui n'en ſont pas, il eſt clair qu'il n'y a point de chemin droit qui y conduiſe, & que celui qu'on veut faire eſt pour ainſi dire raboteux & ſans fin. Il en eſt de même du Calcul intégral. Toute quantité peut être différentiée. Mais, outre les différentielles qui en naiſſent, il y en a une infinité d'autres qui ne communiquent point avec leurs intégrales par quelque chemin droit & battu. Cependant, à cet égard, nous reſtons encore bien plus en arriere qu'à l'égard des puiſſances des nombres & de leurs racines. Et comme, ſuivant toute apparence, c'eſt par le défaut de méthode, il convient de nous y arrêter un moment.

§. 2.

(*) Lu le 15 de Décembre 1768.

§. 2. Il me paroit que, dans la plûpart des découvertes qu'on a faites dans le Calcul intégral, il y avoit un peu de précipitation. Et en effet, il ſemble qu'il n'y ait pas autrement moyen de parvenir à l'infini, qu'en s'y précipitant. C'eſt toujours une eſpece d'abime pour l'eſprit humain. Mais ce n'eſt pas de cette précipitation que je veux parler. Je prends le terme un peu moins au pied de la lettre, parce qu'on ſe précipite auſſi quand on ſe hâte trop. Or, quoique ce ne ſoit pas là la coutume des Géometres, dont tous les pas ſont prémédités & meſurés, il ſemble néanmoins qu'ils ayent oublié d'en agir de même, lorſqu'il s'eſt agi de l'infini. De là vient que les expreſſions ont été plus ou moins inadéquates & choquantes. De là vient auſſi qu'ils n'ont trouvé certaines reſtrictions qu'après coup. Car en effet, ce ne fut qu'après coup qu'on s'aviſa d'ajouter les conſtantes aux intégrales qu'on avoit trouvées. Ce ne fut qu'après coup qu'on chercha la méthode d'en revenir aux différentielles lorſque l'intégrale ne donnoit point de valeur. Enfin, ce ne fut qu'après coup qu'on reprit les ſecondes, troiſiemes &c. différentielles, lorſque les premieres, ſecondes &c. diſparurent du calcul. Tout cela veut dire, qu'on ne ſavoit pas bien ce qu'on avoit trouvé, lorſqu'on trouva le Calcul intégral. Car c'étoient là des mépriſes & des précipitations, qui ne devoient point avoir lieu. On voit aiſément qu'il y eût fallu & plus de méthode & plus de patience. Avec tout cela, on eſt toujours redevable aux grands génies, d'avoir fait les premiers pas. Car, tout précipités qu'ils peuvent avoir été, on les excuſera en ce que la conquête de l'infini ne paroit pouvoir ſe faire que par aſſaut.

§. 3. Les queſtions inverſes ont des méthodes qui leur ſont communes, & qui enſuite ſe déterminent d'avantage, lorſqu'elles s'appliquent à quelque queſtion plus particuliere. Ces méthodes veulent qu'on ſe familiariſe avant toute choſe avec la queſtion directe, qui eſt toujours plus facile. Or les queſtions directes, conſidérées rélativement aux inverſes, ne fourniſſent à celles-ci que des hypotheſes. Mais il convient de claſſifier ces hypotheſes, d'en déduire des ſymptômes & de

de pourſuivre les conſéquences juſqu'à ce qu'on en trouve qui puiſſent être univerſellement converties. Car ce n'eſt qu'alors qu'on trouve le moyen de rétrograder. C'eſt ainſi qu'à l'égard des racines quarrées, on commença à élever un binome à la ſeconde dignité, & par là on vit comment un nombre doit être compoſé pour être nombre quarré, & comment il faut le décompoſer pour en trouver la racine. C'eſt ainſi que, dans la Mécanique, on examina différentes hypotheſes du mouvement accéléré, des forces centrales &c. & les propoſitions convertibles qu'on en déduiſit, comparées aux phénomenes de la Nature, firent trouver les loix de la peſanteur & celles des mouvemens céleſtes.

§. 4. Mais procéda-t-on de la même maniere à l'égard du Calcul intégral? Je dirai que non. On étoit trop impatient de trouver des intégrales; afin d'y parvenir on tâtonna pour trouver des routines, & on ſe précipita quelquefois pour généraliſer des méthodes particulieres, dont on entrevoyoit à peine la poſſibilité. Ce n'eſt qu'un demi-ſiecle après la premiere idée de ce calcul, qu'on trouva incidemment les véritables marques de la ſéparabilité des variables. Mais la façon dont on la découvrit, étoit ſi conforme à la méthode que je viens d'indiquer, qu'on eût pu y parvenir depuis longtems. Car, en différentiant dans l'équation

$$Pdx = Qdy$$

la fonction P ſuivant y, & la fonction Q ſuivant x, de ſorte qu'il ſoit

$$\frac{dP}{dy} = p,$$

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

c'étoit un ſymptôme qu'on trouva, lorſqu'il apparut qu'il étoit généralement

$$p = q,$$

toutes les fois que dans l'équation

$$Pdx = Qdy$$

les variables peuvent être ſéparées. Il eût fallu dès le commencement rechercher ces ſortes de ſymptômes. Mais, au lieu de commencer par bien connoitre les différentielles, on ſe hâta de chercher les intégrales d'une façon quelconque.

§. 5. C'eſt par le défaut de cette méthode qu'on ſe trouve encore preſque tout à fait hors d'état de décider, ſi une différentielle, dont on ne peut pas encore parvenir à trouver l'intégrale, eſt intégrable ou non. De là vient auſſi, que ce n'eſt que peu à peu qu'on s'accoûtuma à regarder une formule comme ſuffiſamment intégrée, lorſqu'on l'avoit réduite à des quantités circulaires ou logarithmiques, ou à des arcs elliptiques; & on s'y accoûtuma, plutôt parce qu'on perdoit toute eſpérance d'aller plus loin, que parce qu'on étoit convaincu par une démonſtration rigide, qu'il falloit en reſter là. Mais n'étoit-ce pas à peu près comme ſi, après avoir trouvé que 4 & 9 ſont les quarrés de 2 & de 3, on reſtoit en doute, ſi les nombres intermédiaires 5, 6, 7, 8 ne pourroient peut-être pas avoir pour racine quelque nombre entier, qui ne fût point encore connu?

§. 6. En conſéquence de la méthode que j'ai rapportée, il eût fallu commencer par claſſifier, non les différentielles, comme on l'a fait, mais les intégrales. Il eût fallu en déduire des ſymptômes; & ce n'eſt que d'après ces ſymptômes, que les différentielles auroient du être claſſifiées, puiſque c'eſt par là qu'elles euſſent été reconnoiſſables. Enſuite la même méthode veut, qu'en claſſifiant les intégrales, on eſſaye du moins de commencer par les claſſes les plus générales. C'eſt d'abord pour avoir moins de claſſes; & enſuite, ſi on peut réuſſir à en trouver des ſymptômes tels qu'il les faut, leur uſage eſt d'autant plus étendu. Or les claſſes les plus générales qu'on puiſſe faire, c'eſt de diviſer les intégrales en algébriques & en tranſcendantes. Les tranſcendantes pourront enſuite être ſubdiviſées en circulaires, logarithmiques, arcs elliptiques &c. & il en reſtera toujours de plus compliquées.

§. 7. Conſidérons d'abord les intégrales algébriques. Le théoreme de la ſéparation des variables, que je viens de citer, fait que nous

nous pourrons nous borner à une ſeule variable, de ſorte qu'il ſuffit de conſidérer une fonction algébrique quelconque de x. Et d'abord, il eſt clair que ſa différentielle, quelle qu'elle ſoit, eſt néceſſairement intégrable, & qu'il n'y a que ces ſortes de différentielles qui le ſoient. Mais pourra-t-on toujours les reconnoitre? Il eſt clair qu'il faut d'abord commencer à en chercher les ſymptômes. Et ſi elles peuvent ſe reconnoitre, peut-on trouver la méthode pour les intégrer? C'eſt ce que ces mêmes ſymptômes doivent faire voir.

§. 8. Claſſifions pour cet effet les fonctions algébriques d'une quantité variable. Elles ſeront

1°. ou *ſimplement rationelles*, & alors leur différentielle l'eſt auſſi.

2°. ou une *fraction rationelle*, & alors leur différentielle le ſera auſſi. Son diviſeur ſera le *quarré* du diviſeur de l'intégrale, à moins que par la réduction il n'en ait diſparu quelque partie.

3°. ou une *quantité radicale*, & alors leur différentielle ſera affectée de la même quantité radicale, multipliée ou diviſée par quelque facteur rationel. Car il eſt en général

$$\mathrm{d}\,(x^{m:n}) = \frac{m}{n}\, x^{m:n}\, x^{-1}\, \mathrm{d}x.$$

4°. ou pluſieurs quantités radicales, additionées ou ſouſtraites, & alors il y aura autant de différentielles ſéparables, de la même forme.

5°. ou des quantités radicales qui ſe multiplient ou ſe diviſent, & alors il y aura autant de différentielles ſéparées qu'il y a de facteurs, & chaque différentielle ſera affectée de toutes ces quantités radicales & de facteurs rationels. Car il eſt

$$\mathrm{d}\,(x^{m:n}.X^{\mu:\nu}) = \frac{\mu}{\nu}\, x^{m:n} X^{\mu:\nu}.X^{-1}\,\mathrm{d}X$$

$$+ \frac{m}{n}\,.\,X^{\mu:\nu}\,.\,x^{m:n}\,.\,x^{-1}\,\mathrm{d}x.$$

Du reſte j'entens que les facteurs ſoient des facteurs différens.

6°. ou des ſommes de ces ſortes de quantités, & alors il y aura autant de différentielles ſéparables, comme N°. 4.

7°. ou une quantité radicale, multipliée par une quantité rationelle, & encore en ce cas la différentielle toute entiere ſera affectée de la quantité radicale. Car il eſt

$$d(P.Q^{m:n}) = Q^{m:n}\left(dP + \frac{m}{n} P.Q^{-1} dQ\right).$$

8°. ou des ſommes de ces ſortes de quantités, comme auſſi des précédentes, & encore alors il y aura des différentielles ſéparables.

9°. ou des fractions de ces ſortes de ſommes, & encore alors le diviſeur de la différentielle ſera le quarré de celui de la fraction intégrale &c.

§. 9. Voilà donc l'énumération des différentes fonctions algébriques, avec quelques ſymptômes de leurs différentielles. Ces ſymptômes ſuffiſent déjà pour exclure un grand nombre de différentielles, dont les intégrales ne ſont point algébriques. Mais, comme je n'ai indiqué ces ſymptômes que fort briévement, il convient d'éclaircir ce que j'en ai dit, par l'uſage qu'on peut en faire. Je rapporterai donc d'abord un théoreme très connu, qui eſt, *qu'une différentielle, dont l'intégrale eſt algébrique, étant donnée, on peut y ajoûter ou en ſouſtraire autant d'autres différentielles intégrables que l'on voudra, & la ſomme ou le réſidu ſera encore algébriquement intégrable;* & réciproquement, *cette ſomme ou ce réſidu ne le ſera pas, dès que la différentielle propoſée ne l'eſt point;* & enfin, *cette différentielle ne le ſera point, dès que la ſomme ou le réſidu ne le ſera pas.* Ces théoremes ſont connus. Il y a longtems qu'on en a fait uſage, ſoit pour ſimplifier les formules, ſoit pour les réduire à d'autres, dont la forme étoit ou connue ou plus traitable.

§. 10.

§. 10. Je ne m'arrêterai pas non plus aux fonctions qui ſont ſimplement rationelles, ni à celles où il n'y a que des dignités ſimples, ou binomiales, ou enfin polynomiales de x, & où tous les termes ſont rationels. Mais il convient d'éclaircir ce qui regarde les fractions rationelles. Car ici j'entens qu'elles ne ſoient pas ſimplement quelque dignité d'un polynome rationel, puiſqu'alors il eſt très poſſible que le diviſeur de la différentielle ne ſoit point quarré. Du reſte, outre que ces ſortes de différentielles ſont très connoiſſables, il eſt facile de faire en ſorte que le diviſeur devienne un quarré, puiſqu'encore qu'on ne pût pas le réſoudre en ſes facteurs, pour voir leſquels ne ſont point des quarrés, il n'y auroit qu'à multiplier par le dénominateur auſſi bien le numérateur que le dénominateur de la fraction différentielle propoſée. Voici maintenant le procédé pour trouver l'intégrale toutes les fois qu'elle eſt algébrique.

§. 11. D'abord, on démontre aiſément, que s'il y en a une, elle doit être une fraction rationelle. Car ſuppoſons qu'il y entre quelque quantité radicale ou irrationelle, il ſuit de N°. 3. §. 8. que cette quantité entre auſſi dans la différentielle; ce qui ſeroit contre l'hypotheſe, puiſque nous la ſuppoſons rationelle. Donc &c.

§. 12. Soit donc une fraction rationelle

$$dy = \frac{P}{QQ} \cdot dx,$$

où je mets QQ pour le dénominateur, parce qu'il doit être un quarré rationel (§. 10.). Que l'on faſſe

$$y = \frac{z}{Q} + \text{conſt.}$$

on aura

$$dy = \frac{Qdz - zdQ}{QQ},$$

donc il ſera

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

équa-

équation, qui doit être rationelle, toutes les fois que la fraction propoſée eſt algébriquement intégrable. Car Pdx, Q & dQ ſont rationelles, parce qu'elles ſont ſuppoſées telles. Si donc il entroit dans la valeur de z quelque quantité radicale, elle entreroit auſſi dans dz (§. 8.). Donc il y auroit une fonction de x affectée de quantités radicales, égale à une fonction de x rationelle. Ce qui étant abſurde, il s'enſuit &c. On n'aura donc, dans chaque cas particulier, qu'à prendre de la ſérie

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{&c.}$$

autant de termes qu'il faut pour ramener l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

aux mêmes expoſans, & en faiſant $= 0$ les coëfficiens de tous les termes, on définira les coëfficiens A, B, C &c. Obſervons qu'il y aura toujours plus de termes à faire $= 0$, qu'il n'y a de coëfficiens A, B, C &c. à déterminer. Mais néanmoins ces coëfficiens doivent ſatisfaire à toutes les conditions, ſans quoi la différentielle n'auroit point d'intégrale algébrique. Enſuite, il ſe peut que quelque coëfficient obtienne une valeur arbitraire, mais qui donnera toujours la conſtante, qu'il faut enſuite ajoûter, comme il faut l'ajoûter quand même tous les coëfficiens ſont déterminés. Ce dernier enoncé eſt clair de ſoi-même. Quant au premier, on voit bien qu'il faut dans l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

multiplier une ſérie finie

$$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{- - - - } \mu x^m,$$

par une ſérie finie

$$dz = + (B + 2Cx + \text{- - - } nNx^{n-1})\,dx,$$

& encore

$$dQ = \beta x + 2\gamma x + \text{- - - } \mu m x^{m-1})\,dx,$$

par

$$z = A + Bx + Cx^2 + \text{&c. - - - } + Nx^n,$$

&

& qu'il n'y a que les coëfficiens A, B, C &c. qui ſoient à déterminer. Il y en a donc toujours moins, qu'il n'y a de termes à faire = o. Donnons, pour mieux éclaircir cela, quelques exemples.

I. Exemple.

§. 13. Soit propoſée la fraction rationelle

$$dy = \frac{4 + 16x - 3xx}{(4 + 3xx)^2} \cdot dx;$$

il s'agit de voir ſi ſon intégrale eſt algébrique, & en ce cas, quelle elle eſt? Comme ici le diviſeur eſt déjà un quarré, on le poſera = QQ, ce qui donne

$$Q = 4 + 3xx:$$

on fera donc

$$y = \frac{z}{4 + 3xx} + \text{Conſt.}$$

ce qui donne

$$dy = \frac{(4 + 3xx)dz - 6zxdx}{(4 + 3xx)^2}.$$

On n'aura donc qu'à comparer les numérateurs, pour avoir l'équation

$$(4 + 16x - 3xx)\,dx = (4 + 3xx)\,dz - 6zxdx,$$

qui doit être rationelle. Or on voit que, pour ramener le ſecond membre de cette équation à la plus grande dimenſion de x dans le premier membre, il ſuffira de faire

$$z = A + Bx,$$

ce qui donne

$$dz = Bdx.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, & en arrangeant tout ſuivant les dimenſions de x, on obtient, en diviſant par dx,

$$o = -4 - 16x + 3xx + 4B - 6Ax - 3Bxx.$$

Or, posant = o chaque terme de cette équation, on voit que le second donne

$$A = -\tfrac{8}{3},$$

le premier

$$B = 1.$$

Et comme cette valeur satisfait encore au troisieme terme, il s'ensuit que la différentielle proposée est algébriquement intégrable, & qu'il est

$$z = -\tfrac{8}{3} + x,$$

& partant

$$y = (x - \tfrac{8}{3}) : (4 + 3xx) + \text{Const.}$$

II. Exemple.

§. 14. Soit proposée la fraction rationelle

$$dy = \frac{15 - 3x^2 - 2x^4}{(5 + 2xx)^3} \cdot dx;$$

il faut voir si elle a une intégrale algébrique, & en ce cas quelle elle est? Comme ici le diviseur est un cube, on pourroit en faire un biquarré. Mais on peut s'en passer, parce que la théorie de la différentiation des puissances nous indique qu'il suffit de faire

$$y = \frac{z}{(5 + 2xx)^2},$$

afin d'avoir

$$dy = \frac{(5 + 2xx)\,dz - 8zx\,dx}{(5 + 2xx)^2}.$$

Et de là, en comparant les numérateurs, on a

$$15 + 9x^2 + 2x^4 = (5 + 2xx)\,dz - 8zx\,dx.$$

Or, pour ramener le second membre de cette équation à la plus haute puissance de z dans le premier membre, on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx.$$

Ces

Ces valeurs étant ſubſtituées, & toute réduction faite, on a

$$0 = -15 + 10Cx + 3x^2 \quad \bullet \quad + 2x^4$$
$$+ 5B - 8Ax + 15Dx^2 - 4C - 2Dx^4$$
$$- 6Bx^2.$$

Or, égalant tous les termes à 0, le premier membre donne

$$B = 3,$$

le dernier $D = 1.$

Et ces deux valeurs ſatisfont encore au troiſieme membre.

Enfin le quatrieme membre donne

$$C = 0,$$

ce qui dans le ſecond membre rend encore

$$A = 0.$$

Nous avons donc $z = 3x + x^3,$

& partant $y = \frac{3x + x^3}{(5 + 3xx)^2} + \text{Conſt.}$

III. Exemple.

§. 15. Traitons encore de la même façon la différentielle

$$dy = \frac{dx}{1 + xx}.$$

Ici il faut commencer à changer le diviſeur en ſorte qu'il ſoit un quarré, ce qui donne $dy = \frac{(1 + xx)\,dx}{(1 + xx)^2}.$

Poſant donc $y = \frac{z}{1 + xx},$

il ſera $dy = \frac{(1 + xx)\,dz - 2zx\,dx}{(1 + xx)^2}.$

Donc, en comparant les numérateurs, il ſera

$$(1 + xx)\,dx = (1 + xx)\,dz - 2zx\,dx.$$

Faiſant donc $z = A + Bx$

$$dz = B\,dx,$$

il ſera $0 = -1 + \ast - xx + B - 2Ax - Bxx.$

Et en faiſant chaque terme égal à zéro, le ſecond donne

$$A = 0,$$

le premier $B = 1.$

Mais cette valeur ne ſatisfaiſant pas au troiſieme terme, qui donne

$$B = -1,$$

il s'enſuit que la différentielle propoſée n'a point d'intégrale algébrique.

§. 16. Pour ces ſortes de cas, on pourra toujours trouver la valeur de y par une ſuite infinie, en poſant généralement

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

Et de cette maniere on obtiendra pour le cas préſent

$$A = C$$
$$B = 1,\ D = \tfrac{2}{3},\ F = -\tfrac{2}{15},\ H = +\tfrac{2}{315}\ \&c.$$
$$E = G = I = \&c. = 0,$$

ce qui donne

$$z = A(1 + xx) + x + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{2}{315}x^7 + \&c.$$

& partant

$$y = A + \frac{x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{315}x^7 + \&c.}{1 + xx},$$

ce qui par la diviſion actuelle donne

$$y = A + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \&c.$$

la ſuite Leibnitienne, qui exprime l'arc par la tangente.

§. 17.

§. 17. Mais, ſi on vouloit traiter ſur le même pied l'exemple premier, on trouveroit

$$B = 1,$$
$$C = 2 + \tfrac{3}{4}A,$$
$$D = E = F \text{ &c.} = 0,$$

& partant $y = \frac{1}{4}A + \frac{x + 2xx}{4 + 3xx} + \text{conſt.}$

Formule finie, & qui revient à celle que nous avons trouvée.

§. 18. Ces exemples ſuffiſent pour faire voir, que les différentielles, dont l'intégrale eſt une fraction rationelle, n'ont aucune difficulté. On peut toujours & les reconnoitre & les trouver. J'ajoute que, lorſque de ſemblables différentielles ont des coëfficiens indéterminés, cette même méthode indiquera les conditions de leur intégrabilité. Mais paſſons aux différentielles qui ſont affectées de quantités radicales. Je me bornerai d'abord à conſidérer celles de la troiſieme claſſe du §. 8, c'eſt à dire, celles où il n'entre qu'une ſeule quantité radicale, mais affectée de quantités rationelles d'une façon quelconque, puiſque ſans cela elle pourroit être traitée comme on traite généralement les puiſſances.

§. 19. Or j'ai déjà obſervé, qu'une ſemblable quantité radicale affecte encore l'intégrale, quoiqu'elle y ait un autre facteur rationel. Soit en général

$$y = P \cdot Q^{m:n},$$

où P, Q ſont des fonctions rationelles de x, & nommément Q une fonction telle, qu'on n'en puiſſe point extraire la racine n moyennant une formule finie. Nous aurons donc

$$dy = Q^{m:n} \cdot dP + \frac{m}{n} P \cdot Q^{m:n} \cdot Q^{-1} dQ.$$
$$= Q^{m:n} \left(\frac{Q dP + \frac{m}{n} P dQ}{Q} \right).$$

Poſant donc $$dy = Q^{m:n-1} \cdot dp,$$

on voit, que la quantité radicale peut être levée quand on augmente l'expoſant d'une unité & qu'on fait

$$y = Q^m z.$$

Et comme enſuite il ne reſte plus que des quantités rationelles, on procédera de la même façon que j'ai fait voir par rapport aux fractions rationelles. Voici quelques exemples, pour éclaircir cette méthode.

IV. Exemple.

§. 20. Soit propoſée la différentielle

$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}};$$

il s'agit de voir ſi ſon intégrale eſt algébrique, & en ce cas quelle elle eſt? Pour cet effet on voit que l'expoſant de la quantité radicale étant $-3:2$, il devient $-1:2$ lorſqu'on l'augmente d'une unité, comme il faut le faire (§. 19.). Poſant donc

$$y = \frac{z}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

on aura $$dy = \frac{dz\,(1 + xx) - zx\,dx}{(1 + xx)^{3:2}}.$$

Donc, en comparant les numérateurs, il eſt

$$dx = (1 + xx)\,dz - zx\,dx;$$

ce qui fait voir qu'il ſuffit de poſer

$$z = A + Bx$$
$$dz = B\,dx,$$

afin d'avoir $$0 = -1 + B + Bxx - Ax - Bxx,$$

ou

ou bien $$0 = -1 - Ax + B,$$

ce qui donne $$A = 0$$ $$B = 1,$$

& partant $$z = x$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{Conſt.}$$

§. 21. Si dans cet exemple on poſe pour z la ſuite

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

on trouve en procédant de la même maniere

$$z = A + x + \tfrac{1}{2}Ax^2 - \tfrac{1}{8}Ax^4 + \tfrac{1}{16}Ax^6 - \tfrac{5}{128}Ax^8 + \&c.$$

c'eſt à dire $$z = x + A\sqrt{(1+xx)},$$

& partant $$y = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + A = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$$

V. Exemple.

§. 22. Soit propoſée la différentielle

$$dy = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4 + 2x(1+xx)^{3:2}}{(1+xx)^{3:2}} \cdot dx.$$

Ici on voit d'abord qu'en diviſant, cette formule ſe change en

$$dy = dx \cdot \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1+xx)^{3:2}} + 2x\,dx.$$

Or, la ſeconde partie étant intégrable par elle-même, on n'a qu'à examiner ſimplement la premiere (§. 9.). Faiſant donc

$$d\eta = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1+xx)^{3:2}} \cdot dx,$$

on

on posera (§. 19.) $\eta = \frac{z}{\sqrt{(1+xx)}}$,

ce qui donne $d\eta = \frac{(1+xx)\,dz - zx\,dx}{(1+xx)^{3:2}}$.

Et en égalant les numérateurs, on aura

$$(1 - x + 3x^2 + 2x^4)\,dx = (1+xx)\,dz - zx\,dx,$$

d'où on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx,$$

ce qui donne

$$0 = -1 + x - 3x^2 + \quad * \quad - 2x^4$$
$$+ Bx^2 + 2Cx^3 + 3Dx^4$$
$$+ B + 2Cx + 3Dx^2$$
$$- Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4,$$

& en posant chaque terme $= 0$,

le premier donne $B = 1$
le dernier $D = 1$.

Et ces valeurs conviennent aussi au troisieme terme. Le quatrieme donne $C = 0$,

ce qui dans le second donne $A = 1$,

& partant $z = 1 + x + x^3$

$$\eta = \frac{1+x+x^3}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x\sqrt{(1+xx)},$$

& enfin

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x^2 + x\sqrt{(1+xx)} + \text{Const.}$$

VI. Exemple.

§. 23. Soit propoſé

$$dy = (3ax^3 + 4x^4)\sqrt{(ax + xx)}\,.\,dx.$$

Ici on voit aiſément que cette formule revient à

$$dy = (3ax^2 + 4x^3)\,dx\sqrt{(ax^3 + x^4)},$$

ce qui veut dire à

$$dy = \tfrac{2}{3}d(ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \tfrac{2}{3}(ax + x^4)^{\frac{3}{2}} + \text{Conſt.}$$

Mais retenons-la telle que je l'ai propoſée

$$dy = (3ax^3 + x^4)\,dx\sqrt{(ax + xx)};$$

& comme l'expoſant du radical, qui eſt $= \frac{1}{2}$, devient $= + \frac{3}{2}$ lorſqu'on l'augmente d'une unité (§. 19.), on fera

$$y = z(ax + xx)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui donne

$$dy = dz\,(ax + xx)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}z\,(a + 2x)\sqrt{(ax + xx)}\,dx,$$

ou bien

$$dy = \sqrt{(ax + xx)}\,.\,[dz\,(ax + xx) + \tfrac{3}{2}(a + 2x)\,zdx].$$

Comme donc l'une & l'autre valeur de dy peut être diviſée par la quantité radicale, on voit qu'il ſera

$$(3ax^3 + x^4)\,dx = (ax + xx)\,dz + \tfrac{3}{2}(a + 2x)\,zdx,$$

& qu'en poſant $z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx,$$

il ſera, en ſubſtituant ces valeurs,

$$\begin{aligned} 0 = {} & * \quad * \quad * - 3ax^3 - 4x^4 \\ & + aBx + 2aCx^2 + 3aDx^3 \\ & + Bx^2 + 2Cx^3 + 3Dx^4 \\ & + \tfrac{3}{2}Aa + \tfrac{3}{2}Bax + \tfrac{3}{2}Cax^2 + \tfrac{3}{2}Dax^3 \\ & + 3Ax + 3Bx^2 + 3Cx^3 + 3Dx^4. \end{aligned}$$

Egalant donc chaque terme à zéro, on obtient des trois premiers termes

$$A = B = C = 0,$$

du dernier

$$D = \tfrac{2}{3}.$$

Et comme ces valeurs ſatisfont encore au quatrieme terme, la formule ſe trouve être intégrable, & il eſt

$$z = \tfrac{2}{3}x^3$$

$$y = \tfrac{2}{3}x^3\,(ax + xx)^{3:2} + \text{Conſt.}$$

VII. Exemple.

§. 24. Soit propoſé

$$dy = \frac{a^2 + b^2 + 2x^2}{\sqrt{(a^2 + x)^2}\,.\,\sqrt{(b^2 + x^2)}}x\,dx.$$

Quoique dans cette formule il y ait deux quantités radicales, il eſt clair néanmoins qu'elles peuvent être conſidérées comme une ſeule; car pour cet effet il n'y auroit qu'à multiplier l'une par l'autre. On voit auſſi que la formule auroit pu être propoſée de la façon ſuivante:

$$dy = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}\,.\,x\,dx + \frac{\sqrt{(b^2 + x^2)}}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}\,.\,x\,dx;$$

car celle-ci ſe réduit à la précédente, dès qu'on la réduit à un même dénominateur. Or ici les expoſans des radicaux ſont $= -\frac{1}{2}$, & en les augmentant d'une unité (§. 19.) ils ſe changent en $+\frac{1}{2}$, de ſorte qu'en faiſant

$$y = z\,.\,\sqrt{(a^2 + x^2)}\,.\,\sqrt{(b^2 + y^2)},$$

& en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$z = 1$$

$$y = \sqrt{(a^2 + x^2)}\,.\,\sqrt{(b^2 + x^2)}.$$

VIII. Exemple.

§. 25. Il en ſera de même de la formule

$$dy = \frac{(a^2 + b^2 + 2x^2)\, x\, dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \cdot (b^2 + x^2)^{3/2}};$$

car encore ici les radicaux ſe multiplient, & le reſte eſt rationel, de ſorte qu'en faiſant (§. 19.)

$$y = \frac{z\sqrt{(a^2 + x^2)}}{\sqrt{(b^2 + x^2)}},$$

on trouve $z = 1$.

IX. Exemple.

§. 26. Soit propoſé

$$dy = 2acx\,dx + \frac{ae^2 + 2ax^2}{\sqrt{(e^2 + x^2)}} \cdot dx + \frac{cb^2 + 2cx^2}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}\, dx + \frac{e^2 + b^2 + 2x^2}{\sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot (b^2 + x^2)} \cdot x\,dx.$$

Ici on voit d'abord que le premier terme eſt intégrable de ſoi-même; ainſi on pourra en faire abſtraction (§. 9.). Dans le quatrieme terme il y a deux radicaux avec l'expoſant $-\frac{1}{2}$, qui ſe multiplient; il faut donc qu'ils ſe multiplient encore dans l'intégrale, mais avec l'expoſant $+\frac{1}{2}$ (§. 19.). Mais comme une ſemblable intégrale, telle que ſeroit

$$\eta = z \cdot \sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)},$$

donne la différentielle

$$d\eta = \frac{(e^2b^2 + e^2x^2 + b^2x^2 + x^4)\, dz + z\,(e^2 + b^2 + 2x^2)\, x\, dx}{\sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)}},$$

on voit qu'elle ne peut être comparée qu'au quatrieme terme. Car encore qu'on voulût réduire le ſecond & le troiſieme terme au même dénominateur, ce qui dans cet exemple ſeroit faiſable, le numérateur ſeroit

$$(ae^2 + 2ax^2)\sqrt{(b^2 + x^2)} + (cb^2 + 2cx^2)\sqrt{(e^2 + x^2)},$$

affecté d'une double irrationalité, & par conſéquent incommenſurable avec la différentielle $d\eta$. J'en conclus que, ſi la formule propoſée eſt

algébrique, chaque terme doit être ſéparément intégrable. Auſſi, en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$y = acx^2 + ax\sqrt{(e^2 + x^2)} + cx\sqrt{(b^2 + x^2)} + \sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)} + \text{Conſt.}$$

ou bien

$$y = (ax + \sqrt{(b^2 + x^2)}) \cdot (cx + \sqrt{(e^2 + x^2)}) + \text{Conſt.}$$

X. Exemple.

§. 27. Soit propoſé

$$dy = \frac{(3a + 5xx)\,dx}{(a + xx)^{1:3}}.$$

Comme ici l'expoſant de la quantité radicale eſt $-\frac{2}{3}$, en l'augmentant d'une unité il ſe change en $+\frac{1}{3}$. Faiſant donc

$$y = z\,(a + xx)^{1:3}$$

$$dy = \frac{dz \cdot (a + xx) + \frac{2}{3}zx\,dx}{(a + xx)^{2:3}},$$

on aura, en comparant les numérateurs,

$$(3a + 5xx)\,dx = (a + xx)\,dz + \tfrac{2}{3}zx\,dx,$$

& en faiſant $z = A + Bx$

$$dz = B\,dx,$$

on obtiendra $0 = -3a - 5xx + Ba + Bxx + \frac{2}{3}Ax + \frac{2}{3}Bxx.$

Faiſant donc chaque terme $= 0$, il ſera

$$A = 0.$$

Et le premier terme donne $B = 3$, valeur qui ſatisfait encore au troiſieme. Il ſera donc $z = 3x$

$$y = 3x\,(a + xx)^{1:3}$$

§. 28.

§. 28. Ces exemples peuvent ſuffire pour faire voir, comment il faudra s'y prendre dans une infinité d'autres cas. On voit que cette méthode ſert tout à la fois, & à examiner ſi une différentielle eſt algébriquement intégrable, & à en trouver l'intégrale. On voit auſſi que cette méthode s'étend indifféremment à tous les cas où la différentielle eſt une ou pluſieurs fractions rationelles, & qu'elle y eſt applicable ſans qu'on ait beſoin de décompoſer les numérateurs en leurs facteurs ſimples, comme on eſt plus ou moins obligé de le faire, lorſque l'intégrale n'eſt point algébrique. Mais, quant aux cas où une différentielle propoſée eſt affectée de quantités irrationelles, on conçoit aiſément que ces ſortes de quantités peuvent être extrêmement compliquées & prolixes, quoique ſans contredit l'intégrale doive pouvoir être trouvée toutes les fois qu'elle eſt algébrique. Et la différentielle dans tous ces cas ſera toujours compoſée d'une façon qui ne convient qu'aux différentielles algébriquement intégrables. Ajoutons encore qu'il y a fort ſouvent moyen d'affranchir ces ſortes de formules de l'irrationalité des quantités radicales, ou du moins de les rendre beaucoup moins compliquées. Comme c'eſt à l'Algebre à trouver ces ſortes de moyens, on peut les préſuppoſer dans le calcul intégral. Je me bornerai donc ici à quelque exemple.

XI. Exemple.

§. 29. Soit propoſé

$$dy = \frac{a\,dx\,\sqrt{(c^2 + x^2)} + b\,x\,dx}{\sqrt{[(c^2 + x^2)\,(ax + b\sqrt{(c^2 + x^2)})]}}.$$

Comme ici la quantité radicale $\sqrt{(c^2 + x^2)}$ entre dans le radical qui conſtitue le dénominateur, on pourra commencer à la faire diſparoître, ce qui arrivera en poſant

$$x = \frac{v^4 - c^2}{2vv}$$

$$dx = \frac{v^4 + c^2}{v^3} \cdot dv$$

$$\sqrt{(c^2 + x^2)} = \frac{v^4 + c^2}{2vv}$$

$$x\,dx = \frac{v^8 - c^4}{2v^5} \cdot dx.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, & toute réduction faite, on aura

$$dy = \frac{a(v^4 + c^2) + b(v^4 - c^2)}{\sqrt{\left[v^8 \cdot \frac{a+b}{2} + c^2v^4 \cdot \frac{a-b}{2}\right]}} \cdot dv.$$

Voilà donc la formule ſimplifiée au point, qu'il n'y a plus qu'une ſeule quantité radicale. Poſons donc (§. 19.)

$$y = z\sqrt{\left[\frac{a+b}{2} \cdot v^8 - \frac{a-b}{2} \cdot c^2v^4\right]},$$

& il ſera

$$dy = \frac{dz \cdot \left[\frac{a+b}{2} \cdot v^8 - \frac{a-b}{2} \cdot v^4c^2\right] + 2z(a+b)v^7dv - (a-b)c^2v^3dv \cdot z}{\sqrt{\left[\frac{a+b}{2} \cdot v^8 - \frac{a-b}{2} \cdot v^4c^2\right]}}.$$

Donc, en comparant les numérateurs,

$$v^4(a+b)dv + c^2(a-b)dv = dz\left[\frac{a+b}{2} \cdot v^8 - \frac{a-b}{2} \cdot v^4c^2\right] + 2z(a+b)v^7dv - z(a-b)c^2v^3dv.$$

Or on voit qu'ici il faut rabaiſſer les expoſans du ſecond membre de cette équation, pour les ramener aux mêmes dimenſions que ceux du premier membre, ce qui ſe fera en poſant

$$z = \frac{m}{x^3}$$

$$dz = \frac{-3m\,dx}{x^4}.$$

Car

Car ce ſeul terme ſuffit, puiſqu'il n'y aura que deux comparaiſons à faire. Subſtituant donc ces valeurs, on aura l'équation

$$0 = -c^2(a-b) - (a+b)v^4 + 3mc^2\frac{(a-b)}{2} - 3m\frac{(a+b)}{2}v^4 - mc^2(a-b) + 2m(a+b)v^4.$$

Or, en faiſant chaque terme $= 0$, le premier donne

$$m = 2.$$

Et cette valeur ſatisfait encore au ſecond terme, & partant l'intégrale eſt algébrique. Nous aurons donc

$$z = \frac{2}{v^3}$$

$$y = \frac{2}{v^3}\int\left[\frac{a+b}{2}v^2 - \frac{a-b}{2}v^4c^2\right] + \text{Conſt.}$$

ou bien

$$y = 2\int\left[a.\frac{v^4-c^2}{2vv} + b.\frac{v^4+c^2}{2vv}\right] + \text{Conſt.}$$

ce qui, en ſubſtituant les valeurs répondantes, donne

$$y = 2\int[ax + b\int(c^2+x^2)] + \text{Conſt.}$$

§. 30. Quant aux différentielles, dont l'intégrale n'eſt point algébrique, il eſt clair qu'elles ne ſe trouvent pas par la ſimple différentiation. Et à cet égard on ne ſauroit en trouver des ſymptômes, qui non ſeulement les rendent connoiſſables, mais qui en indiquent les intégrales. C'eſt ſurtout de ce dernier point dont il s'agit ici. Car on vient de voir qu'en les traitant ſuivant la méthode que je viens de propoſer, on reconnoitra toujours qu'elles ſont tranſcendantes, puiſqu'en ce cas les coëfficiens A, B, C &c. de la ſuite

$$z = A + Bx + Cx^2 + \text{&c.}$$

ne ſatisfont point à toutes les conditions. Or, comme ces ſortes de différentielles peuvent toujours être rapportées à la quadrature ou à la rectification de quelque ligne courbe, c'eſt auſſi de là qu'elles tirent leur origine. Du reſte, on peut en trouver ſans penſer à quelque ligne courbe, ſoit qu'on en compoſe à ſa fantaiſie, ſoit qu'elles ſe préſentent dans quelque recherche analytique ou phyſique. La procédure qu'on a tenue à cet égard, me paroit telle qu'elle doit être. Entre ces différentielles on en a choiſi ſurtout deux eſpeces, qui ſont des plus ſimples, & pour leſquelles on a des tables calculées. On comprend que je parle des fonctions circulaires & logarithmiques. C'eſt à ces deux eſpeces qu'on tâche de réduire toutes celles qui en dépendent. Mais, comme il y en a bien d'autres, il faudroit avoir plus de tables. Or ces ſortes de tables ne ſont pas fort commodes, quand elles doivent être faites à double entrée, comme le ſeroient p. ex. celles qu'on pourroit en tout cas conſtruire pour les arcs elliptiques, auxquels une infinité de formules différentielles peuvent être réduites. Les tables à ſimple entrée ſuppoſent des formules, qui ne varient que d'une façon proportionelle, lorſqu'on varie les coëfficiens, comme p. ex. la formule

$$a\,dy = dx : \sqrt{(b^4 + x^4)},$$

qui ſe réduit à $c\,dy = dx : \sqrt{(1 + x^4)}$.

Mais ces ſortes de formules ne ſont pas d'un uſage fréquent, puiſque la plus grande partie des quantités radicales dérive de l'uſage du théoreme de Pythagore, & les formules les plus ſimples qui en dérivent, ſont déjà redigées en tables. Celles qui les ſuivent ſont de la forme

$$dy \sqrt{\left(\frac{y^2 + a^2}{y^2 + b^2}\right)},$$

qui, eu égard au changement des ſignes, comprend 16 eſpeces, dont il y en a 7 d'une forme imaginaire, & 4 qui reviennent immédiatement à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole. Et comme on peut regarder y comme une fonction quelconque d'une autre variable, il eſt clair qu'il y a une infinité d'autres formules différentielles qui en dépendent.

§. 31.

§. 31. Comme donc, à l'égard de ces formules, tout ce qu'on peut d'abord faire revient à réduire celles qui ſont plus compliquées à celles qui le ſont le moins qu'il eſt poſſible, il eſt clair qu'il faudroit avoir une eſpece de liſte de celles qui ſont les plus ſimples, & qui ne dépendent pas les unes des autres. Enſuite, en en dérivant d'autres plus compliquées, il faudroit avoir égard aux ſymptômes qui s'y préſentent, & qui rendent connoiſſables & la réductibilité & la méthode pour la réduction. Mais, comme c'eſt là un travail infini, on voit bien qu'on peut ſe borner du moins à ces formules qui ſont d'un uſage plus fréquent. Et c'eſt auſſi ce qu'on a fait, du moins en partie, à l'égard des fonctions circulaires, logarithmiques & elliptiques, quoique la façon de procéder n'ait pas toujours été fort méthodique. Dans des cas particuliers, on s'eſt mis auſſi à examiner des intégrales qui promettoient des différentielles, ſinon identiques, du moins analogues à celles dont on vouloit avoir l'intégrale.

§. 32. Les différentielles dont les intégrales ſont tranſcendantes, c'eſt à dire, non algébriques, peuvent être diſtribuées en quelques claſſes générales.

1°. Il y en a où la variable elle-même eſt tranſcendante, mais qui du reſte ſont algébriquement intégrables. Telle eſt p. ex. la formule $dy = 2 \log x . d(\log x)$,

dont l'intégrale eſt

$$y = (\log x)^2 + \text{Conſt.}$$

Il eſt clair que ces ſortes de différentielles ſe traitent comme celles qui ſont algébriques.

2°. Il y en a qui ne renferment que la quantité tranſcendante, avec ſa différentielle exprimée par la variable à l'egard de laquelle la quantité eſt tranſcendante. Car il eſt clair que ce qu'on nomme tranſcendant, ne l'eſt que rélativement à une autre quantité qu'on a en vue dans le calcul qu'on fait. Telles ſont p. ex. les différentielles

$$dy = 2 . \log x . \frac{dx}{x}$$

$$dy = \frac{dz \sqrt{(1 + zz)}}{a + \int dz \sqrt{(1 + zz)}}.$$

Encore ces formules peuvent être traitées comme celles qui ſont algébriques. Mais, dans celles de la premiere eſpece, on ſuppoſe qu'on ſache que $dx : x$ eſt la différentielle de $\log x$, ou qu'on puiſſe faire $\log x = \int dx : x$. On voit qu'il en eſt de même à l'égard de tous les cas où la quantité tranſcendante a un nom particulier.

3°. Il y en a où la différentielle de la quantité tranſcendante eſt affectée d'une fonction qu'on conſidere comme non tranſcendante; & dans ces cas il arrive ſouvent que l'intégrale n'eſt pas non plus tranſcendante. Telle eſt p. ex. la formule

$$\text{cof } \omega . d\omega,$$

où le $\text{cof } \omega$ eſt regardé comme non tranſcendant. Or on ſait que l'intégrale en eſt

$$\int \text{cof } \omega . d\omega = \text{ſin } \omega + \text{conſt.}$$

& que par conſéquent elle n'eſt pas tranſcendante.

4°. Il y en a où la quantité tranſcendante n'entre point elle-même; et ce ſont préciſément les formules qui, du premier abord, paroiſſent être algébriques. C'eſt ainſi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}}$$

eſt algébrique, tandis que la différentielle

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

quoique plus ſimple, ne l'eſt pas. Ces ſortes de différentielles veu-

veulent être ſubdiviſées. Car il y en a dont l'intégrale eſt une quantité tranſcendante ſimplement telle, comme p. ex.

$$dv = \frac{dt}{1 + tt}$$

eſt ſimplement un arc de cercle.

5°. Il y en a d'autres où l'intégrale eſt pareillement une quantité tranſcendante mais affectée de quantités non tranſcendantes. Telle eſt p. ex. la formule

$$dz = \frac{dx + x\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

dont l'intégrale eſt

$$z = \text{Arc. ſin } x - \sqrt{(1 - xx)} + \text{conſt.}$$

Obſervons que c'eſt par l'addition ou la ſouſtraction que ces ſortes de quantités doivent ſe trouver dans l'intégrale. Car, ſi elles s'y trouvoient par la multiplication ou la diviſion, la quantité tranſcendante entreroit elle-même dans la différentielle.

6°. Enfin il y en a d'autres dont l'intégrale eſt affectée de quantités tranſcendantes. C'eſt ainſi p. ex. qu'il eſt

$$\int \frac{4\,dy}{1 - y^4} = \log \frac{1 + y}{1 - y} + 2\,\text{Arc. tang } y + \text{conſt.}$$

7°. Outre ces eſpeces, il y a encore une qui peut avoir des cas extrêmement compliqués. C'eſt celle où une ou pluſieurs eſpeces de quantités tranſcendantes, avec leurs différentielles affectées de quantités algébriques, ou exprimées & mêlées de ces ſortes de quantités, compoſent la différentielle. Telle eſt p. ex. la formule

$$dy = \frac{z\,dz}{a + \int dz \cdot \sqrt{(1 + zz)}}.$$

§. 32. Voilà donc, ou peu s'en faut, l'énumération des principales claſſes des formules différentielles tranſcendantes. Ce que j'ai

dit à l'égard des deux premieres, me diſpenſe de les examiner plus au long. La troiſieme claſſe ſuppoſe que la différentielle de la quantité tranſcendante puiſſe être exprimée par la quantité non tranſcendante qui l'affecte; & alors cette claſſe ſe réduit à une des ſuivantes, qui méritent un examen plus particulier.

§. 33. Pour cet effet, j'obſerve que chaque eſpece de quantités tranſcendantes ſe réduit à une formule, qui lui ſert de baſe & qui peut être conſidérée comme la plus ſimple en ſon eſpece. Telle eſt p. ex. la formule

$$dy = \frac{dx}{x},$$

qui eſt la baſe de toutes les différentielles logarithmiques. Toutes les autres en dérivent par la voie des ſubſtitutions.

§. 34. Suppoſons donc qu'une eſpece quelconque de quantités tranſcendantes ait pour baſe la différentielle

$$dz = P\,dx,$$

où P eſt une fonction de x, que je conſidere ici comme algébrique. Suppoſons de plus, que dans cette différentielle on ſubſtitue à x une fonction algébrique quelconque de z, que je nommerai Q, de ſorte qu'il ſoit

$$x = Q.$$

Faiſons encore $dx = R\,dz.$

Il eſt clair que la valeur Q doit être ſubſtituée dans P, & que pour dx on poſera $R\,dz$. Or, comme Q eſt ſuppoſé être une fonction algébrique de z, il eſt clair que ſa différentielle $R\,dz$ préſentera les ſymptômes que j'ai rapportés ci-deſſus (§. 8.). Il eſt clair auſſi, que ces ſymptômes doivent en emporter d'autres, par la ſubſtitution qu'on fait de $Q = x$ dans P, & par la multiplication qui ſe fait enſuite avec $R\,dz = dx$. Si p. ex. Q eſt une quantité rationelle, $R\,dz$ le ſera auſſi; & partant il n'y aura, dans la formule qu'on trouve, d'autre irrationalité que celles dont P pourra être affectée. Mais, ſi P eſt rationelle

nelle & Q irrationelle, R le ſera auſſi, & alors il n'arrive qu'en certains cas, que la multiplication dont je viens de parler, faſſe entierement diſparoître cette irrationalité. Mais je me borne ici à faire au moins entrevoir, qu'il y a moyen de rendre plus connoiſſable la réductibilité des formules tranſcendantes compliquées, à d'autres qui le ſont moins, ou à celles qui leur ſervent de baſe. Du reſte, il eſt bien vrai, que chaque eſpece de quantités tranſcendantes demande des recherches plus particulieres, & que par cette raiſon il faudra ſe contenter de les entreprendre à l'égard de celles qui ont le plus d'uſage. C'eſt ainſi p. ex. que ſi, au lieu de différentier chacune des eſpeces de fonctions algébriques rapportées au §. 8, on prend les différentielles de leurs logarithmes, on trouvera des ſymptômes qui les rendent plus connoiſſables. Le logarithme d'une fraction étant la différence des logarithmes du numérateur & du dénominateur, ſa différentielle peut toujours être ſéparée en deux autres, qui ſont indépendantes l'une de l'autre. De même, le logarithme d'une quantité radicale eſt un multiple du logarithme de la quantité compriſe ſous le radical; & toutes les fois que cette quantité eſt rationelle, la différentielle du logarithme de la quantité radicale le ſera auſſi. Et comme, en général, le logarithme de tout ce qui ſe multiplie ou ſe diviſe, ſe décompoſe, il en eſt de même de ſa différentielle; & il eſt clair que par-là elle ſe ſimplifie conſidérablement. Mais il arrive tout le contraire lorſqu'il s'agit du logarithme de la ſomme de deux ou de pluſieurs quantités. Chacune auroit ſa différentielle ſéparée des autres (§. 8. N°. 4. 6.). Mais, pour avoir celle du logarithme, il faut les diviſer toutes par la quantité dont le logarithme doit être différentié. Car il eſt

$$\mathrm{d}\log(P+Q+R+\&c.) = \frac{\mathrm{d}P+\mathrm{d}Q+\mathrm{d}R+\&c.}{P+Q+R+\&c.}.$$

Si donc P, Q, R étoient des fractions ou des racines, leurs différentielles le ſeroient auſſi; & en ce cas il eſt clair, qu'en réduiſant toute la différentielle à une même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un, dont le lo-

garithme ſera l'intégrale. Ainſi le moyen de trouver ſi une différentielle eſt celle d'un logarithme, n'a d'autres difficultés que celles qui naiſſent de la recherche de ces facteurs. Car il arrive auſſi, que par de ſimples réductions le principal facteur diſparoit. C'eſt ainſi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

n'a plus dans ſon dénominateur le facteur $x \pm \sqrt{(1+xx)}$. Pour le lui rendre, il faut la transformer en

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot \frac{x \pm \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

ce qui donne

$$dy = \frac{dx \pm x\,dx : \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

& partant

$$y = \log\,(x \pm \sqrt{(1+xx)}) + \text{Conſt.}$$

Quant aux arcs de cercle, on a

$$\text{Arc tang}\,(PQ) = \int \frac{P\,dQ + Q\,dP}{1 + P^2Q^2}$$

$$\text{Arc tang}\,(P+Q) = \int \frac{dP + dQ}{1 + (P+Q)^2},$$

Si donc P, Q ſont des fractions ou des racines, on voit qu'en ramenant la différentielle à un même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un de la forme $1 + X^2$, de ſorte que X ſera la tangente de l'arc qu'on cherche. On trouvera de la même maniere, qu'il eſt

$$\text{Arc tang}\,P + \log\,(Q+R) = \int \frac{dP}{1+PP} + \int \frac{dQ + dR}{Q+R},$$

& que cette différentielle étant réduite à une même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y

en

en aura un de la forme $1 + PP$, & un autre de la forme $Q + R +$ &c. qui indiqueront l'intégrale qu'il s'agit de trouver. Cependant il arrive encore dans ces ſortes de cas, que les principaux facteurs diſparoiſſent par la réduction. Cela arrive p. ex. dans la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^4)}},$$

qui veut être propoſée de la ſorte:

$$dy = \frac{dx\,(1 + x^4)^{3:4}}{(1 + x^4) \cdot [\sqrt{(1+x^4)} + x^2] \cdot [\sqrt{(1+x^4)} - x^2]}.$$

Mais, comme je ne rapporte tout cela qu'en forme d'exemples, pour éclaircir ce que j'ai dit ſur la méthode du Calcul intégral, je paſſerai maintenant à conſidérer la cinquieme claſſe.

§. 35. J'ai rapporté à cette Claſſe les différentielles dont les intégrales ſont partie tranſcendantes, partie algébriques. C'eſt ici où les ſymptômes dont je viens de parler, ſeroient plus compliqués. Cependant ce que j'ai dit à l'égard des dénominateurs peut y être également appliqué. Mais le grand point eſt de ſéparer la partie tranſcendante d'avec celle qui eſt algébrique. Il eſt clair que par *ſéparer*, je n'entens pas ſouſtraire d'une formule tranſcendante une algébrique quelconque, mais en ſouſtraire ce qu'il y a d'algébrique, de façon que la partie tranſcendante, qui reſte, ſoit purement tranſcendante. J'ai déjà remarqué que, dans l'intégrale, ces quantités ſe trouvent ſéparées par les ſignes $+$ & $-$. (§. 32. N°. 5.) Et par cette raiſon la ſéparation peut néceſſairement avoir lieu. Or elle eſt aſſez facile, toutes les fois que ces parties ſe trouvent déjà ſéparées dans la différentielle, & qu'elles ſont connoiſſables d'elles-mêmes. C'eſt ainſi p. ex. que dans la formule

$$\int \left(dx + \frac{dx}{x}\right) = x + \log x + \text{conſt.}$$

il

il n'y a plus rien à ſéparer, tout comme réciproquement dans la formule

$$z = \int (xe^x dx + e^x dx) = xe^x + \text{conſt.}$$

on ne ſauroit rien ſéparer, à moins qu'on ne faſſe

$$\log (z - \text{conſt.}) = x + \log x.$$

§. 36. Il s'agit donc ici des cas où la ſéparation peut avoir lieu, mais où elle n'eſt pas ſi facilement connoiſſable. Or la méthode employée ci-deſſus pour les intégrales algébriques, peut encore ici être employée avec ſuccès. C'eſt ce que quelque exemple fera voir.

XII. Exemple.

§. 37. Soit propoſé

$$dy = \frac{1 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \cdot dx;$$

il s'agit de voir ſi cette formule a quelque partie tranſcendante, & quelle elle eſt? Pour cet effet poſons (§. 19.)

$$y = z \cdot \sqrt{(1 + xx)}$$

$$dy = \frac{dz\,(1 + xx) + zx\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

& nous aurons

$$1 + 2x + 4xx = dz\,(1 + xx) + zx\,dx,$$

ce qui fait voir qu'il faut faire

$$z = A + Bx$$

$$dz = B\,dx.$$

Et en ſubſtituant ces valeurs, il en réſulte, toute réduction faite,

$$0 = -1 - 2x - 4xx + B + Ax + 2Bxx:$$

or, en poſant chaque terme $= 0$, le ſecond terme donne

$$A = 2,$$

ce

ce qui fait voir que dans la différentielle propoſée le ſecond terme

$$\frac{2x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}$$

eſt une des parties algébriques. Voyons s'il en eſt de même des deux autres termes. Or le premier donne

$$B = 1,$$

mais le troiſieme donne $B = 2$;

& ces deux valeurs n'étant pas les mêmes, il s'enſuit qu'en effet il y a dans la formule propoſée une partie tranſcendante. On voit encore qu'elle dérive du coëfficient, ſoit du premier, ſoit du dernier terme. Car, en changeant ces coëfficiens en ſorte qu'ils ſatisfaſſent à l'une ou à l'autre valeur de B, que nous venons de trouver, on obtient les deux formules

$$dv = \frac{1+2x+2xx}{\sqrt{(1+xx)}}\,.\,dx$$

& $$dw = \frac{2+2x+4xx}{\sqrt{(1+xx)}}\,.\,dx,$$

qui ſont algébriquement intégrables, en ce qu'il eſt

pour $B = 1$, $\quad v = (2+x)\ \sqrt{(1+xx)} + \text{conſt.}$

pour $B = 2$, $\quad w = (2+2x)\ \sqrt{(1+xx)} + \text{conſt.}$

Mais, comme il eſt

$$dv = dy - \frac{2xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

$$dw = dy + \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

il eſt clair qu'il ſera

$$y = (2+x)\ \sqrt{(1+xx)} + 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$$

$$\& \quad y = (2+2x)\sqrt{(1+xx)} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$$

Il eſt clair auſſi que, tandis qu'on cherche l'intégrale qui ait la partie tranſcendante la plus ſimple, il faudra s'en tenir à la derniere. Du reſte la différence ne conſiſte qu'en ce que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \quad \text{eſt un ſecteur,}$$

$$\& \; 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} \quad \text{un ſegment}$$

de l'hyperbole équilatérale. On voit donc par cette façon de procéder que, dans la formule propoſée

$$dy = \frac{1+2x+4xx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot dx,$$

le ſecond terme $\dfrac{2x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}$,

eſt tout à fait indépendant des deux autres, & qu'il ne les rend ni plus ni moins tranſcendans. Cela ſuit de ce que le coëfficient A a une valeur décidée. Mais les deux autres termes ſont mêlés de quelque quantité algébrique, de ſorte que, quand on ſépare cette partie, la partie tranſcendante ſe réduit à un ſeul terme. Et c'eſt tout ce qu'on peut faire, à moins qu'on ne ſubſtitue à x quelque fonction d'une autre variable, qui réduiſe la partie tranſcendante à une forme encore plus ſimple, ce qui ne ſauroit ſe faire qu'en la ramenant à une forme rationelle.

XIII. Exemple.

§. 38. Soit propoſé

$$dy = \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1+xx)}};$$

il

il s'agit de ſéparer de cette formule la partie tranſcendante qu'elle pourra avoir. Pour cet effet faiſons

$$\eta = z\sqrt{(1 - xx)},$$

$$d\eta = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

& nous aurons

$$x^6 dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

ce qui fait voir qu'il faut poſer

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4)\,dx.$$

Et comme, au lieu de la formule propoſée, nous pourrons d'abord prendre

$$d\eta = \frac{Q\,dx + x^2\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

où Q eſt une fonction rationelle de x lorſqu'en effet il y a dans la formule propoſée quelque partie tranſcendante, mais qui devient $= 0$ lorſqu'il n'y en a pas, nous aurons l'équation

$$(Q + x^6)\,dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

qui, en ſubſtituant les valeurs de z & de dz, donne

$$Q = + B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4$$
$$- Ax - 2Bx^2 - 3Cx^3 - 4Dx^4 -$$
$$5Ex^5 - 6Fx^6 - x^6,$$

& il s'agit de voir ſi, chaque terme étant poſé $= 0$, les coëfficiens A, B - - - F ſe déterminent en ſorte que Q devienne également $= 0$. Car on voit qu'il y a 7 termes à faire $= 0$, au lieu qu'il n'y a que 6 coefficiens A, B - - - - F à déterminer, & que par conſéquent la fonction Q doit fournir le ſeptieme, lorſque les ſix ne ſatisfont pas à

toutes les conditions. Or le ſecond, le troiſieme & le cinquieme termes donnent les trois équations

$$5E = 0$$
$$4E - 3C = 0$$
$$2C - A = 0.$$

Et comme dans ces trois équations il n'y a que les trois inconnues E, C, A, on voit que leur valeur eſt déterminée en ce qu'il eſt

$$E = C = A = 0.$$

Il n'en eſt pas de même des quatre autres termes, qui fourniſſent les 4 équations

$$B = 0$$
$$3D - 2B = 0$$
$$5F - 4D = 0$$
$$1 + 6F = 0,$$

où il n'y a que trois inconnues. Or, comme les trois premieres de ces équations donnent $B = D = F = 0$, & que cette valeur de F ne ſatisfait pas à la quatrieme, il eſt clair qu'on ne ſauroit faire $Q = 0$, mais qu'il faut donner à Q une des quatre valeurs ſuivantes:

$$Q = \alpha$$
$$Q = \beta x^2$$
$$Q = \gamma x^4$$
$$Q = \delta x^6,$$

ce qui en même tems déterminera la partie tranſcendante, dont la différentielle dy eſt affectée. Or, comme il s'agit d'en trouver la plus ſimple, il eſt clair qu'il faut retenir la premiere de ces valeurs. De là nous aurons les quatre équations

$$B - \alpha = 0$$
$$3D - 2B = 0$$

$$5F - 4D = 0$$
$$1 + 6F = 0,$$

qui donnent

$$F = -\tfrac{1}{6}, \quad D = -\tfrac{5}{24}F, \quad B = -\tfrac{15}{48} = \text{■},$$

& partant

$$z = -(\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{4}x^3 + x^5)$$

$$\eta = -(\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \frac{x^5}{6})\sqrt{(1 - xx)}.$$

Mais il eſt

$$\eta = y + a\int\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

donc il ſera

$$-y = \tfrac{15}{48}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$
$$+ (\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \tfrac{1}{6}x^5)\sqrt{(1 - xx)} + \text{conſt.}$$

ou bien

$$-y = \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{Arc . ſin . } x +$$
$$\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}x + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{(1 + xx)} + \text{conſt.}$$

§. 39. Si la différentielle tranſcendante qu'on voudra traiter de cette maniere, eſt en elle-même la plus ſimple, alors il eſt clair qu'il n'y a rien à ſéparer, & en employant cette méthode on trouveroit, ou la formule elle-même, ou une autre plus compoſée. Enſuite, il convient auſſi d'obſerver que dans cette méthode il ne ſe fait point de ſubſtitution, parce que le réſultat qu'elle donne eſt exprimé par la même variable x, qui entre dans la différentielle dont on veut ſéparer les quantités algébriques & tranſcendantes. Cela fait auſſi, que la partie tranſcendante qu'on trouve, peut quelquefois être partagée en d'autres qui ſont beaucoup plus ſimples, ou du moins d'une origine plus ſimple. Mais, ordinairement, il faut alors employer des ſubſtitu-

tions, ce qui arrive ſurtout lorſque dans la différentielle propoſée il entre des quantités radicales.

XIV. Exemple.

§. 40. Soit propoſée la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(1 \pm x^n)}}.$$

Cette formule paroit être la plus ſimple en ſon eſpece. Elle ne l'eſt cependant que dans un petit nombre de cas, où elle donne ſimplement un arc de cercle, ou un logarithme, ou enfin, dans le cas de $n = 0$, la quantité rationelle x. Dans tous les autres cas, elle peut-être décompoſée dans ces trois ſortes de quantités, & par là elle n'eſt ni ſimple, ni d'une eſpece tranſcendante particuliere ou primitive. Cela demande des ſubſtitutions. Faiſons pour cet effet

$$x = \frac{1}{z},$$

$$dx = -\frac{dz}{zz},$$

& il ſera

$$-dy = \frac{dz}{zz \cdot \sqrt[n]{(1 \pm \frac{1}{z^n})}},$$

ou bien

$$-dy = \frac{dz}{z \cdot \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}},$$

ou enfin

$$-dy = \frac{z^{n-1}\,dz}{z^n \cdot \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}}.$$

Faiſons encore

z^n

$$z^n \pm 1 = v^n$$
$$z^{n-1}\,dz = v^{n-1}\,dv$$
$$z^n = v^n \mp 1,$$

& il ſera

$$-dy = \frac{v^{n-2}\,dv}{v^n \mp 1},$$

fraction rationelle, qui peut être décompoſée en quantités circulaires & logarithmiques, encore lorſque n eſt un nombre rompu.

§. 41. Voilà à peu près ce que j'avois à dire pour indiquer l'uſage de la méthode que je viens d'expoſer. Je me ſuis borné à l'appliquer à des exemples faciles, parce que mon but n'étoit pas de donner une liſte de formules intégrales que chacun pourra trouver en employant la méthode elle-même. C'eſt à cela que les préceptes du Calcul intégral doivent aboutir; & c'eſt auſſi à quoi aboutiſſent les réflexions générales que j'ai rapportées. Je ne laiſſerai pas cependant de faire encore mention d'une autre méthode, qui me paroit mériter l'attention des Géometres. Voici à quoi elle revient.

§. 42. Suppoſons une formule intégrale, p. ex.

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)};$$

il eſt clair qu'on peut lui donner la forme de deux variables, en faiſant p. ex.

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)}$$
$$z = x\sqrt{(a^2 + xy)}$$
&c.

Car, en ſubſtituant dans ces expreſſions la valeur $y = x$, il eſt clair qu'elles ſeront la même que la formule propoſée. Différentions maintenant ces trois formules, & nous aurons

$$dz = \frac{(a^2 + 2x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 + 2x^2)}}$$

dz

$$dz = \frac{(a^2 + x^2)\,dy + yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$dz = \frac{aa\,dx + \frac{1}{2}xy\,dx + \frac{1}{2}xx\,dy}{\sqrt{(a^2 + xy)}}.$$

Il eſt clair que ces formules ſont les mêmes en faiſant $y = x$. Mais il eſt clair auſſi que les deux dernieres auroient pu être dérivées de la premiere, indépendamment de l'intégrale. Or je dis qu'en faiſant ces ſortes de ſubſtitutions d'une certaine façon, on peut rendre l'intégration plus facile. C'eſt ainſi p. ex. qu'en ne regardant, dans la premiere partie de la ſeconde formule, que l'y variable, ſon intégrale eſt

$$y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt. X.}$$

Et cette intégrale étant différentiée en ne regardant que l'x variable, donne

$$\frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + dX,$$

c'eſt à dire, en faiſant $dX = 0$, la ſeconde partie de la même formule. Il eſt donc clair qu'il eſt

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

ou bien à cauſe de $y = x$,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

§. 43. Dans cette façon de procéder il n'eſt pas néceſſaire de poſer préciſément $x = y$; on pourra faire x égal à une fonction quelconque de y. C'eſt ainſi p. ex. qu'en faiſant

$$x^2 = y,$$

la formule différentielle

$$dz = \frac{(a^2 + 2xx)\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

peut

peut être changée en

$$dz = \frac{(a^2 + y)\,dx + \frac{1}{2}x\,dy}{\sqrt{(a^2 + y)}},$$

dont l'intégrale ſe trouve, comme du premier coup d'œil,

$$z = x\sqrt{(a^2 + y)} + \text{conſt.}$$

ou, en remettant la valeur de y,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

§. 44. Mais j'ai dit que ces ſortes de ſubſtitutions veulent être faites *d'une certaine façon.* Ce n'eſt pas qu'elles ne ſoient faiſables ſuivant toutes les combinaiſons poſſibles. Mais la grande condition eſt de les faire en ſorte que la formule à deux variables qui en réſulte, ſoit une différentielle complette. Cela n'eſt gueres, ou point du tout faiſable, toutes les fois que la formule n'a point d'intégrale algébrique. Mais, quand elle en a une, on peut le faire en une infinité de manieres, de ſorte qu'alors il ne s'agit que de trouver une ſubſtitution telle, qu'elle rende non ſeulement la différentielle à deux variables complette, mais la ſimplifie encore pour ce qui regarde l'intégration.

§. 45. Or on ſait qu'une différentielle à deux variables, comme p. ex. celle du §. 42.

$$dz = dx\sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

eſt complette, lorſqu'en différentiant le facteur de dx ſuivant y, & le facteur de dy ſuivant x, on obtient le même réſultat

$$\frac{dx \,.\, dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}, \qquad \frac{dy\,dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

de ſorte que par ce moyen on peut toujours reconnoitre, ſi, par la ſubſtitution qu'on a faite, on parvient à une différentielle complette ou non. Il eſt clair auſſi que pour y réuſſir, on peut poſer au lieu de x,

une fonction de y, & même de y & x, dont les coëfficiens & les expoſans ſoient indéterminés, & qui ſe déterminent enſuite par cette ſeconde différentiation. Mais il faut néceſſairement laiſſer du moins un x, ſans ſubſtitution, parce que ſans cela on n'auroit ni plus ni moins que la même formule, & qui ſeroit encore plus compliquée.

§. 46. Cette méthode peut encore être enviſagée d'une autre façon. Car, en conſidérant p. ex. la formule

$$dz = \frac{(a^2 + 2xx)\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}},$$

comme l'élément de l'eſpace d'une ligne courbe, on peut conſidérer celles qui s'en déduiſent par l'introduction de y, comme autant de différens élémens d'un ſolide. C'eſt ainſi p. ex. que dans la formule transformée (§. 45.)

$$dz = dx\sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

le facteur ou multiplicateur de la premiere partie exprime l'aire de la ſection du ſolide qui ſe fait le long de la droite y. Le produit $dx\sqrt{(a^2 + y)}$ donne donc l'élément du ſolide le long de cette droite. De la même maniere, l'autre partie

$$\frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

donne l'élément du ſolide le long de la droite x, parce que l'aire de la ſection, qui ſe fait le long de cette droite, y eſt multipliée par l'épaiſſeur infiniment petite dy. Enfin, ſi la différentielle eſt complette, on aura (§. 45.)

$$ddz = \frac{dy \,.\, dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

l'élément de ces deux élémens, c'eſt à dire, un parallélipipede dont la baſe eſt $= dx \,.\, dy$ & la hauteur $= 1 : 2\sqrt{(a^2 + y)}$. Mais, ſi la

ſi la différentielle n'eſt pas complette, alors au lieu de cuber un même ſolide, on en cube deux, qui n'ont point l'élément ddz commun, puiſque la hauteur du parallélipipede eſt différente. Et il eſt clair qu'alors il faudroit retrancher ou ajouter la différence de la hauteur des deux parallélipipedes.

§. 46. Suppoſons p. ex. qu'en faiſant $x = y$, on change la formule

$$dz = \frac{(aa + 2xx)\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dans la ſuivante

$$dz = \frac{(a^2 + xx)\,dy + yydx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

La premiere partie différentiée ſuivant x, donne le parallélipipede

$$ddz = \frac{xdxdy}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

& la ſeconde partie différentiée ſuivant y, donne le parallélepipede

$$ddz' = \frac{2ydydx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Or ces deux parallélipipedes n'étant pas le même, cela fait voir que la différentielle transformée n'eſt point complette. Intégrons néanmoins ddz ſuivant y, & ddz' ſuivant x, & nous aurons les parties qu'il faut ajouter à la différentielle dz pour la rendre complette. Il ſera donc

$$d\zeta = dy\sqrt{(a^2 + x^2)} + \frac{yydx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + \frac{yxdx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2ydy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

ce qui donne

$$\zeta = y\sqrt{(aa + xx)} + yy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + \text{conſt.}$$

Or la partie que nous avons ajoutée à dz eſt

$$\frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Et comme nous avons le choix d'y placer y au lieu de x, nous le changerons en

$$\frac{yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$yy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

c'eſt à dire, celle qu'il faut retrancher de ζ pour avoir

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.} = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

DISSERTATION (*)

SUR

LA NAISSANCE DE CLOVIS I.

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

On a cru juſqu'à préſent que le grand Clovis, premier Roi Chrétien de France, étoit né d'une alliance adultérine; contractée par Childeric ſon pere, avec Baſine femme d'un Roi de Turinge qu'elle avoit quitté par débauche. C'eſt peut-être ce qui a engagé le P. Daniel à ne commencer ſon Hiſtoire de France qu'à Clovis, pour n'avoir point occaſion de parler de ſa naiſſance. En quoi il a été depuis imité par Monſieur le Préſident Hénault, dans ſon Abrégé ſi connu & ſi eſtimé. Je ne puis que les louer l'un & l'autre de leur circonſpection. Cependant il auroit mieux valu que, par une ſuite de leur prédilection pour ce premier Roi, ils eûſſent tous deux eſſayé de le laver de cette tache: Et ne l'ayant point fait, ni perſonne autre que je connoiſſe, j'oſerai l'entreprendre, autant pour l'honneur de la Couronne de France que par amour pour la vérité.

Il faut convenir d'abord que j'ai contre moi un des plus forts préjugés, qui eſt celui des témoignages réunis d'une foule d'Hiſtoriens

(*) Lû à l'Académie, dans l'Aſſemblée publique du 25 Janvier 1762.

riens, tant anciens que modernes, & en particulier de Grégoire de Tours, le premier d'eux tous. Mais, s'ils n'ont tous été que les échos de celui-ci, & qu'il ait lui-même avant eux donné cours à une fable; à quoi ſe réduiſent leurs nombreux témoignages, & quel fonds peut-on faire ſur le ſien? C'eſt ce qu'il faut premiérement examiner.

Le Fait ou le Roman dont il s'agit, ſe trouve dans Grégoire de Tours, au Livre ſecond, Chapitre XII. en ces termes: *Childericus verò cum eſſet nimia in luxuria diſſolutus, & regnaret ſuper Francorum gentem, cœpit filias eorum ſtuprosè detrahere. Illique ob hoc indignantes de Regno eum ejiciunt. Comperto autem quod eum etiam interficere vellent, Thoringiam petiit, relinquens ibi hominem ſibi charum, qui virorum fuventium animos verbis lenibus mollire poſſit. Dans etiam ſignum quando redire poſſit in patriam. Id eſt, diviſerunt ſimul unum aureum, & unam quidem partem ſecum detulit Childericus, aliam verò amicus ejus retinuit, dicens: „Quando hanc partem tibi miſero, partesque conjunctæ unum „effecerint ſolidum, tunc tu ſecuro animo in patriam repedabis.“ Abiens ergo in Thoringiam, apud Regem Biſinum* (aliàs *Baſinum*) *uxoremque ejus Báſinam latuit. Denique Franci hoc ejecto, Egidium ſibi - - - Magiſtrum militum à Republica miſſum - - - unanimiter Regem adſiſcunt. Qui cum octavo anno ſuper eos regnaret, amicus ille fidelis, pacatis occultè Francis, nuncios ad Childericum cum parte illa diviſi ſolidi quam retinuerat, mittit. Ille verò certa cognoſcens indicia, quod à Francis deſideraretur, ipſis etiam rogantibus, à Thoringia regreſſus, in Regnum ſuum eſt reſtitutus. His ergo regnantibus ſimul Baſina illa, quam ſupra memoravimus, relicto viro ſuo, ad Childericum venit. Qui cum ſollicitè interrogaret, qua de cauſa de tanta regione veniſſet, reſpondiſſe fertur: „Novi, inquit, utilitatem tuam, quod ſis valdè ſtrenuus, „ideoque veni ut habitem tecum. Nam noveris, ſi in tranſmarinis par„tibus aliquem cognoviſſem utiliorem te, expetiſſem utique cohabitatio„nem ejus.“ At ille gaudens, eam ſibi in conjugio copulavit. Quæ concipiens, peperit filium, vocavitque nomen ejus Chlodovæum. Hic fuit magnus & pugnator egregius.* Je traduirai ce paſſage en François pour

pour ceux qui n'entendent pas le Latin. „Or comme Childeric étoit „exceſſivement débauché à l'égard du ſexe, régnant ſur la Nation des „François, il ſe mit à enlever leurs filles pour jouir d'elles. Eux, indignés „de cela, le dépouillent de ſa Royauté. Et lui, informé qu'ils vou„loient auſſi le tuer, s'en alla dans la Thuringe, laiſſant là un homme „qu'il chériſſoit, pour pouvoir appaiſer par de douces paroles les eſ„prits irrités, & convenant avec lui d'un ſigne pour lui faire ſavoir „quand il ſeroit tems qu'il revînt dans le pays. A cet effet, ils parta„gerent enſemble une piece d'or, dont Childeric emporta la moitié & „ſon ami retint l'autre, diſant: *Quand je vous aurai envoyé cette moitié „& que les deux rapprochées feront la piece entiere, alors vous pourrez „revenir en toute ſureté.* S'en allant donc en Thuringe, il ſe tint caché „auprès du Roi Biſin ou Baſin, & auprès de ſa femme Baſine. Enfin „les François, après l'avoir chaſſé, ſe donnent unanimement pour Roi „Egidius, ou Gilles, qui avoit été envoyé par la République en qua„lité de Maître de la Milice. Comme il régnoit depuis huit ans ſur „eux, le fidele ami, ayant appaiſé ſecrétement les François, envoye „des Exprès à Childeric, avec la moitié du ſoû rompu qu'il avoit re„tenue. Or lui, ayant par-là un indice certain qu'il étoit deſiré des „François, & ces Exprès d'ailleurs y joignant leurs prieres, il re„vint de la Thuringe, & fut rétabli dans ſa Royauté. Eux donc ré„gnant enſemble, cette Baſine dont nous avons parlé plus haut, ayant „quitté ſon mari, vint trouver Childeric; & comme il s'enquéroit „d'elle pour quel ſujet elle étoit venue vers lui d'un pays ſi éloigné, on „dit qu'elle fit cette réponſe: *Je connois ton utilité & ta grande bra„voure. C'eſt à cauſe de cela que je ſuis venue pour demeurer avec toi. Car „ſache que ſi j'euſſe connu quelqu'un plus utile que toi, fût-il au delà des „mers, j'aurois également deſiré d'aller vivre avec lui.* Là-deſſus, ra„vi de joie, il la prit en mariage; & elle, concevant, mit au monde un „fils qu'elle nomma Clovis: celui-ci fut un grand & fameux guer„rier."

Cette Hiſtoire vraie ou fauſſe, une fois reçue par Grégoire de Tours, n'a pas manqué de paſſer ſans examen dans toutes les Chro-

niques des ſiécles ſuivans, & dans la plupart avec de nouvelles circonſtances.

Celle qui a pour titre: *Geſta Regum Francorum* (*), nomme le fidele ami Viomade. Elle dit qu'il employa des artifices pour rendre Egidius odieux & engager les François à le chaſſer. Puis venant à Childeric lors de ſon départ de la Thuringe, elle ajoute: *Nam dum fuit in Toringia, cum Baſina Regina uxore Biſini* (alias *Baſini*) *Regis ipſe Childericus Rex commixtus fuit.* „Car, pendant qu'il fut dans la „Thuringe, ce même Roi Childeric eut commerce avec la Reine Baſine, „femme du Roi Biſin, autrement Baſin.“ Et même le texte de cette Chronique tiré du Mſc. de l'Egliſe de Cambrai, porte; *adulterium commiſit*, „il commit adultere.“

Le Moine Roricon, qui a ſuivi l'Auteur de la Chronique précédente, lui eſt entiérement conforme, ſi ce n'eſt qu'il a trouvé, que „Baſine avoit quitté ſouvent le lit de ſon mari pour jouir de la com„pagnie de Childeric“: *Sæpius relicto viri thoro, conſortium noſtri Regis eſt experta.* Et il avoue „qu'elle avoit mis bas la pudeur de ſon „ſexe, parce qu'elle étoit luxurieuſe à l'excès“: *Poſtpoſito pudore muliebri, ut erat nimis luxurioſa.*

Mais, cent ans après, vint Fredegaire le Scholaſtique, qui fit voir que ſes prédéceſſeurs n'avoient fait qu'effleurer la matiere, & qu'ils avoient ſurtout oublié les circonſtances les plus curieuſes. Selon lui, „Wiomade étoit de tous les François le plus fidele à Childeric, qui l'a„voit ſauvé par la fuite lorſque les Huns l'emmenoient priſonnier avec „ſa mere“: *Wiomadus Francus fideliſſimus cæteris Childerico*, (**) *qui eum, cùm à Chunis cum matre captivus duceretur, fugaciter liberaverat.* „Ce ſoû d'or qu'ils avoient partagé, ne venoit point de la bourſe de „l'un

(*) Au I. Volume des Hiſtoriens de France d'André du Cheſne, page 690.

(**) *Qui eum*; ces deux mots, ſi je ne me trompe, ont rapport le premier à Childeric, & le ſecond à Wiomade. Mais le P. Daniel a pris l'un pour l'autre, ayant écrit que c'etoit Childeric qui avoit été délivré par Wiomade, étant emmené en captivité avec ſa mere. Il a augmenté par là le ridicule du paſſage.

„l'un ni de l'autre; c'étoit une trouvaille que Wiomade avoit faite“: *Hic inventum unum aureum cum Childerico dividens.* „Wiomade, de„venu Viceroi des François ſous Gilles, lui fait impoſer ſur eux un tri„but d'un ſoû d'or par tête & ils le payent. Il fait porter enſuite par „Gilles le tribut à trois ſoûs, & ils s'y ſoumettent encore, trouvant „que cela n'étoit pas ſi dur que ce qu'ils ſouffroient ſous Childeric. „Wiomade retourne à Gilles, lui fait accroire que les François ſe ré„voltent, & lui conſeille d'en faire égorger pluſieurs pour abaiſſer l'or„gueil des autres. Il en mene lui-même à Gilles cent des principaux „qu'il avoit choiſis, & Gilles ſuivant ſon conſeil les fait tuer. Alors „Wiomade va parler ſecrétement aux François, & les excite à rappeller „Childeric. De là il retourne à Gilles & lui perſuade d'envoyer une „ambaſſade à l'Empereur Maurice.“ Et notez bien que cet Empereur Maurice, dont le nom ſe trouve répété juſqu'à quatre fois dans ce récit, n'a commencé à régner qu'en l'année 582, cent-dix-huit ans après la dépoſition de Childeric & environ 107 ans depuis la mort de Gilles. „Le ſujet ou le prétexte de cette ambaſſade à Maurice, étoit de lui de„mander cinquante mille ſoûs pour les employer à gagner les Nations „voiſines. Mais la vérité étoit que Childeric ſe trouvant à Conſtan„tinople auprès de l'Empereur Maurice, Wiomade voulut profiter de „cette ambaſſade pour informer Childeric de la diſpoſition des François. „Dans cette vue il dit à Gilles, qu'il avoit reçu quelques ſoûs pour ſes „ſervices, qu'il avoit peu d'argent, qu'il ſouhaitoit de faire partir avec „les Ambaſſadeurs un petit garçon qui iroit trafiquer cet argent à Con„ſtantinople“: *Aliquantulos ſolidos tuæ inſtantiæ locum accipiens militavi, parum ſervus tuus argentum habeo. Volebam cum tuis legatis puerum dirigere, ut melius Conſtantinopoli mihi argentum mercaret.* „Alors ayant reçu de Gilles cinq-cent ſoûs d'or en préſent pour les „employer à ce trafic, il envoya le petit garçon, avec la moitié du „ſoû d'or: mais à la place de l'argent qu'il devoit trafiquer, il lui don„na un ſachet plein de pieces de plomb“: *Tunc acceptis ab Egidio quingentis in munere aureis, quos ad hoc opus emendum tranſmitteret, miſit puerum creditarium ſibi cum media parte aurei quem cum Childe-*

rico diviſerat. Saccellum plenum plumbeis, quod puer pro ſolidis ſecum portaret. „Avant que les Ambaſſadeurs paruſſent devant l'Empereur, „le petit garçon qui avoit pris les devans, ſuivant ſes inſtructions, étoit „allé avertir Childeric, que Gilles, au lieu d'envoyer de l'argent au „Tréſor public, en demandoit à l'Empereur. Childeric auſſitôt va le „dire à Maurice, & Maurice entrant dans une grande colere, fait met„tre les Ambaſſadeurs en priſon. La circonſtance ne pouvoit être „plus favorable pour Childeric; il dit à l'Empereur": *Jube me ſervum tuum ire in Gallias. Ego furorem indignationis tuæ ſuper Egidio ulciſcar.* „Maurice le prend au mot, lui fait de grands préſens, & le „renvoye par mer dans les Gaules": *Evectu navali revertitur in Gallias.* „Wiomade, averti de ſa venue par le petit garçon, va le join„dre au Château de Bar, & il eſt reçu par les Barrois." D'où l'on peut conclurre que c'étoit alors la route pour entrer en France, en venant de Conſtantinople par mer. Mais ce n'eſt pas le tout, ni même le meilleur du Conte. Baſine de Thuringe, qui s'étoit ſans doute fort ennuyée pendant le ſéjour de Childeric à Conſtantinople, „l'étant „venu trouver en toute diligence, *curſu veloci;* la premiere nuit de „leurs nôces, étant couchés enſemble, elle lui dit: Leve-toi ſans fai„re de bruit, & tu diras à ta ſervante ce que tu auras vu devant le Pa„lais": *Surge ſecretius, & quod videris ante aulas Palatii, dices ancillæ tuæ.* "S'étant levé auſſitôt, il vit trois bêtes reſſemblantes au „Lion, à la Licorne & au Léopard, qui ſe promenoient": *Cumque ſurrexiſſet, vidit ſimilitudinem beſtiarum Leonis, Unicornis & Leobardi, deambulantium.* "De retour, il dit à ſa femme ce qu'il avoit vû. „La femme lui dit: Monſeigneur, va derechef, & rapporte à ta ſer„vante ce que tu auras vû": *Reverſuſque dixit mulieri quæ viderat. Dixit ad eum mulier: Domine mi, vade denuo, & quod videris narra ancillæ tuæ.* „Et comme il fut allé dehors, il vit deux bêtes ſe pro„mener, reſſemblantes à l'Ours & au Loup": *Ille vero cum foris abiiſſet, vidit beſtias ſimilitudine Urſi & Lupi deambulantes.* „Racontant „cette ſeconde viſion à ſa femme, elle le renvoye pour la troiſiéme „fois": *Narrans & hæc mulieri, compellit eum tertiò ut iret, & quod vide-*

viderat nuntiaret. „Il vit cette fois-ci de moindres animaux, reſſem-„blans au Chien & à d'autres petites bêtes qui ſe tirailloient les uns les „autres & ſe rouloient.“ *Cumque tertiò exiſſet, vidit beſtias minores ſimilitudine Canis, & minorum beſtiarum ab invicem detrahentium & volutantium.* Après qu'il eut rapporté tout cela à Baſine, ils paſſerent „chaſtement le reſte de la nuit“: *Cumque Baſinæ hæc univerſa narraſſet, abſtinebant ſe caſtè uſque in craſtinum.* „Au ſortir du lit, Baſine „donna à Childeric l'interprétation de tout ce qu'il avoit vû“: *Surgentes de ſtratu, dixit Baſina ad Childericum: Quæ viſibiliter interpretationem habent.* „Il nous naîtra un fils qui aura la force du Lion: ſes „fils auront la force du Léopard & de la Licorne; & ceux qui naîtront „d'eux auront la force & la vîteſſe des Ours & des Loups. Quant „à ceux que tu as vûs en dernier lieu, ce ſeront les Colonnes de ce „Royaume; parce qu'ils régneront à la façon des Chiens, & que leur „force ſera ſemblable à celle des petits animaux. Mais la pluralité de „ceux-ci qui ſe rouloient en ſe tiraillant, ſignifie que les Peuples ſe-„ront ruïnés les uns par les autres, n'ayant plus la crainte des Prin-„ces“: *Naſcetur nobis filius fortitudine Leonis ſignum & inſtar tenens. Filii quoque ejus Leobardi & Unicornis fortitudine ſignum tenent. Deinde generantur ex illis, qui Urſis & Lupis fortitudine & velocitate eorum ſimilabunt. Et tertiò quæ vidiſti ad diſceſſum, Columnæ Regni ejus erunt: quia regnabunt ad inſtar Canum, & minoribus beſtiis eorum conſimilis erit fortitudo. Pluritas autem minorum beſtiarum, quæ ab invicem detrahentes volutabant, populos ſine timore Principum ab invicem vaſtandos ſignificat.*

Voilà le Conte revêtu à peu près de toutes ſes circonſtances; & je doute que l'imbécillité humaine ait jamais produit un chef-d'œuvre plus complet de ridicule & d'abſurdité.

Pour anéantir tout d'un coup des fables ſi groſſieres, il ne me ſeroit pas difficile de faire voir, par l'autorité d'un ancien Hiſtorien des Francs, combien ils avoient en horreur l'adultere, par l'exemple d'un de leurs Rois nommé Baſan, qui fit punir de mort ſon propre fils Se-

dan, convaincu de ce crime, 274 ans avant l'Ere Chrétienne. Cette preuve acquerroit même, ſi l'on vouloit, un nouveau degré de conſidération par l'heureux rapport qui ſe trouve entre le nom de Baſan & celui de Baſin. Mais peut-être croiroit-on que je n'aurois recours à cette preuve, que pour réfuter une fable par une fable.

Le P. Daniel a fait, à la tête de ſon Hiſtoire de France, une Diſſertation pour prouver que la dépoſition de Childeric eſt une fauſſeté. „Il avoue d'abord qu'il n'a preſque contre ce fait que des conjectures „& des argumens négatifs. Cependant il les croit capables de faire „ſur l'eſprit de ſes Lecteurs le même effet qu'ils ont fait ſur le ſien. Il „prétend que l'élection d'un Général Romain par des François, eſt „une choſe auſſi bizarre que l'auroit paru la conduite des Turcs, ſi „après avoir dépoſé Mahomet IV. ils euſſent élu pour Sultan le Prince „Charles de Lorraine qui leur faiſoit la guerre en Hongrie. Il dit en„ſuite que le Comte Gilles n'a pu déférer au choix des François ſans „ſe rendre ſuſpect au Patrice Ricimer, qui n'auroit pas manqué de le „faire aſſaſſiner. Il ſoutient après cela que l'hiſtoire de l'Empire n'a „parlé de lui en aucune occaſion comme d'un Roi, mais ſimplement „comme d'un Comte ou d'un Général de l'armée Romaine dans les „Gaules. Et pour derniere preuve, il fait voir par le témoignage d'I„dace que le Comte Gilles mourut en 463, la troiſiéme année de l'Em„pereur Sévere, cinq ans après que Childeric eut ſuccédé au Royau„me des François par la mort de Mérovée arrivée en 458; & que dans „cet intervalle il eſt impoſſible de trouver les huit années de régne „qu'on donne à ce prétendu Roi."

Mais ce raiſonnement du P. Daniel me paroît plus ſpécieux que juſte.

Premiérement, le choix d'un Gaulois tel qu'étoit le Comte Gilles, Chef des Armées Romaines, mis par les François à leur tête, n'a rien de plus ſingulier, que celui d'un Anglois comme Richard & d'un Eſpagnol tel qu'Alphonſe, élus tous deux Empereurs d'Allemagne au milieu

milieu du XIII Siecle. Il n'a rien même de plus bizarre que celui de pluſieurs Allemands, comme Mérobaude, Baudon, Arbogaſte, tous trois Francs ou François de nation, & Ricimer lui-même, que les Romains avoient mis, vers le tems de Gilles, à la tête de leur Sénat & de leur Milice. L'élection du Prince Charles de Lorraine eût ſans doute été bizarre. Jamais Turc ne s'étoit trouvé à la tête d'une Armée & d'une République Chrétienne, ni jamais Chrétien à la tête d'un Etat & d'une Milice Turque. Mais il n'en étoit pas de même des François avec les Romains, auſquels ils ſe joignoient en toute occaſion pour la défenſe de l'Empire. Voici quelques exemples qui en pourront donner la preuve. La premiere fois que le nom des Francs ou des François paroît dans l'Hiſtoire, c'eſt à l'occaſion d'un Traité que le Céſar Galien, ſous l'Empire de Valérien ſon pere, fit avec eux en l'année 254, pour les oppoſer aux autres Germains qui voudroient paſſer le Rhin (*Zoſime Liv. I.*). L'an 358, „les Saxons envoyerent les Quades, qui étoient de leur Nation, pour ſe loger dans les terres des Romains. Les François Saliens, qui habitoient ſur leurs frontieres, leur „boucherent le paſſage pour rendre ſervice à l'Empire. Peu après, Julien allant combattre les Quades, fit auparavant jurer à ſon Armée, „qu'elle ne feroit aucun mal aux François Saliens, & leur laiſſeroit la „liberté de ſe retirer ſur les terres de l'Empire; ce que ces François „ne manquerent pas de faire avec leur Roi, & alors Julien les prit à „ſon ſervice (*Zoſime Liv. III.*). L'an 375, „Valentinien donna le commandement de ſon Armée à Mérobaude (*le même Liv. IV.*). L'an 378, „les Germains ayant paſſé le Rhin, Gratien envoya à leur rencontre ſes Légions ſecondées de Mérobaude, Roi des Francs, qui étoit „dans les Gaules: le combat ſe donna, il y reſta 35 mille Germains, & „en reconnoiſſance de ce grand ſervice, Gratien conféra à Mérobaude la dignité de Comte de ſes Domeſtiques ou de Maître du Palais (*Socrate*). L'an 380, „Gratien, ſachant que Théodoſe en Orient avoit „les Scythes ſur les bras, lui envoya une armée ſous la conduite de „Baudon & d'Arbogaſte, deux Chefs de François, à l'arrivée deſquels „les Scythes quitterent la Macédoine & la Theſſalie (*Zoſime Liv. IV.*).

L'an

L'an 388, „le même Arbogaſte amena à Théodoſe un Corps conſidé-
„rable de François: arrivé au bord du Save où l'Armée de Théodoſe
„étoit arrêtée, il le paſſa le premier à la nage avec ſa troupe, & tailla
„en pieces l'Armée de Maxime, qui étoit poſtée ſur l'autre bord. Ar-
„bogaſte fut enſuite détaché pour aller arrêter dans les Gaules le fils de
„Maxime, & il le fit mourir (*le même & Marcellin*). L'an 393, „les
„François, après quelque brouillerie, renouvellerent avec l'Empire leurs
„anciens Traités d'alliance (*Sigonius*). L'an 395, „ils les renouvelle-
„rent encore avec Stilicon (*Zoſime & Proſper*). L'an 410, „ils rem-
„plirent les devoirs de cette alliance en arrêtant les Vandales qui vou-
„loient paſſer le Rhin: ils en tuerent près de vingt mille, & les au-
„roient entiérement détruits, ſi Godigiſile leur Roi n'avoit été ſecou-
„ru par Reſpendial Roi des Alains (*Frigéride dans Grégoire de Tours, & Zoſime*). La même année, „Conſtantin donna le commandement
„de ſes Troupes à Edobeck, Chef de François, qui avec un gros corps
„de ſa Nation étoit au ſervice de cet Empereur (*les mêmes*). L'an 411,
„Conſtantin pour ſe maintenir dans les Gaules appella à ſon ſecours les
„François; mais le Roi ou le Chef de ces François fut pris & ſon Ar-
„mée taillée en pieces par celle d'Honorius (*Sozomene, Proſper & Marcellin*). Enfin l'an 451, „Mérovée pere de Childeric joignit de
„même ſon Armée Françoiſe à celle de Valentinien, dont Aëtius avoit
„le commandement général, & il lui rendit de ſignalés ſervices con-
„tre Attila qui pilloit & ravageoit les Gaules (*Grégoire de Tours, Jor-
„nandès & Sigebert*)." Tant d'exemples ne ſont-ils pas plus que ſuffi-
ſans, pour montrer que le P. Daniel s'eſt trompé, en mettant les Turcs & les Chrétiens en parallele avec les Romains & les Francs ou François du tems de Childeric, qui pouvoient, ſans lui & même avec lui, ſe ranger ſous les étendarts d'un Général Romain, tout auſſi bien qu'ils l'avoient fait en tant d'autres occaſions.

Secondement, ſi le Comte Gilles n'a pu probablement accepter la Royauté des François; ſi nul Hiſtorien de l'Empire ne lui a donné le titre de Roi; tant mieux, c'eſt une preuve qu'il ne l'a point été, & j'en

j'en demeure d'accord avec lui. Mais il ne s'enſuit point de là, ni que Childeric n'ait pu être dépoſé, ni que pendant ſa dépoſition les François n'ayent pu, à l'inſtigation de Wiomade, ſe joindre à l'Armée Romaine commandée par le Comte Gilles. Au contraire, en ſuppoſant avec tous ceux qui ont parlé de la dépoſition de Childeric, qu'il eût remis ſes intérêts à ce Wiomade, homme fidele, accrédité, artificieux; n'étoit-il pas de ſa politique, de mettre tout en uſage pour empêcher les François de remplacer le Roi détrôné, par un Prince de leur Nation, qui lui auroit fermé le retour au Trône, ou dont l'élection du moins n'auroit pu manquer de cauſer une guerre civile, pour peu que Childeric eût eſſayé de recouvrer ſon Royaume? Quel plus grand ſervice donc pouvoit-il lui rendre, que d'engager les François à prendre unanimement, comme ils firent, la réſolution de ſe donner au Comte Gilles, non comme ſujets, car je ſuis déja convenu qu'il ne fut pas leur Roi, mais comme ſtipendiaires & alliés. Auquel cas il n'aura pas eu droit d'impoſer ſur eux les tributs qui furent cauſe du rappel de Childeric. Mais auſſi n'eſt-il parlé de ces tributs que dans les Chroniques poſtérieures à Grégoire de Tours, qui dit ſimplement „que la huitiéme année le fidele ami, ayant appaiſé ſecrétement les „François, envoya des Exprès à Childeric pour le faire revenir.“ Et au reſte, quand bien même Grégoire de Tours en auroit parlé, ce ne ſeroit ni la ſeule ni la plus grande erreur qu'il eût faite dans le récit de cet événement, où la vérité ſe trouve enveloppée d'une nuée de circonſtances palpablement fauſſes & romaneſques.

Troiſiémement, l'impoſſibilité que le P. Daniel prétend y avoir à trouver, entre la premiere année du régne de Childeric & celle de la mort du Comte Gilles, un eſpace ſuffiſant pour les huit années que dura la dépoſition du premier; cette impoſſibilité, dis-je, ne me paroît pas non plus aſſez fondée, pour en pouvoir tirer une preuve convaincante, contre la réalité de cette dépoſition. Il cite Idace pour prouver que le Comte Gilles mourut en 463, & Idace le condamne. C'étoit un Auteur contemporain, qui écrivant dans l'Eſpagne où il

étoit Evêque, rapporte les dates de ſa Chronique aux Olympiades & à l'Ere Eſpagnole, qui ſont antérieures à notre Ere Chrétienne vulgaire, ſavoir celles-là de 776 ans, & celle-ci de 38. Pour partir d'abord d'un point fixe, je prends une Eclipſe de Soleil qu'Idace dit être arrivée le 9 des Calendes de Janvier, c'eſt à dire le 24 Décembre, de la 24e année de l'Empereur Théodoſe le Jeune, à compter de la mort d'Honorius. Cette Eclipſe calculée aſtronomiquement par Calviſius, ſe trouve être arrivée à Salamanque en Eſpagne un jour plutôt, s'il n'y a point d'erreur dans l'Ouvrage Chronologique de Calviſius, c'eſt à dire le 23 Décembre, férie troiſiéme qui étoit le Mécredi, de l'an - - - - - 447

A quoi, pour deſcendre à la mort de Gilles, il faut ajouter avec Idace, ſavoir:

Le reſte du régne de Théodoſe, qui eſt, d'années -	7
Le régne entier de Marcien, de - - - -	3
Et du régne de Majorien juſqu'à l'année de la mort de Gilles	7
Le tout donne l'Epoque de ſa mort, qui eſt l'an -	464

Cette Epoque différe déja d'une année de celle du P. Daniel. Mais, quelque juſte qu'en ſoit la démonſtration dans ſon principe, qui peut répondre qu'elle ne ſoit pas fauſſe dans ſes conſéquences? Eſt-on ſûr qu'Idace n'ait point accourci de quelques années les trois régnes qui ont été portés en compte? C'eſt ce qu'il faut examiner.

Suivant le même Idace, une année avant la mort de Gilles, on comptoit l'an de l'Ere Eſpagnole. - -	506
Ajoutons pour l'année de ſa mort - -	1
	507
Retranchons de cette ſomme pour les années antérieures à l'Ere Chrétienne - - - -	38
Il reſtera l'an : : : :	469

Qui

qui ſera l'Epoque de la mort de Gilles; ce qui differe beaucoup de l'autre.

Et pour faire voir que c'eſt cette ſeconde date qui eſt la plus juſte, ou du moins la plus conforme à l'intention d'Idace, faiſons une troiſiéme opération par les Olympiades.

Suivant encore le même Idace, la 4ᵉ année de l'Olympiade CCCXI, étoit l'année qui précéda la mort de Gilles. Ces 311 Olympiades complettes étant multipliées par 4, donnent d'années 1244

Ajoutons pour la premiere année de l'Olympiade ſuivante, qui fut celle de ſa mort - - - - 1

1245

Retranchons de cette ſomme pour les années antérieures à l'Ere Chrétienne - - - - 776

Il reſtera l'an - - - - 469

qui eſt une Epoque pareille à la précédente. Ainſi voilà ſix ans de plus que le P. Daniel n'en a trouvé dans Idace; & ces ſix ans ajoutés aux cinq ans qu'il avoit trouvés, ne font-ils pas un eſpace de tems beaucoup plus long qu'il ne faut pour les huit ans qu'on donne de durée à la dépoſition de Childeric? On voit donc par-là que, de quelque côté qu'on regarde ſon ſyſteme, on ne le trouve fondé ni en preuves ni en vraiſemblance.

Mais il y a encore quelque choſe de plus à dire ſur Idace. Cet Auteur qui étoit en Eſpagne, n'auroit-il pas, ſur quelque faux rapport, avancé la mort de Gilles? Peut-on croire qu'il ait été toujours aſſez exactement informé de ce qui ſe paſſoit dans les Gaules, pour que ce qu'il en dit ſoit d'une vérité inconteſtable? „Egidius, dit-il, „meurt, les uns diſent ſurpris par des embûches, les autres par du poi„ſon": *Aegidius moritur, alii dicunt inſidiis, alii veneno deceptus.* Ce récit a bien l'air d'avoir été copié d'après un faux bruit répandu en Eſpagne dans le tems qu'Idace l'écrivoit, & il n'en a point été déſabuſé, parce qu'il n'aura plus entendu parler d'Egidius dans les quatre an-

nées ſuivantes, les dernieres de ſa Chronique. Ce fut vers ce tems-là qu'Aetius fils du Patrice, (nommé quatre fois Agetius dans Fredegaire) faiſoit quelque bruit, auſſi bien qu'Eodicius fils de l'Empereur Avitus. Le nom de l'un ou de l'autre approchant de celui d'Egidius, aura pu induire Idace en erreur. Quoi qu'il en ſoit, il y a preuve qu'en 472, & même (ſi l'on veut s'en rapporter à la Chronologie de Sigebert) en 475, ſix années après la prétendue mort d'Egidius ou du Comte Gilles, Childeric le mit en fuite devant Cologne, prit cette ville, & enſuite celle de Treves; d'où il faut inférer qu'il n'eſt mort que depuis cette année-là; & cela eſt d'autant plus vrai, que ſon fils Siagrius, qui ſuccéda à ſes emplois dans les Gaules, ne commence à figurer dans l'Hiſtoire qu'en l'année 482. Or ſi Childeric ſuccéda à Mérovée l'an 458, comme le P. Daniel en convient, & que le Comte Gilles ne ſoit mort que plus de 17 ans après, peut-il reſter le moindre lieu de croire que la mort du Comte Gilles ait dû empêcher le cours des huit années qu'on donne à la dépoſition de Childeric. Donc l'impoſſibilité ſuppoſée par ce Jéſuite eſt une pure illuſion, & conſéquemment il y a moins de difficulté à convenir de cette dépoſition, qu'à vouloir la nier comme il a fait.

Mais autre choſe eſt d'en convenir, & autre choſe d'adopter toutes les impertinences & les abſurdités dont les Chroniques ont chargé cet événement. Peut-être même n'y auroit-il gueres moins de ridicule à les réfuter ſérieuſement, qu'il y en a eu à les adopter. Cependant comme il n'y a ſi mauvais Livres, dit Pline le Jeune, qui n'ayent quelque choſe de bon; de même en matiere de faits & de récits, on peut dire avec autant de vérité, qu'il n'y en a point de ſi fabuleux où il ne ſe trouve quelque choſe de vrai. On peut convenir avec Grégoire de Tours, le ſeul dont le témoignage mérite d'être réfuté, parce que tous les autres ſuivans n'ont fait que le copier & l'amplifier; on peut convenir avec lui, que Childeric fut dépoſé pendant huit ans; qu'il ſe retira dans la Thuringe; que les François ayant à leur tête Wiomade, ſe joignirent à l'Armée Romaine commandée par

par le Comte Gilles; mais que ce ne fut point de leur part à titre de Sujets, ni de la part de celui-ci à titre de Roi, comme le prouve le ſilence des Hiſtoriens de l'Empire; & que dans toutes les autres circonſtances du récit il peut y avoir beaucoup de fables jointes à un peu de vérité: c'eſt ce que je vai tâcher de démêler. Grégoire de Tours écrivoit un ſiécle après Childeric, & dans un tems où la ſimplicité étoit égale à l'ignorance, comme on le voit en mille endroits de ſon Hiſtoire. C'en étoit aſſez pour lui donner lieu d'adopter des fables qu'on avoit inventées, ſoit depuis la mort de Childeric, ſoit du vivant même de ce Roi. D'ailleurs Childeric étoit un Païen dont on croyoit ne pouvoir dire trop de mal, car ces Fables furent inventées dans les Gaules dont les Peuples étoient Chrétiens. On ne ſauroit douter néanmoins que Grégoire de Tours n'ait écrit & vécu ſous le régne des petits-fils de Clovis. Eſt-il à penſer qu'un homme de qualité & de bon ſens ait oſé déshonorer ces Princes, non ſeulement dans la perſonne de Childeric & de Baſine, en les faiſant paſſer pour des gens ſans probité, ſans mœurs, infideles l'un à ſon ami, l'autre à ſon époux, en un mot pour d'infames adulteres; mais ce qui eſt moins croyable, & plus flétriſſant encore pour eux, dans la perſonne de Clovis même leur grand-pere, ſur qui rejailliſſoit l'opprobre de cet adultere, dès-là qu'il en avoit été le fruit? Je croirois donc, pour l'honneur de Grégoire, que ce Chapitre XII. de ſon ſecond Livre, qui eſt employé tout entier à ce qui regarde les déſordres de Childeric, ſa dépoſition, ſa retraite en Thuringe, ſon rappel, la venue de Baſine & le reſte; que ce Chapitre, dis-je, n'eſt pas tel qu'il eſt ſorti des mains de l'Auteur, & qu'on l'aura interpolé dans tout ce qu'on y trouve de révoltant; à moins que le laiſſant ſur le compte de Grégoire, on ne veuille l'imputer à ſa crédulité, à ſon mauvais goût & à l'imbécillité de ſon ſiécle. Je ne m'arrêterai qu'à ce qu'il dit de ce Roi de Thuringe & de ſa femme, chez qui Childeric ſe retira; parce que cette ſeule circonſtance ſuffira, comme je l'eſpere, pour me conduire à la découverte de la vérité. Ce Roi, dit-on, s'appelloit *Biſin* ou *Baſin:* car ces noms reviennent viſiblement au même; auſſi le dernier eſt-il ſubſtitué à l'autre dans divers

Manuſcrits & chez tous nos Hiſtoriens modernes: ce Roi donc s'appelloit *Baſin*, & l'on donne en même tems à ſa femme le nom de *Baſine*. Voilà peut-être la circonſtance du monde la plus étrange. Où a-t-on vu jamais dans aucun tems, dans aucun pays, qu'une femme ait pris pour nom propre celui de ſon mari? Faramond eut pour femmes vraies ou ſuppoſées, Imbergide & Argotte, Clodion eut Babine, Mérovée eut Verica, Childeric lui-même eut Baſine; & il en a été conſtamment de même partout ailleurs. Qui ne voit donc que cette Baſine, entant que femme du Roi de Thuringe, eſt un faux perſonnage? Cependant je ne ſaurois me perſuader que ce nom de Baſine ait été chimérique, puiſqu'il fut celui d'une femme qui vint trouver Childeric, qui fut ſon épouſe & la mere de Clovis, enfin qui vécut & mourut en France. Mais, ſi cette femme ne pouvoit pas être celle de Baſin, par la raiſon qu'elle avoit le même nom que lui, n'eſt-il pas évident qu'elle n'étoit autre que la propre fille de Baſin, appellée Baſine parce qu'elle portoit le nom de ſon pere? En effet, que Childeric retiré chez ce Roi y ait vu Baſine ſa fille, qu'il ait pris du goût pour elle, qu'il l'ait demandée en mariage, & que cette Princeſſe ne ſoit venue le joindre qu'après qu'il fut rétabli dans ſon Royaume; tout cela eſt dans l'ordre, & il n'y a rien là que de très-vraiſemblable. Mais il eſt auſſi très-apparent que, comme le Royaume de Childeric ne s'étendoit pas encore fort avant dans les Gaules, il étoit facile d'y inventer des Fables, ſoit ſur ſon compte, ſoit ſur celui de Baſine; de les y répandre & de les faire croire, parce qu'on étoit très-peu à portée de les vérifier. Et d'un autre côté, Baſine arrivant au moment peut-être qu'on ne s'y attendoit point, venant trouver un Roi qu'on accuſoit de galanterie, en un mot portant le même nom que Baſin Roi de Thuringe, a pu elle-même par-là donner lieu au Peuple, à ce Peuple partout ſot & méchant, de la prendre pour la femme de ce Roi, de la regarder comme une avanturiere qui avoit quitté ſon mari, & de faire là-deſſus tous les mauvais Contes que les Chroniqueurs ont enſuite répétés de ſiécle en ſiécle.

Ayant

Ayant tiré du milieu de tant de Fables cette lueur de vérité, je vai la faire paroître dans tout ſon jour. On croit ſur le témoignage de Sigebert, que Childeric revint de Thuringe en l'année 469. Mézerai dit en 468, & je veux bien y ſouſcrire encore. Mais Clovis étoit né deux ans auparavant, en 466. La preuve en eſt facile à donner. Grégoire de Tours, à la fin de ſon ſecond Livre, dit que Clovis âgé de 45 ans mourut 112 ans après St. Martin Evêque de Tours. La Chronique de Proſper d'Aquitaine rapporte la mort de St. Martin à la cinquiéme année de l'Empire d'Arcadius & d'Honorius, à compter de la mort du grand Théodoſe leur pere; & ajoute que la 8ᵉ année, c'eſt à dire trois ans après St. Martin, il y eut une Eclipſe de Soleil: *Solis facta defectio.* La Chronique d'Idace confirme cette Eclipſe ſous la même année des deux Empereurs: *Solis facta defectio tertio Idus Novembris, feria ſecunda:* ce qui revient à un Mardi 11 de Novembre. Reſte à trouver l'année. Calviſius, quoique très-exact dans ſon Ouvrage Chronologique à calculer & marquer les Eclipſes annoncées par les Hiſtoriens, ne fait point mention de celle-ci. Il obſerve ſeulement que l'année 401 de notre Ere vulgaire étoit la ſeptiéme d'Arcadius & d'Honorius: ainſi la 8ᵉ qui fut celle de l'Eclipſe, doit avoit été l'an 402. En effet, M. Euler le fils notre très-digne Confrere, ayant pris la peine de la calculer, a trouvé qu'elle arriva cette année-là à Bordeaux en France le 11ᵉ Novembre; ſon commencement à $6^h, 34', 51''$ du matin; ſa fin à $8^h, 45', 59''$; ſa grandeur 10 doigts 32 minutes.

Trois ans donc avant cette Epoque mourut St. Martin, ce qui fut l'an - - - - - 399

A quoi ajoutant les années écoulées enſuite juſqu'à la mort de Clovis, qui ſont - - - 112

Le tout enſemble fait - - - - 511

qui eſt l'année de la mort de Clovis, & c'eſt auſſi de quoi conviennent tous les Hiſtoriens.

Or

Or retranchant de cette ſomme les années que Clovis avoit [51
à ſa mort, ſavoir - - - - - - 45
Il reſtera - - - - - - 466

qui eſt l'année de la Naiſſance de Clovis, ainſi que je l'avois avancé plus haut.

Fondé ſur cette preuve inconteſtable, je dis à préſent que Clovis étant né l'an 466, il n'a pû naître ailleurs qu'en Thuringe, où Childeric ſon pere réſidoit, & d'où il ne ſortit, pour remonter ſur le Trône, que pluſieurs années après cette Naiſſance, comme on l'a vu plus haut. Par conſéquent Clovis n'eſt point né en France d'une Baſine avanturiere, qui ayant quitté ſon mari, vint trouver Childeric depuis ſon rétabliſſement, comme tous les Hiſtoriens l'ont fauſſement & ridiculement dit. Mais Clovis étant né dans la Thuringe, eſt-il croyable que ſa mere ait été la femme de Baſin vivant alors avec ſon mari? Non ſans doute. Car de deux choſes l'une: ou Baſin ignoroit le prétendu commerce qu'il y avoit entre ſa femme & Childeric; & en ce cas Clovis n'auroit point paſſé pour le fils de Childeric, mais pour celui de Baſin: ou bien il falloit que ce mari non ſeulement connût, mais tolérât, avouât même le prétendu commerce, pour donner lieu à Childeric de reconnoître Clovis pour ſon fils. Mais y a-t-il la moindre vraiſemblance à cela? N'eſt-il pas plus probable au contraire, que Baſin irrité de l'ingratitude de Childeric, indigné de ſa perfidie, outré de l'infidélité de ſa femme, ſenſible en un mot, comme tout honnête homme peut l'être, à cette injure, ſe ſeroit porté aux plus grandes violences & contre elle & contre lui? Le moins qui en pouvoit arriver à Childeric, étoit d'être obligé de ſortir de la Thuringe, où l'on voit au contraire qu'il reſte encore tranquillement pluſieurs années après la naiſſance de Clovis. N'eſt-ce pas une preuve manifeſte que la mere de Clovis ne fut point la femme de Baſin? D'ailleurs cette mere de Clovis, comme j'ai déjà dit, avoit le nom de Baſine ſous lequel elle fut enſuite connue en France; & cela ne convient point encore à la femme de Baſin, qui ayant un nom différent de celui de ſon mari auroit

roit été connue en France ſous ce nom différent, & n'y auroit point eu celui de Baſine. Il eſt donc évident par toutes ces raiſons, que Baſine, qui fut mere de Clovis à la Cour de Thuringe, n'étoit autre que la fille du Roi Baſin, que Childeric n'avoit pas ſeulement demandée en mariage, comme je l'ai d'abord ſuppoſé, mais qu'il avoit épouſée en ce pays-là: je dis épouſée; car il étoit auſſi libre de le faire alors qu'on avoue qu'il le fut depuis, lorſqu'elle vint, dit-on, le trouver en France pour ſe donner à lui, & qu'il l'épouſa. Et la preuve de leur mariage réel à la Cour de Thuringe, eſt ce même ſéjour qu'elle & lui continuerent d'y faire paiſiblement après la naiſſance de Clovis; puiſqu'il eſt à croire pour l'honneur du Roi & de la Reine de Thuringe, que ſi Childeric avoit eu aſſez d'ingratitude & de brutalité pour débaucher leur fille, c'eût été encore pour lui le cas d'être obligé de quitter la Cour & les Etats du Roi Baſin, ni plus ni moins que s'il eût eu commerce avec ſa femme. Il ne faut donc pas s'étonner ſi Grégoire de Tours & les autres anciennes Chroniques diſent que Childeric étoit non ſeulement chez le Roi, mais auſſi chez la Reine de Thuringe; termes indécens à l'égard d'un Prince réfugié, mais très-convenables dès-là que ce Prince étoit leur gendre. Il ne faut pas s'étonner non plus ſi Childeric paſſa ſi tranquillement les huit années de ſon ſéjour en Thuringe, puiſqu'il vivoit auprès de ſon beau-pere, de ſa belle-mere & de ſon épouſe, avec qui il ne pouvoit pas manquer de ſe plaire & d'oublier ſes chagrins. Enfin, il n'eſt pas étonnant auſſi que Baſine mariée à Childeric ait eu un enfant de lui dans la maiſon de Baſin, Roi de Thuringe, ſon pere. Et c'eſt-là ce qui fait voir que dans les traditions les plus fabuleuſes il y a toujours quelque choſe de vrai; puiſqu'on avoit raiſon de dire, que Baſine qui vint joindre Childeric en France, étoit la même que celle avec laquelle il avoit eu commerce en Thuringe. Mais cela montre en même tems qu'on avoit tort de la prendre pour la femme du Roi Baſin, puiſque portant le nom de Baſine elle ne pouvoit être que ſa fille.

Pendant tout le reſte du régne de Childeric, on ne voit point dans l'Hiſtoire qu'il ait eu rien à démêler avec Baſin. Eſt-il à penſer

que celui-ci, après l'odieux procédé de Childeric, ne lui eût pas fait la guerre? Les Rois en font pour des intérêts plus legers. Qu'auroient dit les François eux-mêmes en le voyant trahir ſi lâchement ſon ami, ſon hôte, ſon bienfaiteur? Ne l'auroient-ils pas abandonné à tous les périls d'une guerre ſi juſtement méritée? Eux que ſes prétendues galanteries avoient irrités au point de le détrôner, & de vouloir le tuer, quel mépris n'auroient-ils pas eu pour lui? Quel éclat n'auroient-ils pas fait pour empêcher ſon mariage avec une femme perdue d'honneur? Mais tout cela n'arriva point, parce que Childeric fut le gendre du Roi & de la Reine de Thuringe, & qu'il ne fut ni l'amant ni le mari de cette Reine. Il ne pouvoit donc régner entre Baſin & lui qu'une parfaite intelligence, qui n'eſt pas toujours à la vérité le fruit de l'alliance de deux familles; mais du moins le ſilence de l'Hiſtoire fait préſumer qu'elle ſubſiſta auſſi longtems que Childeric & Baſin vécurent.

Il n'en fut pas de même de Clovis. L'an 491, il porta la guerre dans la Thuringe, en ſubjugua une partie, & ſe la rendit tributaire. Nul Hiſtorien ancien ni moderne n'a deviné quels pouvoient être ſes droits ſur ce pays-là. S'il n'en eût eu d'autres que ceux que lui auroit apportés ſa mere, femme de Baſin, fugitive & adultere; je doute fort qu'il eût été dans la peine de les faire valoir. Mais il étoit petit-fils de Baſin; & ſoit qu'en cette qualité il ſe regardât comme ſon héritier au défaut d'enfans mâles; ſoit que ces enfans mâles ſes cohéritiers ne lui euſſent pas voulu faire part de la ſucceſſion de ſon grand-pere; il eſt probable qu'il fit cette guerre pour ſoutenir ſes juſtes droits dans l'un ou dans l'autre cas. Ainſi, loin qu'il reſte la moindre tache ſur la naiſſance de Clovis, toutes ces circonſtances ſe réuniſſent, toutes s'accordent à prouver ſa légitimité.

Mais venons à quelque choſe de plus déciſif. J'avois achevé depuis longtems ce Mémoire, lorſque par une rencontre auſſi heureuſe qu'imprévue, j'ai trouvé dans une Chronique qui paſſe pour avoir été écrite un peu avant le milieu du XIIe ſiécle, la preuve ou la confirmation

mation d'une vérité que je n'avois pû établir que par des raiſons, mais raiſons que je croyois ſuffiſantes. Cette Chronique eſt celle de St. Maixant, ou de Maillezais en Poitou, ayant pour titre: *S^ti Maxentii in Pictonibus Chronicon quod Malleacenſe dicitur Malleacenſe.* Elle finit à l'an 1134, & rapporte ce qui ſuit:

Merovæo autem Rege Francorum defuncto, Childericus filius ejus ſolio ſubrogatur regio. Initio regni ſui odioſus extitit Francis. Expulſus ab eis diu exulatus eſt apud Biſſinum, Thoringorum Regem, unde reverſus reſtitutusque in regno, conſilio Guinomadi Ducis. Biſſina filia Biſſini Regis abjecto eò à Childerico in matrimonium aſſumpta eſt, ex qua habuit filium nomine Cloloveum, qui ut ætate in dies, ſic etiam morum creſcebat probitate. Interea Childericus Rex dum per viginti quatuor annorum curricula Francorum ſtrenuè gubernaſſet regnum, ex hac vita diſceſſit. Huic hæreditario jure ſucceſſit Cloloveus virtutibus bellicis ſtrenuus, &c. C'eſt à dire pour ceux qui n'entendent pas le Latin:

„Mérovée Roi de France étant mort, Childeric ſon fils eſt élé„vé ſur le Trône Royal. Au commencement de ſon régne, il ſe ren„dit odieux aux François. Rejetté par eux il fut longtems en exil „chez Biſſin Roi de Thuringe, d'où il revint, & fut rétabli dans ſa „Royauté par le conſeil du Duc Guinomade. *Biſſine, fille du Roi Biſ„ſin, fut priſe en mariage par Childeric qui étoit là relegué.* Il eut „d'elle un fils nommé Clovis, qui croiſſoit de jour en jour en bonnes „mœurs comme en âge. Cependant le Roi Childeric, après avoir „gouverné dignement le Royaume des François durant le cours de „24 ans, ſortit de cette vie. Clovis qui poſſedoit les vertus guerrie„res, lui ſuccéda de droit héréditaire, &c.

Ce récit eſt trop clair pour avoir beſoin d'explication. Mais je ne ſaurois me diſpenſer à cette occaſion de faire quelques remarques:

Premiérement, *ſur l'autorité de la Chronique, qui me fournit ce Paſſage.* Quoiqu'elle finiſſe à l'an 1134, & qu'elle paroiſſe avoir été

été écrite ſix ans après en 1140, ſi l'on fait attention à la maniere intéreſſante dont l'Auteur parle de l'enfance de Clovis, *qui ut ætate in dies ſic etiam morum creſcebat probitate*, on croira ſans peine qu'il écrivoit en ce tems-là, ou peu après ſous ſon régne. Auquel cas ſa Chronique aura pu être continuée par des Ecrivains plus modernes, comme cela eſt arrivé à l'égard de quantité d'autres Chroniques, même de celles qui ne ſont pas anonymes; & c'eſt par cette raiſon qu'on a ſouvent tant de peine à fixer le tems où les Auteurs de ces Chroniques ont vêcu, lorſqu'ils n'y ont mis aucun fait qui ait rapport à eux ou auquel ils ayent eu part. Et cela eſt d'autant plus vraiſemblable à l'égard de celle dont il s'agit, qu'ayant deux titres différens, celui de Maillezais & celui de St. Maixant, ils ne lui ont ſans doute été donnés, que parce qu'elle fut commencée dans l'un de ces deux endroits & continuée dans l'autre. Ainſi je croirois pouvoir inférer de là que le paſſage en queſtion mérite toute créance, comme venant d'un Auteur inſtruit qui, n'ayant point copié les fables de Grégoire de Tours, doit avoir été plus ancien que lui, & probablement contemporain de Clovis, comme le fait juger l'exactitude & la vérité de ſon récit par rapport à Childeric & à Biſſine. En effet, examinant de plus près cette Chronique, je reconnois qu'elle eſt une collection de pluſieurs Chroniques ou Hiſtoires faites par différens auteurs. Le premier, dont l'ouvrage finit à la mort de Pépin le Bref l'an 768, n'indique les faits que par les années des régnes, quoique l'Ere Chrétienne fût pour lors inventée, car elle l'a été dès l'an 527. Le ſecond s'eſt ſervi de cette Ere dans ſa continuation depuis l'an 769 juſqu'en 1099, & a marqué les années en chiffres Romains. Le troiſiéme, qui va depuis l'an 1100 juſqu'en 1134, les a écrites non en chiffres, mais tout au long. Après quoi viennent quelques additions dans leſquelles on trouve les années 1251, 1270, 1294, 1307, 1317, 1320. De là il réſulte que la premiere partie, où ſe trouve le paſſage que j'ai cité, eſt tout au moins d'un Ecrivain du milieu du VIIIe ſiécle. Mais il y a toute apparence qu'il avoit tiré ce paſſage d'un auteur plus ancien, qui nous manque comme bien d'autres, & qui, comme je l'ai déja dit, pouvoit avoir été con-

contemporain de Clovis, à en juger par la maniere intéreſſante dont il parle de ſon enfance.

Secondement, *ſur le peu d'uſage qu'on a fait de cette Chronique quoiqu'imprimée depuis* 110 *ans.* C'eſt le P. Philippe Labbe, Jéſuite, qui a pris la peine de la tirer des ténebres pour l'inſérer au Tome ſecond, page 190, de ſa Nouvelle Bibliotheque des Manuſcrits qu'il publia à Paris l'an 1651. Mais, ſoit que noyée dans un gros volume in folio, elle n'en ait pas été plus connue; ſoit que le P. Labbe lui-même n'ait point fait attention au paſſage qui regardoit le mariage de Childeric & de Biſſine; ſoit enfin que lui & les autres qui ont pu avoir occaſion de lire ce paſſage, reſpectant le préjugé d'une tradition univerſellement reçue, y ayent pris la qualité de fille donnée à Biſſine au lieu de femme de Biſſin, pour une mépriſe ſans conſéquence faite dans le Manuſcrit par un Copiſte, ou même par l'Auteur réputé moderne, dans l'idée qu'il n'avoit compoſé ſa Chronique qu'en 1140: il eſt arrivé de là que tous les Hiſtoriens qui ont écrit depuis 1651, n'ont pas plus ſongé à profiter de ſon témoignage, qu'on y avoit penſé auparavant dans un tems où cette Chronique étoit entiérement ignorée. Ainſi c'eſt la tirer une ſeconde fois des ténebres, & plus réellement que le P. Labbe ne le fit alors pour la premiere fois; c'eſt faire véritablement la découverte du paſſage en queſtion, que de le produire aujourd'hui comme une preuve de la légitimité de Clovis, qui, loin d'avoir été connue juſqu'à nous, n'avoit pas même été ſoupçonnée.

Venons préſentement à ce que rapporte le paſſage, pour y chercher la juſtification de ce que je n'avois établi que par des preuves de raiſonnement.

J'avois traité de fables les enlévemens de filles imputés à Childeric, & qu'on prétendoit avoir été la cauſe de ſa dépoſition. La Chronique n'en dit pas le moindre mot non plus. „Au commencement de „ſon régne il ſe rendit odieux aux François, *odioſus extitit Francis.* Mais un Roi peut traiter fort mal ſes Sujets & ſe faire haïr d'eux ſans

attenter à la pudicité de leurs filles. Cette raiſon m'ayant donné lieu d'examiner de plus près quelle avoit été la conduite de Childeric depuis le commencement de ſon régne juſqu'à ſa dépoſition, j'ai trouvé qu'en effet il ne s'attira la haine des François que par un gouvernement rigoureux, dur & tendant à la ruine du Peuple. L'an 461, il battit près de la Loire l'armée des Goths d'Eſpagne, commandée par le frere de leur Roi Théodoric, nommé Eridic, qui fut tué dans l'action, ſuivant Vaſeus; & cette victoire l'ayant rendu inſolent, pour me ſervir de l'expreſſion de Sigebert, c'eſt à dire, fier & orgueilleux, il ſe mit à charger ſes Sujets de tributs inſupportables: *propter intoleranda tributa & quòd inſolenter ſe gereret.*

Convenant enſuite avec Grégoire de Tours non ſeulement de la dépoſition de Childeric, mais auſſi de ſa retraite en Thuringe, j'en avois ſoutenu la réalité contre les conjectures & les argumens négatifs du P. Daniel; & l'on voit effectivement que la Chronique confirme mon opinion: *expulſus eh eis, diu exulatus eſt.* Mais on y voit en même tems qu'elle ne fait aucune mention de la prétendue Royauté du Comte Gilles, contre laquelle j'avois proteſté avec ce Jéſuite; & même le ſilence de la Chronique à l'égard de ce Comte eſt un grand préjugé que toutes les autres circonſtances qui le regardent, ſont également fabuleuſes.

Je trouvois après cela fort étrange, que Grégoire de Tours & les autres Hiſtoriens, diſant que Childeric s'étoit réfugié chez Baſin Roi de Thuringe, avoient ajouté *& chez la Reine Baſine ſa femme.* Mais la Chronique ne dit que *chez Biſſin, apud Biſſinum Thoringorum Regem*, & rien davantage.

Je diſois encore que Baſine, entant que femme de Baſin, devoit être un perſonnage chimérique parce qu'il étoit impoſſible qu'elle portât le nom de ſon mari; mais que ce nom de Baſine ayant été très-réel par la raiſon qu'il étoit celui de la femme de Childeric & de la mere de Clovis, cette Baſine ne pouvoit être que la fille de Baſin portant

tant le même nom que ſon pere: & c'eſt ce que la Chronique marque auſſi préciſément: *Biſſina filia Biſſini Regis.*

Je jugeois d'ailleurs, par le tems qu'avoit duré l'exil de Childeric & par celui de la naiſſance de Clovis calculé ſur les années de ſa vie, que celui-ci ayant dû naître dans la Thuringe, ſon pere y avoit épouſé Baſine, *épouſé*, diſois-je, *véritablement pendant cet exil & avant ſon retour en France.* Et cette derniere circonſtance eſt encore rapportée dans la Chronique, de maniere à ne laiſſer aucun lieu d'en douter: *abjecto eò à Childerico in matrimonium aſſumpta eſt.*

Enfin cette Chronique ne laiſſeroit rien à deſirer s'il y étoit dit que Clovis eſt né dans la Thuringe, ce qui devient néanmoins une ſuite naturelle & une circonſtance plauſible, dès-là que Childeric, pendant ſon exil, s'y maria avec Baſine. Mais voici un Auteur qui me fournira ce témoignage. C'eſt un ancien Hiſtorien des Francs, auſſi fabuleux, ſi l'on veut, que Grégoire de Tours & les autres dont j'ai fait voir les menſonges ridicules & abſurdes au ſujet de Childeric & de Baſine; mais malgré ces fables auſſi croyable qu'eux dans des choſes qui ne ſont point contraires à la vraiſemblance, & qui deviennent même indubitables lorſqu'elles s'accordent avec les principes que j'ai établis. L'hiſtorien dont je veux parler, eſt un nommé Hunibald à qui des Critiques trop prévenus n'ont pas rendu aſſez de juſtice, comme je le ferai voir ailleurs. Malheureuſement nous ne connoiſſons ſes Ouvrages que par l'Abrégé que l'Abbé Tritheme aſſûre en avoir fait, & que Marquard Freher a fait imprimer au premier Volume des Oeuvres de cet Abbé page 63, ſous le titre: *De origine gentis Francorum compendium Joannis Trittenhemii abbatis, ex duodecim ultimis Hunibaldi Libris, quorum ſex primos Woſthaldus conſcripſit, ab introitu Sicambrorum ad partes Rheni in Germaniam.* Or l'on trouve dans cet Abrégé à la page 86, ce Paſſage remarquable, non par les fauſſetés qu'il rapporte comme tous les autres Hiſtoriens, mais par une circonſtance qui leur a échappé à tous. Il y eſt dit en parlant de Clovis: „Sa mere „fut Baſine, femme légitime de Baſin Roi des Thuringiens; il nâquit dans „l'adul-

„l'adultere. Car Hilderic Roi des François fuyant en Thuringe & de-
„meurant pendant huit ans chez le Roi Baſin ſon parent conſanguin, eut
„des privautés ſecretes avec ſa femme Baſine, qui en conçut & mit au
„monde un fils ſavoir le ſusdit Clovis, la ſeconde année de ſa fuite, (c'eſt
„à dire de celle de Childeric) qui fut l'an de J. C. 469, dans la ſeptié-
„me Indiction des Romains. Enſuite, la 8e année de ſa fuite, il re-
„tourna dans la Gaule; *Baſine le ſuivant avec ſon fils*, le vint trou-
„ver l'an 476, *l'enfant ayant déja ſept ans.* Le Roi Hilderic vé-
„cut encore 8 ans, & mourut.“ Voici les propres termes du Texte:
Nomen matris eius Baſina, uxor legitima Baſini Regis Thoringorum, ipſe in adulterio natus. Hildericus enim rex Francorum, in Thuringiam fugiens & apud Baſinum regem conſanguineum ſuum hoſpitatus annis octo cum uxore ejus Baſina ſecretos habuit concubinatus, quæ ab eo concepit, & peperit filium prædictum Clodoveum, anno fugæ ejus ſecundo qui fuit Dominicæ nativitatis CCCCLXIX. Indictione Romanorum ſeptima. Poſtea vero anno fugæ ſuæ octavo in Galliam reverſus eſt, quem Baſina cum filio ſecuta, ad eum venit, anno Domini CCCCLXXVI cum puero jam ſeptenni; ſuper vixit Hildericus rex annis octo, & mortuus eſt.

Je ne répéterai point ce que j'ai dit aſſez au long dans ma Diſſertation pour réfuter ce qu'il y a de fabuleux dans ce récit. Mais j'ajoute, que plus il eſt abſurde que Baſine femme de Baſin Roi de Thuringe vivant publiquement avec lui & dans ſa maiſon, y ait accouché, que dis-je? y ait élevé pendant ſept ans un fils qu'elle avoit eu de Childeric; plus cette abſurdité même prouve que cette Baſine étoit non la femme, mais la fille de Baſin, que Childeric avoit épouſée pendant ſon exil en ce pays-là, comme le dit la Chronique rapportée plus haut.

Il me reſte à tirer du Paſſage ci-deſſus les époques qui y ſont marquées pour les joindre à celles qui m'ont ſervi dans ma Diſſertation à réfuter le P. Daniel. Leur juſteſſe fera connoître l'exactitude de l'Hiſtorien, & donnera lieu de ſoupçonner, non ſans beaucoup d'apparence, que les fables qu'on trouve dans ſon Hiſtoire, ſoit par rapport

port à Childeric & à Baſine, ſoit ſur d'autres ſujets, comme je le montrerai dans un autre Mémoire, y ont été ajoutées par quelque miſérable interpolateur.

Il y a dans le Paſſage, comme dans tout l'Abrégé d'Hunibald, deux ordres chronologiques qu'il ne faut pas confondre. L'un indique les faits par les années des régnes, & celui-là eſt de l'Hiſtorien qui écrivoit dans un tems où l'Ere Chrétienne n'étoit point encore en uſage. L'autre ajoute à ces faits les années de cette Ere priſe à la naiſſance de J. C. & celui-ci eſt de l'Abbé Tritheme l'abréviateur, qui dans ſa ſuppuration s'eſt trompé de trois ans depuis la mort de Mérovée qu'il fixe à l'an 461, au lieu de 458, juſqu'à celle de Clovis qu'il rapporte à l'an 514, au lieu de 511, comme on va le voir dans la Table ſuivante.

Années de J. C. ſuivant Tritheme.		Années de J. C. ſuivant le calcul exact.
461	Mérovée meurt la 10e année de ſon régne, & Childeric lui ſuccede	458
467	Childeric eſt dépoſé la 6e année de ſon régne	464
469	Clovis naît en Thuringe la 2e année de l'exil de ſon pere	466
475	Childeric retourne en France la 8e année de ſa dépoſition	472
475	La même année Childeric met en fuite le Comte Gilles devant Cologne; ce qui fait voir que ce Comte ne mourut point en 463, comme l'a prétendu le P. Daniel, non plus qu'en 464 & 469, ſuivant Idace.	472
476	Baſine vient de Thuringe en France avec ſon fils Clovis âgé de 7 ans.	473
477	Childeric rend la Suabe tributaire	474
478	Childeric bat Odoacar ou Odoacer, reprend ſur lui la ville d'Angers, & tue le Comte Paul.	475
484	Childeric meurt la 9e année de ſon rétabliſſement, & Clovis lui ſuccede âgé de 15 ans.	481
485	Clovis met en fuite Siagrius fils du Comte Gilles, reprend ſur lui Soiſſons, enſuite Reims & autres villes.	482

Années de J. C. ſuivant Trithe-me.		Années de J. C. ſuivant le cal-cul exact.
494	Clovis porte la guerre en Thuringe & la rend tributaire la 10e année de ſon régne.	491
495	Clovis défait Alaric devant Poitiers, & prend cette ville la 11e année de ſon régne.	492
499	Clovis gagne une bataille (à Tolbiac) contre les Alle-mans de la Suabe.	496
499	La même année il ſe fait Chrétien	496
501	Clovis fait la guerre à Gondebald Roi de Bourgogne	498
514	Clovis meurt âgé de 45 ans, la 30e année de ſon régne, ce qui eſt conforme au calcul que j'ai tiré de la 1112e an-née après la mort de St. Martin dans ma Diſſertation.	511

J'ai parlé dans cette Table de la guerre que Clovis porta en Thuringe l'an 491, & je trouve dans l'Abrégé de Trithеme, page 85, que la cauſe de cette guerre fut, que Baſine jadis femme de Baſin, allant en France pour s'abandonner à Childeric, avoit emporté avec elle divers joyaux d'or, d'argent & de perles, que le fils du Roi Baſin redeman-da & ne put obtenir, ſurquoi il déclara la guerre à Clovis: *Cauſa belli fuit, quod Baſina quondam uxor Baſini vadens in Galliam ad Hildericum, ut paulo prius dictum eſt, plura clenodia* (*) *in auro, argento & margaritis, ſecum abſtulerat, quæ repetens regis Ba-ſini filius, cum non impetraſſet, bellum Clodoveo denunciavit.* Après avoir fait paſſer Baſine femme de Baſin pour une proſtituée, il ne manquoit plus que d'en faire une voleuſe, reproche pourtant qui ne lui a été fait par aucun des Ecrivains qui ont le moins ménagé cette Reine plus de 300 ans après Clovis, & qu'à plus forte raiſon n'auroit point écrit Hunibald vivant ſous ſon régne; ce qui prouve que ſon Hiſtoire a été interpolée avant Trithеme, ou que celui-ci en l'abré-geant a compilé d'autres Auteurs dont il a couſu les récits à ceux d'Hu-nibald. Mais, dès que Baſine ne fut point la femme & fut la fille de Ba-ſin,

(*) *Cleinodia appellantur, quaſi Kleinnor, quia exiguæ neceſſitatis & parvi uſus ſunt.* Petri Lambecii *Comm. de Biblioth. Cæſ.* Lib. 2. c. 5. p. 110.

ſin, mariée à Childeric dans la Thuringe, il eſt inutile de s'amuſer à réfuter une accuſation ſi frivole, & d'autant plus mal imaginée, que ce ne fut point le fils de Baſin qui vint attaquer Clovis, mais que ce fut Clovis au contraire qui alla en Thuringe, non ſans doute pour y reporter le prétendu vol de ſa mere, mais pour revendiquer la part qui lui revenoit de la ſucceſſion de ſon grand-pere. En effet il ne conquit pas toute la Thuringe: il ſe contenta d'une partie. Mais c'eſt cette partie même qui, jointe à la facilité avec laquelle il la ſoumit, prouve qu'il y avoit des droits inconteſtables.

Ainſi, perſiſtant dans mes concluſions précédentes, je demande à tout eſprit raiſonnable & impartial, ſi ce que des Hiſtoriens, mal inſtruits & dépourvus de jugement, ont dit de Baſine, de Childeric, & de la naiſſance de Clovis, a été autre choſe qu'un tiſſu groſſier de fables & de calomnies, qui, après être ſorties d'une ſource auſſi impure qu'eſt la méchanceté d'une vile populace, ſe ſont accréditées par le malheureux penchant qu'ont tous les hommes à ſaiſir le menſonge avec avidité, & à croire le mal plutôt que le bien.

ELOGE
DE Mr. HUMBERT. (*)

ABRAHAM HUMBERT, Major des Armées de S. M. Membre de l'Académie Royale des Sciences, & du Conſeil François, nâquit à Berlin en Avril, 1689. Sa famille originaire de Lorraine s'étoit réfugiée à Metz pour cauſe de Religion. La même cauſe l'en fit ſortir à la révocation de l'Edit de Nantes; & elle vint s'établir à Berlin, où elle n'étoit arrivée que depuis fort peu de tems, lorſque notre Académicien vint au monde.

Il montra de bonne heure des diſpoſitions qui engagerent à le deſtiner tout à la fois aux études & aux armes. Il s'appliqua en particulier aux Mathématiques, & eut l'avantage de trouver un fort bon guide en la perſonne de Mr. *Philippe Naudé* le pere.

En 1708, il alla en Flandres, & entra dans une Compagnie de Cadets au ſervice de Hollande. Il fit en cette qualité une campagne, dans un tems où elles étoient fort inſtructives. Mais, avant que de prendre des engagemens militaires plus étroits, il ſe crut obligé de revenir encore à Berlin, pour achever de ſe perfectionner dans les Sciences qu'exige le métier de la Guerre.

Il ſe détermina enſuite pour le ſervice de Saxe, & y fut reçu en 1711, en qualité d'Enſeigne dans le Régiment de Dragons de Weiſſenfels. Les Troupes Saxonnes ſervirent en Poméranie, & il y eut diverſes actions auxquelles Mr. *Humbert* ſe trouva, & paya de ſa perſonne. Il penſa être arrêté dès l'entrée de ſa carriere à Gadebuſch, le 20 Décembre de la même année, où il eut un cheval tué ſous lui, fut fait

(*) Lu dans l'Aſſemblée publique du 28 Janvier 1762.

fait priſonnier, & conduit à Wiſmar. Cet accident lui fut plus avantageux que nuiſible. Le tems de ſa détention devint pour lui un tems d'étude & d'application; il traça entr'autres choſes avec beaucoup d'exactitude une Carte de l'Ile d'Uſedom, pour la préſenter à ſon Général, le Prince de Weiſſenfels, qui lui en ſut fort bon gré. Après qu'il eut été échangé, il ſuivit ſon Régiment en Pologne & en Lithuanie, & ſe trouva encore à la Bataille de Sendomir.

Après ſept ans de ſervice, Mr. *Humbert* devenu Lieutenant, demanda ſon congé, pour venir conſacrer ce qu'il avoit acquis d'expérience & de capacité, au Souverain dont les Etats étoient devenus l'aſyle de ſa famille & ſa patrie. Il trouva auſſi-tôt de l'emploi, & fut aggrégé au Corps des Ingénieurs en qualité de Capitaine, en 1719. Cet état lui convenoit parfaitement; il ſe trouvoit dans ſon élément, rien n'étant plus de ſon goût que la fortification avec toutes ſes dépendances. Son talent dans ce genre ayant été reconnu lui valut la commiſſion honorable de diriger d'abord les travaux de Memmel, & enſuite ceux de Stettin, où il eut ordre de ſe rendre en 1731.

Ce nouveau ſéjour fait une nouvelle époque dans ſa vie. Mr. *Humbert* n'avoit travaillé juſqu'alors qu'à s'inſtruire; il ſe crut en état d'inſtruire le public, & de joindre à la qualité de bon Officier celle d'Auteur utile. Les liaiſons d'amitié qu'il contracta avec feu Mr. *de Mauclerc*, Prédicateur de la Cour à Stettin, le mirent ſur cette voie. Ce Savant travailloit alors à la Bibliotheque Germanique, & il invita Mr. *Humbert* à fournir des morceaux propres à entrer dans ce Journal. Comme celui-ci avoit plus manié l'épée, ou le compas, que la plume, ſes premiers eſſais étoient un peu informes, & ſurtout d'un ſtile ſi négligé, qu'ils n'auroient peut-être pas été de miſe, ſans les reviſions de Mr. *de Mauclerc*. Mais Mr. *Humbert* avoit trop de bon ſens pour n'être pas reconnoiſſant de cet office; & pluſieurs années après, il penſoit encore de même, comme j'en ai fait l'expérience, m'étant trouvé avec lui dans des rélations ſemblables après la mort de Mr. *de Mauclerc*. Les Pieces, preſque toutes en forme de Lettres, qu'il a don-

nées dans la Bibliotheque Germanique, dans le Journal de Berlin que j'entrepris en 1740, par ordre de S. M. & dans d'autres Ecrits périodiques qui lui ont ſuccédé, roulent principalement ſur la Géographie, que Mr. *Humbert* n'aimoit pas moins que la Fortification, ſi tant eſt même qu'elle ne fût pas l'objet de ſa prédilection. Il avoit fait de fort belles collections dans ce genre, & pouvoit paſſer pour bon connoiſſeur en fait de Cartes.

Ces petits Ecrits furent une eſpece d'apprentiſſage qui le diſpoſerent à compoſer de plus grands Ouvrages, des Traités en forme. Il en donna un ſur les Sieges en 1747, pour ſervir de ſupplément à l'attaque & à la défenſe des places de Mr. le Maréchal *de Vauban*. Ce qui l'engagea ſans doute à ce travail, ce fut la Traduction qu'il venoit d'exécuter du grand Ouvrage de *Vauban*. Elle fut imprimée en 1744, en 2 Volumes in 4. à l'uſage de l'Armée Pruſſienne. En 1750, il fit un Livre ſur le Nivellement; en 1751, il écrivit ſur l'origine & le progrès de la Gravure par les Eſtampes, & en 1755, il publia le premier Tome de ſon Art du Génie; ouvrage que la décadence de ſes forces ne lui a pas permis de pouſſer plus loin. Revenons aux détails de ſa vie.

En 1737, il devint Major, & fut placé à Cuſtrin, où il demeura juſqu'à la mort du Roi défunt. Quinze jours après cette mort, le nouveau Monarque l'appella à Berlin, & l'honora d'une diſtinction bien flatteuſe, en le chargeant d'enſeigner les Mathématiques aux deux plus jeunes des Princes ſes freres La bienveillance dont LL. AA. RR. l'ont honoré juſqu'à ſa fin prouve qu'ils avoient été contens de ſes inſtructions.

Le Conſeil François qui fut formé, ou plutôt renouvellé bientôt après, crut ne pouvoir ſe paſſer des lumieres de Mr. *Humbert*, principalement dans ce qui concernoit les Arts & les Métiers; & il eut une place dans ce Corps. L'Académie fit la même acquiſition dès ſon Renouvellement.

Les

Les années ſe ſont écoulées depuis ce tems-là ſans apporter d'autre changement à la ſituation de Mr. *Humbert*, que celle qui eſt un effet de la vieilleſſe. Il a vêcu au milieu de nous, s'occupant de ſes objets favoris, tant que ſes forces le lui ont permis. Depuis quelques années, les traces d'un appéſantiſſement, cauſé autant par ſa complexion que par ſon âge, étoient fort ſenſibles. Il a pourtant fréquenté nos Aſſemblées preſque juſqu'à ſa fin. Une maladie de quelques jours pendant laquelle il a conſervé toute ſa préſence d'eſprit, & a témoigné toutes les diſpoſitions convenables à ſon état, l'a conduit au terme de ſa carriere, le 12 de Janvier, 1761.

On a vu par tout ce que nous avons dit que Mr. *Humbert* étoit ſtudieux & laborieux. Il joignoit à ces qualités celles qui pouvoient le faire eſtimer & aimer dans la ſociété. Il étoit obligeant & officieux. Ses talens & ſes ſervices ſembloient devoir le conduire plus loin du côté de la fortune; mais les circonſtances ſont ſouvent maîtres des obſtacles qui mettent la prudence humaine en défaut, ou qui demanderoient un degré de prudence qu'on n'acquiert pas avec le ſçavoir.

Mr. *Humbert* avoit épouſé, en 1709, *Amélie Jeanne Ballzer*, dont le pere, Prédicateur de la Cour à Mittau en Courlande, & appellé enſuite à Memmel, étoit d'une famille patricienne de Brême. Cette Dame a ſurvêcu à ſon Epoux, dont elle avoit eu trois enfans, un fils mort à Cuſtrin à l'âge de 6 ans, un autre qui eſt actuellement Capitaine de Grenadiers dans le Régiment de S. A. R. Monſeigneur le Prince de Pruſſe, & une fille auſſi vivante.

ELOGE
DE MR. JACOBI. (*)

Un grand Poëte a dit qu'il ne falloit point meſurer au nombre des années la trame des Héros. Cela eſt vrai de celle de tous les hommes; il y en a qui vivent peu en fourniſſant une longue carriere, & d'autres qui vivent beaucoup en finiſſant la leur preſque dès l'entrée. On voit des génies actifs qui ſe développent de bonne heure, & qui mettent tous les momens à profit. Tel étoit l'eſtimable Académicien dont nous allons vous entretenir. N'ayant pu recouvrer plutôt les matériaux néceſſaires pour ſon Eloge, nous compenſerons ce retardement par des détails dont le principal but ſera de fournir un modele aux jeunes Officiers, & de leur montrer quelles ſont les voies par où l'on parvient à l'eſtime & à la conſidération; avantages plus précieux que les honneurs ſuprêmes, ſur leſquels la naiſſance & d'autres cauſes fortuites ont toujours quelque influence, au lieu qu'un vrai mérite ne ſauroit jamais être conteſté à celui qui le poſſede.

FRÉDERIC PAUL JACOBI, Lieutenant d'Artillerie, & Membre de l'Académie Royale des Sciences, nâquit le 8. Mai 1724. à Tucheband, Village de la Nouvelle Marche, dont ſon pere *Adam Fréderic Jacobi* deſſervoit alors l'Egliſe en qualité d'Adjoint du grand-pere, après la mort duquel il eut cette cure & celle de Fridersdorf. Ce pere, qui ſurvit actuellement à ſon fils, avoit épouſé *Sophie Madelaine Meyer*, fille unique de feu Mr. *Jean Ludolf Meyer*, Licentié en Droit, Avocat

(*) Lu dans l'Aſſemblée publique du 3 Juin, 1762.

Avocat à Hanover, Aſſeſſeur de la Juſtice à Hildesheim, & Conſeiller de Régence du Comte de la Lippe-Bückenbourg.

Notre Académicien fut le premier fruit de ce mariage; & au bout d'un an, il eut un frere cadet nommé *Auguſte Jean.* Le grand-pere qui étoit un homme éclairé, s'occupoit à inſtruire ſes deux petits fils, qu'on deſtinoit à l'état eccléſiaſtique. Il leur enſeigna les principes des Langues Greque & Latine, l'Hiſtoire & la Géographie, & y joignit les premieres notions de la Théologie: le pere de ſon côté ſecondoit ces ſoins, & initia ſes fils dans la langue Hébraïque. Que de ſemblables éducations ſont précieuſes! Qu'il eſt beau de voir deux générations s'aſſocier pour en former une troiſieme! C'eſt le moyen de démentir le mot d'Horace, & de produire des petits-fils qui valent mieux encore que leurs peres & leurs ayeux.

Peu s'en falut que l'ainé des jeunes Jacobi ne fût moiſſonné dès ſa plus tendre fleur. Deux chûtes extrémement dangereuſes le conduiſirent aux portes du trépas. Attribuerai-je ſa guériſon à l'Eſculape qui le traita? Ce fut le Berger du Village.

Après que ces éleves eurent fait tous les progrès auxquels pouvoient les conduire leurs études domeſtiques, on les envoya au College de Cuſtrin, dirigé alors par le Recteur *Helmereichs.* Ce Recteur pouſſa l'ainé dans la connoiſſance de l'Hébreu, parce que ſa vocation pour la Théologie paroiſſoit décidée; & bientôt le Texte original de l'ancien Teſtament lui fut auſſi familier que ſa langue maternelle. Je ſoupçonne cependant que le jeune Jacobi avoit déjà d'autres vues; & nous ne tarderons pas à en appercevoir des indices.

Ce fut à l'Univerſité qu'ils ſe manifeſterent. Il ſe rendit à celle de Francfort, à l'âge de 17 ans: & quoiqu'il s'y préſentât d'abord ſur le pied d'Etudiant en Théologie, & qu'en cette qualité il aſſiſtât aux

leçons des Profeſſeurs de cette Faculté, il prit un goût plus marqué à celles de Philoſophie de Mr. *Baumgarten*, l'un des hommes du monde le plus propre à captiver l'eſprit & le cœur de ceux qui l'écoutent (*), & il montra beaucoup d'application pour celles de Mathématique de Mrs. *Polack* & *Curtz*. L'Officier, l'Ingénieur, étoit encore caché ſous l'écorce du Théologien; il n'oſoit ſe montrer, ſi je puis ainſi dire, mais il ſe formoit en ſecret avec le ſuccès que ne manquent gueres d'avoir les entrepriſes fondées ſur un penchant naturel, ſurtout lorſqu'il eſt combattu.

Mr. *Jacobi* le pere rappella ſon fils pour l'examiner; il n'y eut que le Théologien qui ſe montra, & l'on en fut très ſatisfait. Le pere fit même prêcher le fils, & lui trouva de très heureuſes diſpoſitions pour la Chaire. C'eſt une choſe ſinguliere que des hommes qui ſe ſont enſuite frayés des routes très différentes, & qui ont acquis la plus grande célébrité, ayent commencé par la prédication. Tels *Bærhaave* & *Wolff*. Peut-être auroient-ils été encore meilleurs prédicateurs à la fin de leur carriere qu'à l'entrée, ſi l'eſſence de la prédication conſiſte à propoſer des vérités importantes, & à les mettre dans le plus grand jour dont elles ſoient ſuſceptibles.

Comme les études théologiques du jeune *Jacobi* demandoient cependant encore qu'il reçût quelques leçons plus immédiatement rélatives à cette deſtination, les Profeſſeurs de Halle parurent propres à les fournir, & un ſeul pouvoit tenir lieu de tous; c'étoit le célebre Mr. *Baumgarten* l'ainé, l'un des plus profonds Théologiens, & des Savans les plus conſommés en tout genre d'érudition, qui ayent jamais occupé une Chaire académique. Mr. *Jacobi*, en continuant ſes études, montoit de tems en tems en Chaire; & ayant eu occaſion de paroître dans celle d'Hildesheim, il y fut ſi goûté que les Magiſtrats de cette Ville ſouhaiterent de l'attacher à quelcune de leurs Egliſes, lui offrant mê-

(*) Ce célebre Profeſſeur vivoit encore lorſque cet Eloge a été lu.

même une place de Surintendant qui vint alors à vaquer. C'étoit le moment de ſe déterminer; & ce fut celui où le germe militaire, cultivé juſqu'alors en ſecret, ſe développa avec une rapidité, avec une véhémence, proportionnées à l'effort employé pour le cacher. Le ſpectacle d'un fils déſobéiſſant qui s'offre ici, n'a, j'oſe le dire, rien qui puiſſe révolter: ou plutôt ce n'eſt point une vraie déſobéiſſance; puiſqu'avant nos parens il exiſte une premiere Mere dont l'autorité eſt la plus forte, dont les loix ſont les plus ſacrées, c'eſt la Nature. Autant qu'il ſeroit injuſte & abſurde de vouloir provoquer à ſes droits pour légitimer des écarts manifeſtes, autant ces droits peuvent-ils être reclamés par quiconque ſe porte vers un but pour lequel il eſt né, ſe déclare pour un genre vers lequel une force irréſiſtible l'entraine. Auſſi des parens ſenſés, après les premiers momens de la ſurpriſe, après les premiers effets d'une répugnance fondée ſur quelque prévention, ne manquent gueres de ſe déſiſter de leurs oppoſitions, & reconnoiſſent bientôt avec attendriſſement que leurs enfans étoient plus ſages qu'eux, qu'ils connoiſſoient mieux leurs véritables intérêts. Après ces obſervations parfaitement fondées, ſi je ne me trompe, je ne ferai pas difficulté de dire que Mr. *Jacobi* laiſſa ſans réponſe pluſieurs lettres, par leſquelles ſon pere le preſſoit de la maniere la plus forte d'accepter des offres auſſi avantageuſes que l'étoient celles du Magiſtrat de Hildesheim. Pendant que le fils gardoit ce ſilence, le grand-pere vint à mourir; & la notification de cette mort obligea Mr. *Jacobi* à répondre, & à s'expliquer ſur les lettres précédentes. N'oſant pourtant manifeſter ſon véritable deſir, il demanda la permiſſion de paſſer encore un an à l'Univerſité, pour s'attacher au Droit. Il l'obtint, mais les Mathématiques continuerent à faire ſon objet capital. Déſeſpérant alors de pouvoir entrer au ſervice, il avoit en vue quelque place de Profeſſeur.

Le tems accordé étant écoulé, Mr. *Jacobi* fut rappellé par ſon pere au mois de Février 1746; & les premieres conférences entr'eux

ayant découvert au pere que le fils n'étoit, ni Théologien, ni Juriſconſulte, il fut aſſez mécontent de voir tant d'années perdues: au moins lui paroiſſoient-elles l'être. Le jeune homme ne pouvant demeurer longtems dans cet état de gêne & de diſgrace, fit effort ſur la timidité filiale, & déclara au bout de quatre ſemaines qu'il vouloit aller à Berlin pour s'engager dans les Canonniers. Qu'on s'imagine les allarmes d'un pere voué au ſervice des Aurels, les angoiſſes d'une tendre mere! La permiſſion d'aller à Berlin fut accordée, mais non celle de devenir Canonnier. Il y avoit une place de Précepteur à remplir; un Ami la lui avoit ménagée, & le jeune *Jacobi* fut envoyé dans la Capitale à condition d'entrer auſſitôt dans ce poſte. L'événement n'eſt pas difficile à deviner. La premiere choſe que *Jacobi* fit en arrivant à Berlin fut d'aller ſe préſenter au Colonel *de Meerkatz*, qui le reçut dans ſa Compagnie, & qui, en conſidération de ſes études, le fit d'abord Bas-Officier. Ici donc s'ouvre une nouvelle ſcene: ici nous allons voir comment Mr. *Jacobi* fit humainement tout ce qu'on peut faire pour juſtifier une réſolution telle que la ſienne, & pour laiſſer même un nom, que nous nous faiſons un véritable plaiſir de tranſmettre à la poſtérité.

Depuis le 20. Mai 1745, où Minerve avoit remis ce nourriſſon entre les mains de Mars, Mr. *Jacobi* ne négligea aucune des occaſions propres à prouver qu'il étoit bon à tout, & qu'on pouvoit ſe confier à lui pour les divers genres de fonctions d'un Militaire qui réunit les connoiſſances & l'application, la fidélité & le courage. Son Colonel, juge compétent, s'apperçut bientôt de ce qu'il valoit, & l'attacha à ſa perſonne, le menant partout où il étoit lui-même commandé, c'eſt à dire, d'abord à Magdebourg, enſuite au Camp qui fut formé près de Halle, de là à la priſe de Leipſig, & enfin à la mémorable Bataille de Keſſelsdorf, où, au ſein de la victoire, le nouveau Militaire eut le déſagrément de perdre tout ſon équipage. Philoſophe depuis longtems,

il ne

il ne regretta que les Elémens de Mathématique de *Wolff* & *Horace*. Auſſi étoit-ce en tout ſens ce qu'il poſſédoit de plus précieux.

Mr. *Jacobi* a écrit une rélation aſſez étendue de cette bataille, la premiere à laquelle il avoit aſſiſté. Peut-être feroit-elle plaiſir aux gens du mêtier, mais nous ne ſaurions lui accorder place ici. Il n'y a qu'un trait de ce narré, dont il faut faire honneur à la nobleſſe de ſes ſentimens. En repréſentant les déſordres du pillage, il montre la plus forte horreur pour ce mêtier, proteſtant qu'il eût été incapable de s'approprier la moindre bagatelle aux dépens des plus riches tout comme à ceux des plus pauvres. Peut-être même aura-t-on peine à le croire, ou trouvera-t-on un rigoriſme outré dans ce qu'il ajoûte, qu'il aimoit mieux jeûner des jours entiers que de fonder ſa cuiſine ſur le droit du plus fort.

En 1764, au mois de Fevrier, Mr. *Jacobi* entra comme Bas-Officier dans la Compagnie de Bombardiers du Capitaine *de Holtzmann*.

Le loiſir que lui donna la paix qui venoit d'être conclue fut conſacré à ſe pouſſer dans l'étude des Mathématiques. Il y avoit un Lieutenant *Ottleben* qui les enſeignoit. *Jacobi* fut envoyé à ſes leçons, avec d'autres Bas-Officiers en 1747; mais cet Officier s'apperçut bientôt que ſon diſciple en ſavoit plus que lui, & rendant volontiers juſtice à ſa capacité, il lui confia le ſoin d'inſtruire une Claſſe entiere: de ſorte que Mr. *Jacobi* paſſa tout d'un coup de l'état d'Ecolier au grade de Profeſſeur. Par là ſes deux penchans favoris furent tout à la fois remplis; car nous avons vû que ſon goût avoit, pour ainſi dire, flotté entre le mêtier des armes & les charges Académiques. Heureux l'homme qui ne forme que des deſirs auſſi purs! plus heureux celui qui les voit accomplis!

La Phyſique moderne a une liaiſon étroite avec les Mathématiques. Mr. *Jacobi* tourna ſes regards vers elle; elle remplit d'abord ſes heures de récréation; bientôt il fut frappé de ſes charmes, convaincu de ſon utilité, & joignit la qualité de bon Phyſicien à celle d'habile Géometre. Tant de ſuccès le firent connoitre & eſtimer de plus en plus; cela eſt naturel: & ce qui l'eſt encore plus, elles lui attirerent des envieux, inſectes qui peuvent piquer des plantes ſaines & vigoureuſes, mais qui ne ſauroient les détruire.

Au mois de Juillet 1749, Mr. *Jacobi* eut l'avantage de ſe faire connoitre à feu Mr. le Maréchal *de Schmettau*, Grand-Maître de l'Artillerie. Les expériences que le Corps d'Artillerie faiſoit ſur le jet des bombes s'exécuterent en préſence du Maréchal, qui avoit invité Mrs. *Euler* & *Kies* à y aſſiſter. Mr. *Jacobi* donna des preuves de ſa capacité & de ſa dextérité, qui lui firent beaucoup d'honneur, & le mirent en liaiſon avec ces Savans. Il ſentoit bien le prix de cette liaiſon, & en tira depuis tous les avantages qu'il s'en étoit promis.

Vers la fin de la même année, le Colonel *de Holtzmann* lui confia l'inſtruction des Bas-Officiers du Bataillon qu'il commandoit, & le fit Artificier.

Ce n'eſt pas une ſimple généralité que ce que j'ai dit des envieux de Mr. *Jacobi*. Je trouverois ici le lieu de parler de leurs manœuvres, & de diverſes cabales qui ſe firent dans le Corps de l'Artillerie; mais mon pinceau ſe refuſe à ces noirceurs. Je dirai ſeulement que Mr. *Jacobi* fut entierement détruit dans l'eſprit du Colonel *de Holtzmann*, qui l'avoit juſqu'alors protégé. Cela ne le découragea cependant point; il ſentoit que le droit & la raiſon étoient de ſon côté, & il ſoutint une vive diſpute contre ce Colonel au ſujet des Canons à chambres cylindriques, dont Mr. *Jacobi* revendiquoit l'invention. Une preuve de la bonté de ſa cauſe, c'eſt que le Grand-Maî-

Maître & le Général *de Beauvrye* redoublerent d'eſtime & de confiance pour lui.

Selon les apparences, ce fut la mort du premier qui l'empêcha de faire la fortune de Mr. *Jacobi;* il perdit auſſi dans un court eſpace de tems le ſecond, mais il les recouvra l'un & l'autre avec uſure par l'amitié intime de Mr. *de Dieskau*, alors Major, & que ſes longs ſervices auſſi bien que ſon rare mérite rendent aujourd'hui l'un des plus anciens & des plus reſpectables Chefs de l'Artillerie. (*) Ce fut par ſes conſeils que Mr. *Jacobi* compoſa deux Traités ſur les matieres les plus intéreſſantes de ſon métier; le premier ſur la cauſe des jets à faux, & les moyens d'en diminuer le nombre, le ſecond ſur la maniere d'arranger les canons, ſoit au dehors, ſoit au dedans d'une fortereſſe. Ces deux Ecrits furent commencés & achevés en 1751. Mr. *de Dieskau* avoit deſſein de les montrer au Roi, & de procurer à leur Auteur un avancement dont il étoit ſi digne. L'occaſion que le Major cherchoit ſe trouva, même avant que ces Traités fuſſent finis, dans un entretien à table, où Mr. *de Dieskau* ayant dit que *Jacobi* étoit très capable d'enſeigner les Mathématiques, S. M. ordonna au Général *Linger* de l'examiner: & cet examen ayant été ſuivi du rapport le plus favorable, le Roi fit expédier auſſitôt la Patente de Lieutenant pour Mr. *Jacobi*, lui ordonnant de commencer ſans délai ſes leçons de Mathématique. Mr. *de Dieskau* couronna ce ſervice ſignalé par un trait de généroſité digne de lui: il fit préſent au nouveau Lieutenant de tout ſon équipage. C'eſt ainſi qu'après avoir été Bas-Officier pendant ſix ans & huit mois, Mr. *Jacobi* obtint un grade, qui, tout diſtant qu'il eſt des premiers rangs, le combloit d'une joie plus vive que celle qu'on éprouve au faîte des honneurs.

Le Profeſſorat & la Lieutenance demeurerent donc unis; mais la Lieutenance rendit le Profeſſorat une fonction réglée, une charge proprement dite. Pour s'en acquitter d'autant mieux, Mr. *Jacobi* com-

(*) Lieutenant-Général, & Chevalier de l'Aigle noir.

compoſa lui-même un Cours de Mathématique, dans lequel il compri toutes les matieres dont la connoiſſance eſt utile à un Membre d Corps de l'Artillerie. Il donnoit outre cela des leçons particulieres d Phyſique à pluſieurs Officiers du même Corps, & il y ſuivoit le Cour de Mr. *de Segner*.

Il étoit naturel qu'un homme auſſi habile, auſſi appliqué à tous ſes devoirs, auſſi attentif à faire des progrès & à ſeconder ceux des autres, attirât l'attention d'une Compagnie fondée pour le progrès de toutes les Sciences. L'Académie également perſuadée que Mr. *Jacobi* lui ſeroit utile, & qu'elle ſeroit utile à Mr. *Jacobi*, le mit au nombre de ſes Membres au commencement du mois d'Octobre 1752. Nous l'avons vû aſſidu à nos Aſſemblées, autant que ſes autres devoirs le lui permettoient. Il y portoit cette attention qui ſert à l'accroiſſement du ſavoir, & cette modeſtie qui en eſt le caractere le moins douteux. Il n'auroit pas manqué d'enrichir nos Mémoires de ſes travaux; & il y a, parmi les matériaux des volumes que nous préparons pour l'impreſſion, un écrit important de ſa façon ſur les jets à ricochet. Laborieux & inventif, il étoit toujours occupé de quelqu'idée nouvelle, ou qu'il conduiſoit à quelque nouveau degré de perfection. Il avoit trouvé une façon particuliere de lever le plan des Ouvrages d'une fortereſſe par le moyen d'un miroir; & il a compoſé un Mémoire fort étendu ſur ce ſujet. Etoit-ce par une eſpece de preſſentiment qu'il mettoit ſi bien à profit un tems dont la durée devoit être ſi courte? Suivons-le dans le reſte de ſa carriere; nous le verrons arriver par les travaux, & à travers les dangers, à ce lit d'honneur qui lui étoit réſervé.

En 1753, il aſſiſta au Camp qui fut formé près de Spandau & l'année ſuivante, aux expériences ſur le Globe de compreſſion qui ſe firent à Potsdam. Le 19 d'Août de cette même année fut incontestablement un des plus beaux jours de ſa vie. Le Roi l'avoit fait venir à Pots

à Potsdam pour y manœuvrer avec quelques mortiers. Le Major *de Dieskau* & le Capitaine *Wentzell* aſſiſterent à ces manœuvres, dans leſquelles le Lieutenant *Jacobi* fit voir une dextérité ſi conſommée, que S. M. lui dit ces mots dont on peut croire qu'il n'a jamais perdu le ſouvenir: *Je ſuis extraordinairement content de vous. Vous avez fait ce qu'on pouvoit faire de mieux. Vous avez ſurpaſſé mon attente.* Ces paroles ſeules ſuffiſent pour faire l'Eloge de Mr. *Jacobi;* elles valent incomparablement mieux que tous les Eloges académiques.

La Guerre ayant recommencé, Mr. *Jacobi* ſervit comme il avoit toujours fait; ſe trouvant partout où ſon devoir l'appelloit, & ne mettant d'autres bornes à ſon devoir que celles de ſon zele. Il fut fait priſonnier dans une action dont j'ignore le lieu & la date, & conduit à Cremm, avec d'autres compagnons de la même diſgrace. Il en charma les ennuis en leur donnant des leçons. N'étoit-il pas en droit de dire: *Je porte tout avec moi?*

Ayant été échangé, il revint à ſon poſte, & ſe trouva aux batailles de Reichemberg & de Prague, dont il a donné un récit détaillé & inſtructif dans une lettre datée du 27. Mai 1757. Cette Lettre, auſſi bien qu'une autre à Mr. le Profeſſeur *Pohlack*, où il fait une hiſtoire abrégée de ſes études & de ſa vie, juſqu'au 21. Décembre 1754, jour auquel il l'écrivoit, mériteroient de voir le jour. Ce ſont les ſources dans leſquelles j'ai puiſé cet Eloge.

On eſt ſurpris en voyant les dangers ſans nombre auxquels Mr. *Jacobi* fut expoſé dans ces batailles, & ſurtout à celle de Prague. La mort voloit autour de lui; mais ſon heure n'étoit pas venue, quoiqu'elle ne fut pas bien éloignée. C'étoit devant Olmütz qu'il devoit donner à la Patrie le dernier témoignage de ſon dévouement. Chargé de la direction de pluſieurs batteries, il en pouſſoit le ſervice avec une ardeur infatigable; il écrivit de ce Siege une Lettre à ſon pere, où

il marquoit qu'il eſpéroit la reddition d'Olmütz dans l'eſpace de dix jours. Un boulet de canon parti de la place l'empêcha d'être témoin de l'événement. On lui fit remarquer qu'une batterie des ennemis étoit pointée de façon à porter ſur lui: il ſourioit encore de l'avis, lorſqu'il fut terraſſé. La nouvelle de ſa mort parvint à ſon pere avant ſa derniere Lettre. Le jour de cette mort n'eſt pas connu: on ſait ſeulement que ſes funérailles ſe firent avec celles de deux autres braves Officiers du même Corps, Mrs. *de Beauſobre* & *Golzhorn.*

Tel fut Mr. *Jacobi* avant que d'avoir fini ſon cinquieme luſtre; quel n'auroit-il pas été, s'il avoit autant vêcu que le Chevalier *Folard?*